# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

※ ※

※ （計畫名稱） ※

※ ※

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：□個別型計畫 □整合型計畫

計畫編號：NSC － － － － －

執行期間： 年 月 日至 年 月 日

計畫主持人：

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

□赴國外出差或研習心得報告一份

□赴大陸地區出差或研習心得報告一份

□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：

中　華　民　國　　　年　　　月　　　日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 線型馬達之高速伺服控制

High Speed Servo Control of Linear Motors

**計畫編號：**NSC 89-2212-E-009-051

**執行期限：**88/8/1 – 89/7/31

**主持人：國立交通大學機械系 金甘平**

### 一、中文摘要

本計畫主要是研究線型步進馬達的高速伺服控制。為了達到目標，我們建立一個包含阻尼項和四階齒槽效應力（cogging forces）的數學模型，並且根據此模型設計控制器。在控制的方法上，我們使用雙迴路控制法和降階模型控制法。隨著速度愈來愈高，所必須補償的電壓向量角度就愈來愈大，這是為了補償因為取樣與控制上所造成的延遲。最後，由於更換控制介面卡上的類比數位轉換器，可以將閉迴路的取樣頻率提高到 26KHz。根據模擬與實驗的結果，經過上述方式改善後的控制系統可以達到高速控制的目的。線型步進馬達的最高速度可達到$1m/s$，而零速時的位置誤差可以減少到±1«m。

**關鍵詞：線型馬達，線型步進馬達，PID 控制，降階控制**

**Abstract**

This thesis studies the high-speed servo control of linear pulse motors. To achieve this objective, a more accurate mathematical model of the motor with a damping term and up to fourth-order periodical cogging forces is identified and used in the design of the controller. As for the control algorithm, we have implemented both a two-loop control method and a reduced-order control method. The angle of the voltage vector is also increased corresponding to the speed of the motor to compensate the delay in the sampling and control process. Finally, the sample rate of the closed-loop control system is further increases up to 26K*Hz* by changing the AD converter of the control interface board. With the above improvements in the control system, we have demonstrated in both simulation and experimentation of a trajectory tracking task that, the highest speed of the linear pulse motor can be increased to 1 $m/s$ while the position error can be reduced to ±1«m at zero speed.

**Keywords:** linear motors, linear stepping motors, PID control, and Reduced-order control

### 二、計畫緣由與目的

線型馬達大略可分為線型感應馬達（LIM）、線型同步馬達（LSM）、線型脈波馬達（LPM）、線型直流馬達（LDM）等四種[1]。其中線型脈波馬達[2]應用於低速大推力、間歇性運動及定位系統，但不利於高速運動，而且以小功率電源驅動時就具有大的推力，容易造成短暫性的振動而引起定位不良。 本文採用的線型馬達是屬於線型脈波馬達的永久磁鐵型，具有構造簡單、低故障率、沒有磨損及高定位精度等特點。

為了提高馬達的操作速度，首先須求得完善的馬達數學模型，再設計控制器。[3]考慮鐵心的磁飽和、永久磁鐵的操作點改變及漏磁現象，以六個獨立磁路加上共能原理推導出垂直吸力、水平力、加速度、速度及移動的位置。[2]也提出線型脈波馬達的電壓及推力方程式。[4]則使用磁路模型分析馬達推力和位移的關係，及定速下的反電動勢和位移的關係。[5]用氣隙加上等效電路推導線型脈波馬達的模型。本文引用[1]的方法，利用安培定理、法拉第定理及共能原理，推導出線型步進馬達的模型。但是上述模型都沒有阻尼項，使得模擬結果和馬達的實際響應不符合。因此，本文在馬達模型中加入阻尼項與四階的齒槽效應力[6][7]，使得馬達模型更加完整。

在控制器設計上，本文使用雙迴路控制法與降階模型（Reduced-order model）控制法[8][9]。在全階模型控制器方面，針對馬達電氣系統採用解耦的 PI 控制法[10]及適應控制法[12]。針對機械系統採

用 PI、PID 和適應控制法。在降階模型控制器方面，電氣系統的變數表示成以機械系統變數為變數的函數，因此不需要電流的回饋訊號，就可以控制整個馬達的動態特性。另一方面，由於更換控制介面卡上的類比數位轉換器，將可以把閉迴路的取樣頻率提高到 26KHz。

