

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告
 期中進度報告

飛彈攔截系統之設計及性能評估

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2221-E-009-046-MY3

執行期間：97年8月1日至100年7月31日

執行機構及系所：國立交通大學電機工程系

計畫主持人：林清安

共同主持人：

計畫參與人員：何威德、林世修、邱泰偉

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本計畫除繳交成果報告外，另須繳交以下出國心得報告：

- 赴國外出差或研習心得報告
- 赴大陸地區出差或研習心得報告
- 出席國際學術會議心得報告
- 國際合作研究計畫國外研究報告

處理方式：除列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

- 涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

中華民國 100 年 10 月 26 日

摘要

本研究探討飛彈防禦系統之設計模擬及性能評估。所採用的防禦飛彈為兩節火箭推進和一個動能彈頭。彈頭配備紅外線尋標器及開關式推力器作為轉向及姿態控制之用。研究提出(一)中途導引律及相對的推力向量控制系統設計，(二)終端導引律及相對的轉向及姿態控制系統設計。中途導引律使用誤差修正法計算剩餘飛行時間和預估攔截點；推力向量控制系統採用角度及角速度回授。模擬結果顯示所設計之中途導引控制系統能有效降低零力誤失距離至數百公尺之內。終端導引採用真比例導引律，轉向控制指令以脈衝寬度調變合成。姿態控制系統以簡單雙積分作簡化設計也以脈衝寬度調變合成。模擬結果顯示彈頭能以直接命中方式(誤失距離小於 10 公分)攔截目標。全程的攔截模擬驗證均利用所發展的設計方法及六自由度模擬程式可作為進一步探討飛彈防禦系統之參考。

Abstract

This research investigates the design of missile defense system and its performance evaluation through simulations. The missile interceptor consists of two rocket propulsion stages together with a kinetic kill vehicle. The kill vehicle is equipped with an infrared seeker and a number of on-off type thrusters for divert and attitude control. The research proposes: (i) a design of mid-course guidance law and its associated thrust vector control system, (ii) a design of terminal guidance law and its associated divert and attitude control system. The proposed mid-course guidance law computes time-to-go and predicted interception point using error correction method. The thrust vector control system employs linear angle and rate feedback. Simulation results show that the guidance control system is very effective in reducing the zero-effort miss distance at the terminal phase. True proportional navigation is proposed as the terminal guidance law and the associated divert control is implemented using pulse width modulation (PWM) to accommodate the on-off thrusters. The attitude control system, also implemented via PWM, uses linear feedback and is designed using simplified double integrator model. Simulation results show that the guided kill vehicle is able to successfully intercept coming targets through direct hit. The verification of the interception is conducted through complete six degree-of-freedom simulations. The models, design methods, and the simulation program developed in this research should provide a valuable reference for future investigation in missile defense system design.

目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	III
第一章、緒論.....	1
第二章、飛彈攔截系統.....	4
2.1 攔截飛彈結構及其推力物性.....	4
2.2 致動器及其動態模式.....	4
2.3 目標模式.....	8
第三章、運動方程式.....	10
3.1 座標系統.....	10
3.2 座標轉換.....	11
3.3 飛彈六自由度運動方程式.....	12
3.4 目標運動方程式.....	14
第四章、中途導引與控制.....	15
4.1 三維飛彈攔截模型.....	15
4.2 誤差修正法.....	16
4.3 誤差修正法的使用步驟.....	17
4.4 估計飛彈速度對時間函數.....	19
4.5 預測攔截點(Predicted Interception Point).....	20
4.6 中途導引律.....	20
4.7 估計零力誤失(Zero Effort Miss).....	24
4.8 推力向量控制系統設計.....	26
第五章、終端導引及控制.....	33
5.1 真比例導引律.....	33
5.2 姿態控制系統設計.....	36
5.3 脈衝寬度調變合成.....	38
第六章、模擬程式說明.....	47
6.1 Simulink 模擬程式子系統方塊圖架構.....	47
6.2 子系統的輸入輸出及參數.....	48
6.3 氣動模式 (AERO).....	52
6.4 大氣重力(ATMO).....	54
第七章、模擬結果.....	56
第八章、結論及討論.....	64
參考文獻.....	65

