行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 □期中進度報告
■期末報告

動態 Zeta 函數

計畫類別：■個別型計畫 □整合型計畫
計畫編號：NSC 98 － 2115 － M － 009 － 008 －MY3
執行期間：2009 年 8 月 1 日至 2012 年 7 月 31 日

執行機構及系所：交通大學應用數學系

計畫主持人：林松山
共同主持人：
計畫參與人員：

本計畫除繳交成果報告外，另含下列出國報告，共 _1_ 份：
■移地研究心得報告
□出席國際學術會議心得報告
□國際合作研究計畫國外研究報告

處理方式：除列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

中 華 民 國 101 年 10 月 23 日

目錄

Abstract

This work is concerned with zeta functions of two-dimensional shifts of finite type. A two-dimensional zeta function $\zeta^0(s)$, which generalizes the Artin-Mazur zeta function, was given by Lind for Z^2-action ϕ. In this work, the nth-order zeta function ζ_n of ϕ on $Z_{n\times\infty}$, $n \geq 1$, is studied first. The trace operator T_n, which is the transition matrix for x-periodic patterns with period n and height 2, is rotationally symmetric. The rotational symmetry of T_n induces the reduced trace operator τ_n and $\zeta_n = \left(\det\left(I - s^n \tau_n\right)\right)^{-1}$. The zeta function $\zeta = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\det\left(I - s^n \tau_n\right)\right)^{-1}$ in the x-direction is now a reciprocal of an infinite product of polynomials. The zeta function can be presented in the y-direction and in the coordinates of any unimodular transformation in $GL_2(Z)$. Therefore, there exists a family of zeta functions that are meromorphic extensions of the same analytic function $\zeta^0(s)$. The natural boundary of zeta function is studied. The Taylor series for these zeta functions at the origin are equal with integer coefficients, yielding a family of identities, which are of interest in number theory. The methods used herein are also valid for d-dimensional cases, $d \geq 3$, and can be applied to thermodynamic zeta functions for the Ising model with finite range interactions.

Keywords and phrases: zeta function, shift of finite type, pattern generation problem, phase-transition, Ising model, cellular neural networks.

摘要

此工作研究二維有限型移位的ζ-函數。Lind 推廣 Artin-Mazurζ-函數得到對於Z^2-作用ϕ的二維ζ-函數。首先，對於任何$n \geq 1$，我們考慮在$Z_{n\times\infty}$上的n階ζ-函數ζ_n。接下來，我們引進跡算子，跡算子是由水平週期n高度 2 的花樣造出的遞移矩陣。其中，可以推得跡算子具有旋轉對稱的性質。根據跡算子的旋轉對稱，進一步引進約化跡算子τ_n，進而得到$\zeta_n = \left(\det\left(I - s^n\tau_n\right)\right)^{-1}$。因此，$\zeta$-函數在$x$-方向可以表示為$\zeta = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\det\left(I - s^n\tau_n\right)\right)^{-1}$，一個多項式的無窮乘積的倒數。此外，對於任何由$GL_2(\mathrm{Z})$中的單位模變換決定的傾斜坐標皆可得到相同結果。所以，有一族ζ-函數在原點的泰勒級數展開式皆相同，並且其係數皆為整數，進一步可以得到一族在數論上有趣的恆等式。此方法在三維以上的情況也適用，而且可以應用到有限範圍交互作用之伊辛模型的熱力學ζ-函數。

關鍵字詞：zeta 函數，有限型移位，花樣生成問題，相變，伊辛模型，胞狀類神經網路。

報告內容

前言

花樣生成(Patterns Generation)是多維動態系統一個重要研究領域，主要是研究系統的複雜性及計算複雜度，在應用上與統計力學的相變有密切關係。動態ζ-函數是考慮動態系統所有的週期花樣，依週期給予不同的權值所形成的解析函數。與數論有密切關係。在應用上與質數分佈及物理的相變有關。

研究目的

此工作研究二維有限型移位的動態ζ-函數，證明在$GL_2(\mathrm{Z})$ 任何傾斜坐標中，二維動態ζ-函數皆可表示為一個多項式的無窮乘積的倒數，進而得到有一族動態ζ-函數在原點的泰勒級數展開式皆相同，因此得到一族數論上的恆等式。

文獻探討

半世紀前由 Artin-Mazur 引進動態 zeta 函數後， Bowen-Lanford 證明了一維有限型移位的動態ζ-函數為有理函數。但是對於多維問題，多年來進展有限，只有一些定義和零星結果。我們經過大規模數值檢驗後，發現 Lind 的定義最富代數結構及潛力，於是選定其定義 。

研究方法

過去十幾年，在花樣生成領域中，我們已經發展了高維度的次序矩陣(ordering matrix)以及遞移矩陣(transition matrix)，並且推導出其遞迴公式，多維的空間熵有了一個明確且良好逼近解法。另一方面，我們引進跡算子(trace operator)，可以有效的估計空間熵的下界。

在研究跡算子時，我們發現跡算子是由水平週期n高度 2 的花樣造出的遞移矩陣，可以用來計算週期花樣的個數。在 Lind 定義中，必須去計算$\mathbb{Z}^2$中所有 finite index subgroups 所對應的週期花樣，於是我們新引進轉動矩陣(rotational matrix)，利用其轉動對稱，得到約化跡算子τ_n (reduced trace operator)，進一步證明n階ζ-函數可以表示為有理函數的倒數：$\zeta_n=\left(\det\left(I-s^n\tau_n\right)\right)^{-1}$ ，進一步推得在動態ζ-函數在x-方向可表示為 $\zeta=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\det\left(I-s^n\tau_n\right)\right)^{-1}$，一個多項式的無窮乘積的倒數。