本文將介紹修改後的馬達模型及其控制律，並且對模擬與實驗結果加以討論。

## 三、研究方法

### 3.1 線型步進馬達的數學模型

由於每經過一個齒型節距 $P$，馬達的特性就會重復。因此定義一個節距為 $2®$，d 軸的位置就是動子的位置，q 軸的位置就是動子的位置再向正向增加 $P/4$。在動子座標下，線型步進馬達的數學模型可表示成：

$$L\&_q = -Ri_q - LN\mu i_d - kN\mu + V_q \quad (1)$$

$$L\&_d = -Ri_d + LN\mu i_q + V_d \quad (2)$$

$$m\frac{d\mu}{dt} = kNi_q - \overline{B}\mu - B_0 - F_c\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN¯) \quad (3)$$

其中 $i_d$，$i_q$ 為 d，q 座標軸方向之電流；$V_d$ 和 $V_q$ 為 d，q 座標軸方向之輸入電壓；$L$ 為電感；$R$ 為電阻；$m$ 為動子質量；$\overline{B}$
為阻尼係數；$B_0$ 為常數；$F_c$ 為齒槽效應力的振幅；$a_j$ 為齒槽效應力的各階諧波的係數，$j = 1, 2, 3, 4$；¯為動子位置；$\mu$ 為動子速度；$k$ 為磁通鏈常數；$P$ 為齒型節距；$N = 2®/P$；$k_f = kN$。

### 3.2 全階模型控制器的設計

1. PID 位置控制器

利用回饋線性化法將系統線性化，其控制律為下列方程式(4)：

$$i_q = \frac{F_c}{kN}\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN¯) + B_0 + \frac{m}{kN}\&\& + u$$

$$u = k_p \cdot e_- + k_i\int_0^t e_- d¶ + k_d \cdot \& \quad (4)$$

其中 $e_- = ¯^* - ¯$，$¯^*$ 為位置命令，$\&\&$ 為加速度命令。將(4)代入(3)可得位置的誤差動態方程式為：

$$m\cdot\&\&\& + kN\cdot k_d\&\& + kN\cdot k_p\& + kN\cdot k_i e_- = 0 \quad (5)$$

指定方程式的特徵根為 $-±_a$，$-±_b$，$-±_c$，其中 $±_a > 0$，$±_b > 0$，$±_c > 0$，則此系統有全域指數形式的穩定性（globally exponentially stability），此時的增益值為：

$$k_d = \frac{m}{kN}(±_a + ±_b + ±_c) \quad (5)$$

$$k_p = \frac{m}{kN}(±_a±_b + ±_b±_c + ±_c±_a) \quad (6)$$

$$k_d = \frac{m}{kN}±_a±_b±_c \quad (7)$$

2. PI 電流控制器

利用狀態回饋將系統解耦做線性化，令輸入的控制律為：

$$V_q = (kN\mu + LN\mu i_d) + k_{pq}e_q + k_{iq}\int_0^t e_q d¶ \quad (8)$$

$$V_d = (-LN\mu i_q) + k_{pd}e_d + k_{id}\int_0^t e_d d¶ \quad (9)$$

其中 $e_q = i_q^* - i_q$，$e_d = i_d^* - i_d$，$i_d^*$ 和 $i_q^*$ 是 d 和 q 軸的電流命令值。以(8)和(9)代入(1)和(2)可得到線性化的系統方程式。再將 $e_d$ 和 $e_q$ 展開，可得到 d 軸和 q 軸的轉移函數：

$$G_q(s) = \frac{I_q(s)}{I_q^*(s)} = \frac{k_{pq}\cdot s + k_{iq}}{L\cdot s^2 + (R + k_{pq})\cdot s + k_{iq}} \quad (10)$$

$$G_d(s) = \frac{I_d(s)}{I_d^*(s)} = \frac{k_{pd}\cdot s + k_{id}}{L\cdot s^2 + (R + k_{pd})\cdot s + k_{id}} \quad (11)$$

$G_d(s)$ 和 $G_q(s)$ 是二階系統，所以指定定特徵方程式的阻尼係數 $s$ 及自然頻率 $\mu_n$，其控制增益值為：

$$k_{pq} = k_{pd} = L\cdot 2s\mu_n - R \quad (12)$$

$$k_{iq} = k_{id} = L\mu_n^2 \quad (13)$$

### 3.3 降階模型的推導

降階模型是利用奇點干擾法（singular perturbation）及小型馬達電氣系統反應遠比機械系統快。為了推導出線型馬達的降階模型，首先將整個系統改寫成下列形式：

$$\begin{Bmatrix} \& \\ \mu\& \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu \\ (kNi_q - \overline{B}\mu - B_0 - F_c\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN¯))/m \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \&_d \\ \&_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_e & N\mu \\ -N\mu & -1/T_e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_d \\ i_q \end{Bmatrix} + \frac{1}{L}\begin{Bmatrix} V_d \\ V_q - kN\mu \end{Bmatrix} \quad (15)$$