第一章、緒論

隨著中共厲行軍事現代化發展策略，國防預算年年增加，主要發展任務之一為衛星導航，此可提升導彈的準確性及殺傷力，根據 2008 年中共軍力報告書[14]指出，迄 2007 年 11 月止，中共已部署 990~1070 枚 CSS-6(M9，東風 15)和 CSS-7(M11，東風 11)短程彈道飛彈對準台灣，且以每年 100 枚以上的速度持續增加。以 M9(東風 15)[15]為例，它是一種機動發射的短程彈道飛彈，射程可達 600 公里，採用慣性加 GPS 輔助，圓周誤差率(Circular Error Probability，CEP)為 300 公尺，也就是飛彈有 50% 以上的機率會命中以目標為圓心半徑 300 公尺的範圍內。飛行高度在大氣層下，抵達目標上空後，彈體近垂直下降，速度可達五馬赫，從發射後飛到台灣只需 5-10 分鐘，顯示台灣受到中共嚴重的飛彈威脅，而目前台灣僅有愛國者飛彈二型(PC-2)、天弓飛彈和鷹式飛彈等，仍然不夠，所以發展攔截飛彈系統有其必要性。

美國從 1992 年開始發展的戰區高空防禦計畫(Theater High Altitude Air Defense，THAAD)一直到現今布希政府的國家飛彈防禦計畫(National Missile Defense，NMD)，目前比較有成果的是標準飛彈三型(Standard Missile 3，SM-3)[16]的研發。從 2002 年 1 月標準飛彈三型(RIM-161A)，也就是 SM-3 Block 2004(又稱 SM-3 Block 1A)第一次試射成功以輕量外大氣層攔截器(Lightweight Exo-Atmospheric Projectile，LEAP)戰鬥部攔截到一枚白羊座彈道導彈，到 2008 年 2 月 14 日以改良的標準飛彈三型成功攔截到故障的間諜衛星[17]，顯示出標準飛彈三型的技術逐漸成熟，足以以動能攔截器代替傳統高爆彈頭的攔截成果。

整個攔截過程分成三個階段：(一)發射開始上升至外太空的助升階段，(二)外太空飛行的中途導引階段，(三)尋標器鎖定目標至攔截的終端導引階段。整個攔截過程中結合了雷達的偵測、戰鬥指揮系統和攔截飛彈本身，由於要攔截的目標為彈道飛彈，體積小且速度快，加上可能會有誤導的誘餌，增加攔截困難度，所以對於雷達、紅外線尋標器、導引律以及控制系統的規格與準確度要求相對提

高。

本研究主要討論的範圍在中途導引及終端導引階段。中途導引階段是從第二節火箭燃料開始燃燒到第三節攔截器鎖定之前。中途導引律的計算先算出飛彈的剩餘飛行時間，剩餘飛行時間的計算採用誤差修正的方法，此方法參考文獻[8]再做一些修改，這種方法能節省運算量並且容易實現，不過此方法需要先知道飛彈任何時間的速度，因此我們參考[18]做飛彈速度預測和修正。再來利用剩餘飛行時間估計攔截點(predicted interception point, PIP)座標，接著算出飛彈在剩餘飛行時間內飛向預測攔截點所需的速度改變和引擎推力的方向，計算需要的速度改變是參考文獻[19]的導引律做修改。透過姿態控制和推力向量控制系統來達到所需的速度改變使得飛彈在中途導引結束後的估計零力誤失[9]為第三階段攔截器的能力範圍內，文獻[9]介紹零力誤失中途導引律(Zero Effort Miss Guidance Law)有計算任何時間零力誤失的方法。減少導引結束後 ZEM 的大小值是中途導引主要的目的。在終端階段攔截飛彈的紅外線尋標器必須一直鎖定目標，所以真比例導引律為最恰當的選擇。我們假設攔截飛彈的姿態已受控制為一直對準目標的方向，推導三維真比例導引律的公式，並模擬分析系統參數如雷達量測誤差大小、紅外線尋標器的鎖定距離及飛行控制系統頻寬等對攔截效能的影響。對於攔截飛彈的轉向與姿態控制系統，我們以開關式推力器為致動器去實現。轉向控制系統是以脈衝寬度調變的方式來達到導引加速度的需求。姿態控制系統則是為維持三軸穩定並使紅外線尋標器能一直鎖定目標，以線性化的模式進行線性設計，採姿態角及角速度回授，並以脈衝寬度調變的方式合成。根據模擬的結果，我們探討質心偏移及開關式脈衝寬度調變推力器的開關頻率對攔截效能的影響。