接下來，我們考慮$GL_2(\mathrm{Z})$中任何單位模變換決定的傾斜坐標，得到相對應的轉動矩陣以及約化跡算子，因此證明ζ-函數在傾斜坐標皆可表示為一個多項式的無窮乘積的倒數。進而得到這一族ζ-函數在原點的泰勒級數展開式皆相同，並且其係數皆為整數，因此獲得一族在數論上的恆等式。

在統計物理中有限範圍交互作用的伊辛模型(Ising model)中，根據其勢能(potential energy)，可推得其對應的轉移矩陣、跡算子與約化跡算子，進一步得到其熱力學ζ-函數亦可以用約化跡算子表示為無窮乘積的倒數。

結果與討論

在此工作中，我們得到二維有限型移位的動態ζ-函數在$GL_2(\mathrm{Z})$中的傾斜坐標皆可表示為一個多項式的無窮乘積的倒數，並且這一族ζ-函數在原點的泰勒級數展開式皆相同，而且其係數皆為整數。奠基於目前的研究結果，未來研究重點簡述如下：

(i) 動態ζ-函數的 Natural Boundary 與空間熵及其他統計力學性質的關係為何？

(ii) Sofic shift 的動態ζ-函數理論。

(iii) 動態ζ-函數所導出的$\mathrm{GL}_2(\mathrm{Z})$族等式在數論的應用。

參考文獻

1. M. Artin and B. Mazur, *On periodic points*, Annals Math. **81** (1965), 82-99.
2. J.C. Ban and S.S. Lin, *Patterns generation and transition matrices in multi-dimensional lattice models*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **13**, (2005), no. 3, 637-658.
3. J.C. Ban, S.S. Lin and Y.H. Lin, *Patterns generation and spatial entropy in two dimensional lattice models*, Asian J. Math. **11**, (2007), no. 3, 497-534.
4. R. J. Baxter, *Eight-vertex model in lattice statistics*, Phys. Rev. Lett. **26**, (1971) 832-833.
5. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press,1982.
6. R. Bowen and O. Lanford, *Zeta functions of restrictions of the shift transformation*, Proc. AMS Symp. Pure Math. **14** (1970), 43-49.
7. S.N. Chow, J. Mallet-paret and E.S. Van Vleck, *Pattern formation and spatial chaos in spatially discrete evolution equations*}, Random Comput. Dynam. **4**, (1996) 109-178.
8. D. Fried, *Finitely presented dynamical systems*, Ergodic Th. and Dynam. Syst. **7** (1987), 489-507.
9. F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, 2 vols. Chelsea, New York, 1959.
10. G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asympototic formulae for the distribution of integers of various types*, Proc. Royal Soc. **A 95**, 144-155.
11. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Ed., Oxford, 1988.
12. R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
13. J. Juang and S.S. Lin, *Cellular Neural Networks: Mosaic pattern and spatial chaos*, SIAM J. Appl. Math. **60**, (2000) 891-915.
14. B. Kitchens and K. Schmidt, *Automorphisms of compact groups*, Ergodic Th. and Dynam. Syst. **9** (1989), 691-735.
15. F. Ledrappier, *Un champ markovien peut\^{e}tre d'entropie nulle et m\'{e}langeant*, C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A **287** (1978), 561-562.
16. E.H. Lieb, *Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice*, Phys. Rev. Lett. **18**, (1967) 692-694.
17. E.H. Lieb, *The Residual Entropy of Square Ice*, Phys. Rev. **162**, (1967) 162-172.

18. D. Lind, *A zeta function for* Z^d *-actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **228**, Cambridge Univ. Press, (1996) 433-450.

19. D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

20. D. Lind, K. Schmidt, and T. Ward, *Mahler measure and entropy for commuting automorphisms of compact groups*, Inventiones Math. **101** (1990), 593-629.

21. C. MacDuffie, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1956.

22. A. Manning, *Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions*, Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 215-220.

23. N.G. Markley and M.E. Paul, *Maximal measures and entropy for* Z^{ν} *subshifts of finite type*, Classical mechanics and dynamical systems (Medford, Mass., 1979) 135-157, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **70**, Dekker, NewYork, (1981).

24. N.G. Markley and M.E. Paul, *Matrix subshifts for* Z^{ν} *symbolic dynamics*, Proc. London Math. Soc., (3) **43**, (1981) 251-272.

25. L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transitio*, Phys. Rev. **65**, (1944) 117-149.

26. M. Pollicott and K. Schmidt, *Ergodic theory of* Z^d *actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series. **228**, Cambridge University Press, 1996.

27. D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Encyclopedia of Math and its Appl, Vol 5. Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1978.

28. S. Saks and A. Zygmund; tr. by E. J. Scott, *Analytic functions*, Elsevier Science Ltd, 1952.

29. K. Schmidt, *Dynamical systems of algebraic origin*, Basel, Birkh\"{a}user Verlag, 1995.

30. N. J. A. Sloane and S. Plouffe, *The encyclopedia of integer sequences*, Academic Press, 1995.