其中 $T_e = L/R$ 是電氣系統的時間常數。相對於電氣系統的時間常數 $T_e$，機械系統的時間常數 $\overline{B}/m$ 明顯比較大。因此可以令一個小的常數 $£ = T_e > 0$，可以將(15)改寫成：

$$£\begin{Bmatrix} \&_d \\ \&_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T_eN\mu \\ -T_eN\mu & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_d \\ i_q \end{Bmatrix} + \frac{1}{R}\begin{Bmatrix} V_d \\ V_q - kN\mu \end{Bmatrix} \quad (16)$$

上式的特徵根為 $-1/T_e \pm jN\mu$，所以這個子系統

是穩定的。當 $T_e \to 0$，即 $£ \to 0$ 時，在每一個瞬間對機械系統而言，電氣系統可以視為達到準穩態值 (quasi-steady-state value)。所以令 $£ = 0$ 代入(29)可得：

$$\begin{Bmatrix}\bar{i}_d \\ \bar{i}_q\end{Bmatrix} = \frac{1}{DL}\begin{Bmatrix}\left(V_q - kN\mu\right)N\mu + V_d / T_e \\ -\left(V_d + k / T_e\right)N\mu + V_q / T_e\end{Bmatrix} \quad (17)$$

其中 $D = N^2\mu^2 + 1/T_e^2$，$\bar{i}_d$ 和 $\bar{i}_q$ 分別是 $i_d$ 和 $i_q$ 的準穩態值。將(17)中的 $i_q$ 用 $\bar{i}_q$ 取代，就可得到馬達的降階模型如下：

$$\begin{Bmatrix}\bar{\&} \\ \mu\&\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mu \\ \frac{kN}{m}\bar{i}_q - \frac{\bar{B}}{m}\mu - \frac{B_0}{m} - \frac{F_c}{m}\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN\bar{\ })\end{Bmatrix} \quad (18)$$

### 3.4 降階模型控制器的設計

令 $e_- = \bar{\ } - \bar{\ }^*$ 和 $e_\mu = \mu - \mu^*$，其中 $\bar{\ }^*$ 和 $\mu^*$ 分別為位置命令和速度命令。令 $\bar{i}_d^*$ 為命令的 d 軸電流值，則可由(17)得到穩態下 $V_d$ 和 $V_q$ 的關係：

$$V_d = T_e\left(DL\bar{i}_d^* + N\mu(kN\mu - V_q)\right) \quad (19)$$

將(19)代入(20)式可以得到穩態下的 $\bar{i}_q$，再將 $\bar{i}_q$ 代入(18)的降階模型中可得：

$$V_q = \frac{mR}{kN}\mu\& + \left[\frac{\bar{B}R}{kN} + N\left(L\bar{i}_d^* + k\right)\right]\mu + u$$

$$u = \frac{B_0 R}{kN} + \frac{F_c R}{kN}\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN\bar{\ }) \quad (20)$$

從上式可以設計一個回饋線性化的控制器如下：

$$V_q = \frac{mR}{kN}\left(\mu\&^* - f\right) + \left[\frac{\bar{B}R}{kN} + N\left(L\bar{i}_d^* + k\right)\right]\mu + u$$

$$u = \frac{B_0 R}{kN} + \frac{F_c R}{kN}\sum_{j=1}^{4} a_j \sin(jN\bar{\ }) \quad (21)$$

其中 $f = ª_\mu e_\mu + ª_- e_- + ª_{--} e_{--}$，$e_{--} = \int e_- dt$。

$ª_\mu$，$ª_-$，$ª_{--}$ 為控制的增益值。

將控制律代入（33）式可得到

$$\begin{cases}\&_{-} = e_- \\ \& = e_\mu \\ \&_\mu = -f\end{cases} \quad (22)$$

指定方程式的特徵根為 $-±_a$、$-±_b$、$-±_c$，其中 $±_a > 0$、$±_b > 0$、$±_c > 0$，則此系統有全域指數形式的穩定性（globally exponentially stable)。此時控制器的增益值為：

$$ª_\mu = ±_a + ±_b + ±_c \quad (36)$$

$$ª_- = ±_a±_b + ±_b±_c + ±_c±_a \quad (37)$$

$$ª_{--} = ±_a±_b±_c \quad (38)$$

## 四、結果與討論

1. 馬達模型的印證

使用 Matlab 模擬時，考慮 PWM 輸出的延遲與輸出的量化誤差，及光學尺回饋的位置量化誤差，及使用 30V 的直流電壓。由馬達模型模擬結果及實驗的結果，我們可從 $i_q$ 的響應，發現有阻尼力的模型才能和實驗結果相符合。