本報告第二章介紹攔截飛彈的結構及推力物性，說明所採用的致動模式。第三章介紹六自由度的運動方程式，包括所採用的座標系統及座標之間的轉換。第四章討論中途導引律及相關的推力向量控制，包括如何計算剩餘飛行時間，預估攔截點，以及二階推力向量控制系統的設計。第五章討論終端導引及控制，包括三維真比例導引律的推導，姿態控制系統的設計以及脈衝寬度調變的合成。第六

章說明以 Matlab/Simulink 建立的模擬之程式的說明。第七章為主要的模擬結果。
第八章為結論及對後續研究的一些討論。

第二章、飛彈攔截系統

本章討論飛彈攔截系統的結構物性及其數學模式的建立。飛彈攔截系統包含兩節推力火箭及一個動態攔截器。推力火箭具推力向量控制能力而攔截器配備有開關式推力器作為姿態控制之用。

2.1 攔截飛彈結構及其推力物性

攔截飛彈可分為三個階段：第一階段為發射用火箭推進器、第二階段為有向量推力控制系統的火箭推進器、第三階段為開關式推力器的攔截器。推力火箭及攔截器的物性均參考標準三型飛彈。

第一節火箭燃燒時間為 16 秒，總推力面積均為 1.9×10^5 (kgf-sec)。第二節火箭燃燒時間為 36 秒，總推力面積為 1.0×10^5 (kgf-sec)。攔截飛彈總質量約為 1.6×10^3 kg，其中燃料約佔 1.2×10^3 kg。

2.2 致動器及其動態模式

第二節火箭之推力可作二自由度的方向改變，及所謂推力向量，如圖 2.1，推進器產生的作用力為 \vec{F}_T ，噴嘴可以在體座標 Y_B 方向和 Z_B 方向做正負 5 度以內的轉動。

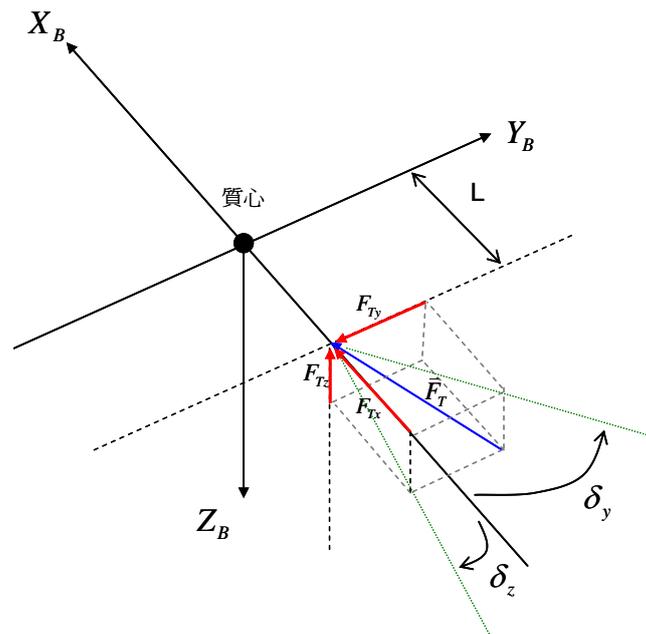


圖 2.1 推力向量控制系統(TVC system)

如圖 2.1，體座標的原點為飛彈的質心位置， L 為推進器跟質心在 X_B 方向上的距離， \vec{F}_T 為推進器產生的推力向量， (F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}) 為推力在體座標下的三個分量， δ_y 為 \vec{F}_T 在 $X_B - Y_B$ 平面上的投影向量與 X_B 軸的夾角， δ_z 為 \vec{F}_T 在 $X_B - Z_B$ 平面上的投影向量與 X_B 軸的夾角。

我們先推導飛彈所受的引擎推力。由圖 2.3 可知

$$\tan \delta_y = \frac{-F_{Ty}}{F_{Tx}}, \quad \tan \delta_z = \frac{-F_{Tz}}{F_{Tx}} \quad (2.1)$$

$$|\vec{F}_T|^2 = F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2 + F_{Tz}^2 \quad (2.2)$$

將(2.1)代入(2.2)經過整理可得

$$|\vec{F}_T| = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Tx}^2 \tan^2 \delta_y + F_{Tx}^2 \tan^2 \delta_z} = F_{Tx} \sqrt{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z} \quad (2.3)$$

$$F_{Tx} = |\vec{F}_T| \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}} \quad (2.4)$$

將(2.4)代入(2.1)可得推力的另外兩個分量 F_{Ty}, F_{Tz}

$$F_{Ty} = -|\vec{F}_T| \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}} \tan \delta_y \quad (2.5)$$

$$F_{Tz} = -|\vec{F}_T| \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}} \tan \delta_z \quad (2.6)$$

令 $\Delta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}}$ ，則

$$\begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{F}_T| & 0 & 0 \\ 0 & -|\vec{F}_T| & 0 \\ 0 & 0 & -|\vec{F}_T| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \tan \delta_y \\ \Delta \tan \delta_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

接著推導飛彈所受的引擎力矩。假設推力的施力點在 X_B 軸上，則由圖 2.1 可以看出

$$M_{Tx} = 0 \quad (2.8)$$

$$M_{Ty} = F_{Tz} \times L = -|\vec{F}_T| L \Delta \tan \delta_z \quad (2.9)$$

$$M_{Tz} = -F_{Ty} \times L = |\vec{F}_T| L \Delta \tan \delta_y \quad (2.10)$$

經過整理可以得到

$$\begin{bmatrix} M_{Tx} \\ M_{Ty} \\ M_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\vec{F}_T| L \\ 0 & |\vec{F}_T| L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \tan \delta_y \\ \Delta \tan \delta_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

我們假設動能攔截器的構造是一長度為 L_1 ，半徑為 R 的圓柱體，配置四個轉向推力器及六個姿態推力器，如圖 2.2 所示，兩種推力器皆為開關式。

四個轉向推力器的配置如圖 2.3 所示，其推力作用於攔截器的幾何中心 (g.c.)，分別在 Y_B 及 Z_B 的方向上產生推力，提供攔截器的平移的加速度。

$f_{DA1}, f_{DA2}, f_{DB1}, f_{DB2} \geq 0$ 為轉向推力器 DA1、DA2、DB1 及 DB2 所產生的推力。

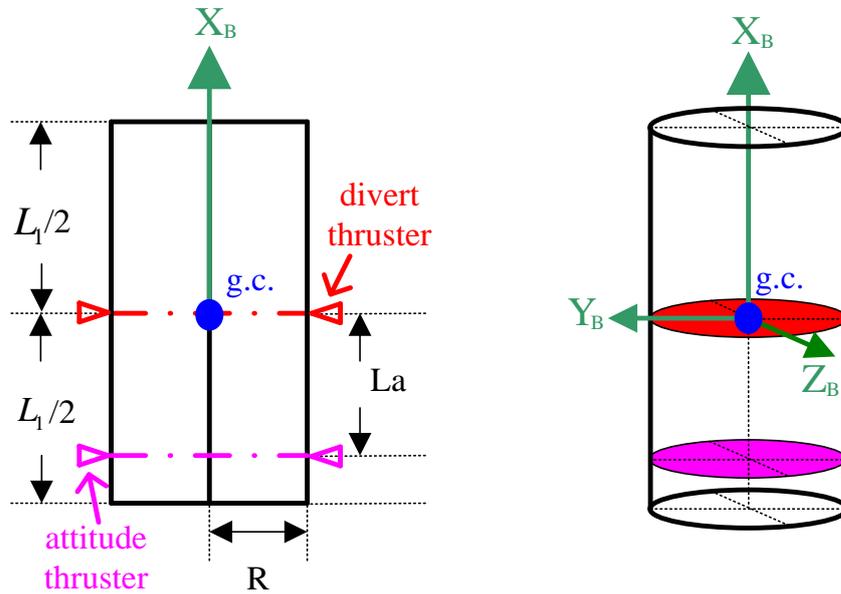


圖 2.2 攔截器構造示意圖

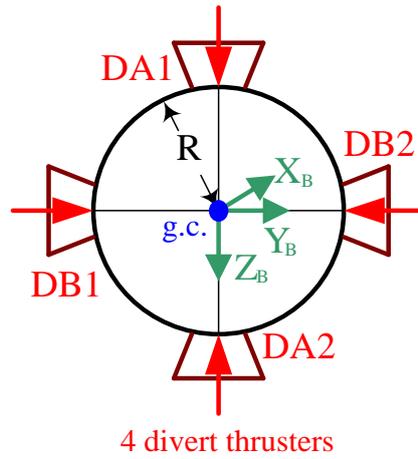


圖 2.3 轉向推力器示意圖

六個姿態推力器的配置如圖 2.4 所示，其中推力器 AA1，AA2 提供俯仰的力矩，而推力器 AB1—AB4 共同提供偏航及滾轉的力矩。各個姿態推力器所產生的推力分別為 $f_{AA1}, f_{AA2}, f_{AB1}, f_{AB2}, f_{AC1}, f_{AC2}, f_{AC3}, f_{AC4} \geq 0$ 。