2. 全階模型控制器的模擬與實驗結果

使用全階模型的 PI 電流控制器及 PID 位置控制器時，當電流迴路的取樣頻率為 20KHz，機械迴路的取樣頻率為 6.67KHz，馬達速度可以達到$1m/s$，零速時位置誤差在$\pm 1«m$。從模擬結果發現，要提高馬達的操作速度必須要針對輸出的電壓向量做補償，而且速度愈高則要做的補償角度愈大。這個原因是因為速度愈高，每個機械週期的時間就愈短，相對的機械部分所計算出的 $i_q$ 電流命令值更新不夠快，會造成電流迴路電壓向量輸出的誤差。而受限於電氣部分的取樣頻率和機械部分的取樣頻率無法拉得太接近，所以必須作適當的補償才可提高馬達的操作速度。在實驗方面，發現速度接近 $1m/s$ 時會發生電壓飽和，必須加上過調變策略，使得電壓不會超過可輸出的最大電壓值。

3. 降階模型控制器的模擬與實驗結果

模擬和實驗時所使用的取樣頻率皆為 15KHz，直流電壓為 30V。從模擬和實驗結果，降階模型控制器所須要補償的電壓向量角度遠比全階模型控制器小，也容易達成控制目標。當發生電壓飽和時，改變 $i_d$ 的命令值，可以達到弱激磁的作用。由實驗的結果，馬達速度可達$1m/s$，零速時位置誤差在$\pm 1«m$。而且當電壓發生飽和時，$i_d$ 電流值自動變成負值，表示有發生弱激磁的作用。

4. 因為數位可程式計數器的最大頻率為 12.5MHz，所以產生的 PWM 的頻率與解析度受到限制，如果使用 FPGA 等方式可以達到較高的 PWM 解析度。

## 五、計畫成果自評

本文藉由修正馬達模型，提高取樣頻率及使用適當的控制律，可以達到線型馬達的高速伺服控制，如此有助於馬達運用在高速定位的情況下。

## 六、參考文獻


[1] 丁錦賢，*線型步進馬達之伺服控制*，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，民國八十八年。

[2] M. Sanada, S. Morimoto, and Y. Takeda, "Vibration Suppression for Linear Pulse Motor," *Conference Record of the 1994 Industry Applications conference Twenty-Ninth IAS Annual Meeting*, vol. 1, pp. 517 - 522, 1994.

[3] A. Viorel, Z. Kovacs, L. Szabo, "Sawyer Type Linear Dynamic Modeling," *Proceedings of International Conference on electrical Machines*, vol. 2, pp. 697–701, 1992.

[4] T. Yokozuka, and E. Baba, "Force-Displacement Characteristics of Linear Stepping motor," *Proceedings-B of IEE*, vol. 139, No. 1, pp. 37-43, 1992.

[5] S. Ellerthorpe and J. Blaney, " Linear Step motor Models Allow Force Calculation–Part 1: Air Bearing Model," *Power Conversion & Intelligent Motion*, vol. 24, No. 5, pp. 44-48, 1998.

[6] D. Chen, B. Paden, "Nonlinear Adaptive Torque-Ripple Cancellation for Step Motors," *Decision and Control Proceeding of 29th IEEE Conference*, vol. 6, pp. 3391-3324, 1990.

[7] J. Tasker, T. Collyer, and A. Wearing, "Cogging Torques," *Conference of MD97*,1997.

[8] J. Chen, and K. Chin, "Reduced-Order Control of Permanent Magnet Synchronous Motors," *IECON*, vol.3, pp. 1361-1366, 1999.

[9] J. Chen, and K. Chin, "Automatic Flux-Weakening Control of Permanent Magnet Synchronous Motors using a Reduced-Order Controller," *IEEE Power electronics*, to be published, 2000.

[10] R. B. Sepe and J. H. Lang, "Real-Time Adaptive Control of the Permanent-Magnet Synchronous Motor." *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 27, No. 4, pp. 706-714, 1991.