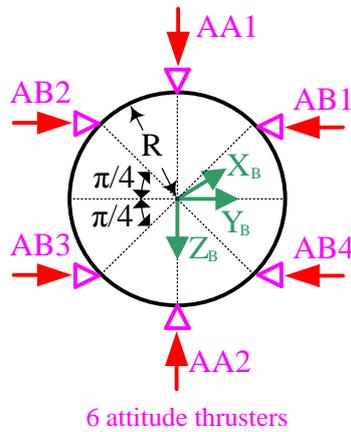


圖 2.4 六個姿態推力器示意圖

攔截飛彈上的推力總和為

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_{divert} + \mathbf{F}_{attitude} \quad (2.12)$$

其中轉向及姿態的推力分別為

$$\mathbf{F}_{divert} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{DB1} - f_{DB2} \\ f_{DA1} - f_{DA2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{attitude} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_{AB1} + f_{AB2} + f_{AB3} - f_{AB4} \\ f_{AA1} - f_{AA2} \end{bmatrix}$$

若 m 為攔截飛彈的質量，由推力器所產生的攔截器加速度為

$$a_f = \frac{F_T}{m}$$

六個姿態推力器產生的力矩分別為

$$\begin{aligned} M_{Tx} &= \frac{R}{\sqrt{2}} \times (-f_{AB1} + f_{AB2} - f_{AB3} + f_{AB4}) \\ M_{Ty} &= La \times (f_{AA1} - f_{AA2}) \\ M_{Tz} &= La \times (f_{AB1} - f_{AB2} - f_{AB3} + f_{AB4}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 R 為攔截器的半徑， La 為攔截飛彈圓柱體幾何中心到姿態推力器作用平面的距離。假設幾何中心即為質量中心，則轉向推力器所產生的力矩為零。

2.3 目標模式

我們假設目標只受重力和空氣阻力作用。空氣阻力定義為

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 S_{ref} C_D = QS_{ref} C_D \quad (2.14)$$

其中 F_D 為空氣阻力，作用在速度的相反方向， ρ 為物體當時所在的空氣密度， v 為物體當時的速度， S_{ref} 為參考面積， C_D 為空氣阻力係數， $Q = \frac{1}{2} \rho v^2$ 為動壓。

定義目標受空氣阻力產生的加速度為 A_D

$$A_D = \frac{QS_{ref} C_D}{m} \quad (2.15)$$

其中 m 為目標質量。令目標彈道阻力係數為 β [8]

$$\beta = \frac{mg}{S_{ref} C_D} \quad (2.16)$$

β 的單位為 kgf/m^2 ，通常目標速度越大則彈道阻力係數越大。將(2.16)式代入(2.15)

式可得到目標阻力加速度與目標阻力係數之關係為

$$A_D = \frac{QS_{ref} C_D}{m} = Qg \frac{QS_{ref} C_D}{mg} = \frac{Qg}{\beta} \quad (2.17)$$

如果知道 β 值，要計算 A_D 就不必知道目標的空氣阻力係數 C_D 及其他物性。目標所受到的阻力加速度在地面座標下的三個分量為

$$\begin{aligned} A_{Dx} &= -\frac{\rho_t v_t^2}{2\beta} g \cos(\gamma) \cos(\varphi) \\ A_{Dy} &= -\frac{\rho_t v_t^2}{2\beta} g \cos(\gamma) \sin(\varphi) \\ A_{Dz} &= \frac{\rho_t v_t^2}{2\beta} g \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中 ρ_t 為目標所在高度的空氣密度 (kg/m^3)， v_t 為目標速度(m/s)，而目標速度的彈道傾角(垂直飛行路徑角) γ ，彈道偏角(水平飛行路徑角) φ 分別定義如下：

$$\begin{aligned} \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{-v_{tz}}{\sqrt{v_{tx}^2 + v_{ty}^2}} \right) \\ \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{v_{ty}}{v_{tx}} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 v_{tx} 、 v_{ty} 、 v_{tz} 分別為目標速度在地面座標下的三個分量。

典型目標的彈道係數[3]為馬赫數的函數，如M族飛彈可用(2.20)式表示

$$\beta = \max(0, 1.3 \text{ Mach}^4) \quad (2.20)$$

其中 *Mach* 為目標的馬赫數。目標所受的總加速度可寫為

$$\begin{bmatrix} a_{tx} \\ a_{ty} \\ a_{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{Dx} \\ A_{Dy} \\ A_{Dz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{tz} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

其中 g_{tz} 為目標的重力加速度。

第三章、運動方程式

飛彈在空間中的運動可分為平移部份與轉動部份，各為三個自由度的運動，因此整個三維空間中飛彈為六個自由度的運動。此外要在三度空間中描述飛彈動態就必須要定義所需的座標系統，以下我們介紹所需的兩個座標系統及各系統間的相互關係。

3.1 座標系統

地面座標 S_N (North-East-Down coordinate)

地面座標 S_N (NED 座標系) 的原點為地表的雷達站，為固定不動的座標， X_N 軸指向地表平面的北方， Y_N 軸指向地表平面的東方， Z_N 軸滿足右手定則。如圖 3.1，假設飛彈在 S_N 座標的位置為 $\vec{r}_m = [x_N \ y_N \ z_N]^T$ ，則 x_N 表示飛彈在雷達站北方的距離， y_N 表示飛彈在雷達站東方的距離， $-z_N$ 表示飛彈的高度。

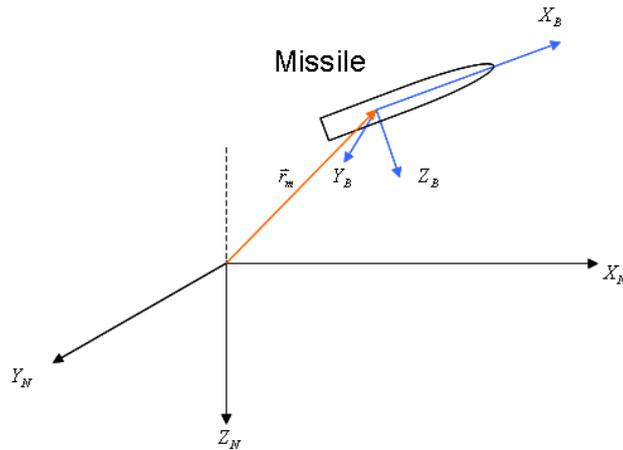


圖 3.1 地面座標與體座標示意圖

體座標 S_B (Body coordinate)

體座標用來表示飛彈本身的姿態變化，為一個動座標系，其原點為飛彈的質心位置， X_B 為飛彈的長軸方向，指向前方， Y_B 垂直 X_B 指向飛彈右邊， Z_B 則垂直於 $X_B - Y_B$ 平面，指向飛彈下方，三軸互相垂直且滿足右手定則，如圖 3.1 所示。

3.2 座標轉換

為了描述飛彈的動態，我們推導地面座標與體座標之間的轉換，由地面座標經過三個角度的旋轉得到飛彈的體座標，這種有次序的角度旋轉稱為尤拉角 (Euler Angle)，通常用來描述一剛體的方位。首先將體座標和地面座標的原點重合起來，再經過以下有順序的三個旋轉，我們就可以將地面座標旋轉到體座標，如圖 3.2 所示：

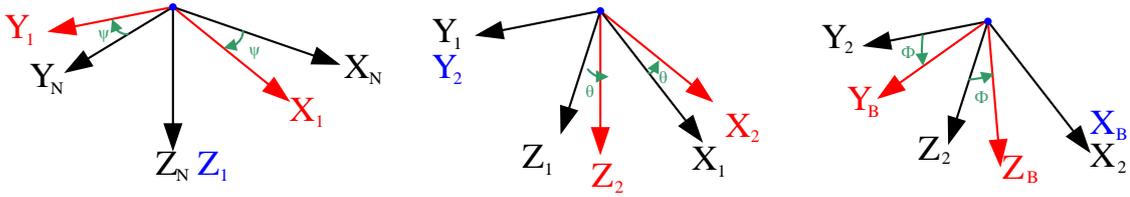


圖 3.2 地面座標與飛彈體座標轉換

1. 固定地面座標的 Z_N 軸旋轉 ψ 角，直到 X_N 與 X_1 重合，得到新的三軸為

(X_1, Y_1, Z_1) ，其中 $Z_1 = Z_N$ 。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = T_1 \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

2. 在固定 Y_1 旋轉 θ 角，直到 X_1 與 X_B 重合 (X_B 也就是 X_2)，得到新的三軸為

(X_2, Y_2, Z_2) ，其中 $Y_2 = Y_1$ 。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = T_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3. 最後固定 X_2 旋轉 ϕ 角，直到 Y_2 與 Y_B 重合、 Z_2 與 Z_B 重合，得到體座標為

(X_B, Y_B, Z_B) ，其中 $X_B = X_2$ 。

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_3 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

結合以上(3.1)~(3.3)式，我們可以得到 S_N 座標與 S_B 座標的轉換為

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = T_3 T_2 T_1 \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = T_{BN} \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix}$$

$$T_{BN} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \sin \psi \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

若是要計算從體座標轉換到地面座標的轉換矩陣則為

$$T_{NB} = (T_{BN})^T \quad (3.5)$$

其中 $(T_{BN})^T$ 為 T_{BN} 的轉置矩陣。

3.3 飛彈六自由度運動方程式

尤拉方程式(Euler equation)

我們假設(p,q,r)分別為飛彈在滾轉、俯仰及偏航方向的角速度，配合前一節定義的尤拉角 (ϕ, θ, ψ) ，透過簡單的推導可以得到尤拉角和角速度之間的一階微分方程式，稱為尤拉方程式[4]：

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p - \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \sec \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

四元素(Quaternion)

四元素是另一種可以描述轉動運動及尤拉角變化的方式[5]，若定義了一個有順序的旋轉關係將地面座標轉換到體座標，即可決定四元素的值 e_0 、 e_1 、 e_2 、 e_3 。在此定義由地面座標轉換到體座標的旋轉順序同 3.2 節，經由上述的轉換次序 $(\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi)$ 可以定義出四元素

$$\begin{aligned}
e_0 &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
e_1 &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
e_2 &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
e_3 &= -\sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

而四元素的值可由下列的動態方程式得到

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

(3.8)即為四元素的微分與角速度的關係式。而尤拉角可以透過四元素計算出來

$$\begin{aligned}
\theta &= \sin^{-1}(e_0 e_2 - e_1 e_3) \\
\psi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(e_1 e_2 + e_0 e_3)}{e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2} \right) \\
\phi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(e_2 e_3 + e_0 e_1)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此我們就能得知各時間飛彈的姿態狀況。

力矩方程式

力矩方程式描述飛彈的角速度與所受力矩的關係在彈體對稱的假設下，方程

式可表示為

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{M_x}{I_{xx}} - \frac{qr}{I_{xx}} (I_{zz} - I_{yy}) = \frac{M_x}{I_{xx}} \\
\dot{q} &= \frac{M_y}{I_{yy}} - \frac{rp}{I_{yy}} (I_{xx} - I_{zz}) \\
\dot{r} &= \frac{M_z}{I_{zz}} - \frac{pq}{I_{zz}} (I_{yy} - I_{xx})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

若圓柱體的半徑為 r ，長度為 L ，質量為 m 且均勻分布，則 $I_{xx} = \frac{mr^2}{2}$ 、

$I_{yy} = I_{zz} = \frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{12}$ ，其中 I_{xx} ， I_{yy} ， I_{zz} 分別為飛彈三軸的轉動慣量， M_x ， M_y ，

M_z 分別為飛彈三軸所受的力矩。

平移方程式

飛彈的平移運動方程式在(慣性)地面座標下是單純的積分關係，即加速度的兩次積分為位置，因此飛彈的平移運動程式可表示為

$$\begin{aligned}\dot{v}_{mx} &= a_{mx} \\ \dot{v}_{my} &= a_{my} \\ \dot{v}_{mz} &= a_{mz}\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= v_{mx} \\ \dot{y}_m &= v_{my} \\ \dot{z}_m &= v_{mz}\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中飛彈在地面座標的加速度分量(a_{mx}, a_{my}, a_{mz})，(v_{mx}, v_{my}, v_{mz})為飛彈在地面座標的速度分量，(x_m, y_m, z_m)為飛彈在地面座標的位置分量。

3.4 目標運動方程式

我們假設目標為點質量，不考慮姿態，只考慮目標在三度空間的平移運動，僅受到重力及空氣阻力的影響，其運動方程式以慣性座標的分量表示為

$$\begin{aligned}\dot{v}_{tx} &= a_{tx} \\ \dot{v}_{ty} &= a_{ty} \\ \dot{v}_{tz} &= a_{tz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= v_{tx} \\ \dot{y}_t &= v_{ty} \\ \dot{z}_t &= v_{tz}\end{aligned}$$

其中(a_{tx}, a_{ty}, a_{tz})為目標在慣性座標的加速度分量，(v_{tx}, v_{ty}, v_{tz})為目標在慣性座標的速度分量，(x_t, y_t, z_t)為目標在慣性座標的位置分量。

第四章、中途導引與控制

本章討論中途導引律及控制系統的設計。中途導引的階段從第二節火箭點火至第三節截殺彈頭鎖定目標為止，其目的是要將飛彈導向攔截路徑，使飛彈進入終端導引階段的零力誤失距離夠小。中途導引律計算飛彈所需的速度改變量，以此決定所需的推力方向進而利用推力向量為制動的控制系統來達成飛行方向的改變。計算預估的剩餘時間和預估的攔截點是導引律的兩個重要的計算。我們的研究提出誤差修正法來做剩餘飛行時間的計算，並據以計算預估攔截點。

4.1 三維飛彈攔截模型

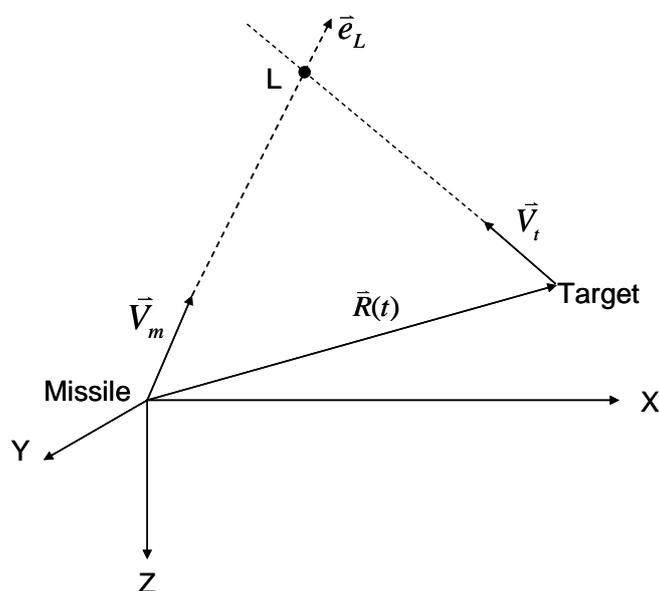


圖 4.1 三維飛彈攔截目標示意圖

考慮一個三維的飛彈攔截目標狀況，如圖 4.1。 \vec{V}_m 為飛彈的速度向量， \vec{V}_t 為目標的速度向量， $\vec{R}(t)$ 為目標相對飛彈的位置向量，L 為預測攔截點， \vec{e}_L 是碰撞路徑方向上的單位向量，(X,Y,Z) 為地面座標系的三個座標軸。 V_m 為飛彈速度大小值，假設飛彈有一已知的時變速度函數 $V_m(t)$ ，而目標的速度 \vec{V}_t 為常數向量。定義飛彈從時間 t_1 到 t_2 速度方向保持不變的直線飛行距離為 $D_m(t_1, t_2)$

$$D_m(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V_m(s) ds \quad (4.1)$$

當飛彈直接對準攔截點 L 而且保持在攔截的直線路徑上，忽略重力和氣動力，並且假設目標為等速度，這時候可以由圖 4.1 看出攔截的條件是

$$D_m(t, t+t_{go})\bar{e}_L(t) = t_{go}\bar{V}_t + \bar{R}(t) \quad (4.2)$$

其中 t_{go} 為剩餘飛行時間，即為現在到攔截所需的飛行時間。我們要把(4.2)式的 t_{go} 和 \bar{e}_L 解出來。為了消去 \bar{e}_L ，對(4.2)等式兩邊向量取長度的平方可得

$$[D_m(t, t+t_{go})]^2 = (t_{go}\bar{V}_t + \bar{R}(t)) \cdot (t_{go}\bar{V}_t + \bar{R}(t)) \quad (4.3)$$

其中 $\bar{x} \cdot \bar{y}$ 表示 \bar{x} 及 \bar{y} 向量的內積。將(4.3)整理後得

$$|\bar{V}_t|^2 t_{go}^2 + 2\bar{V}_t \cdot \bar{R}(t)t_{go} + |\bar{R}(t)|^2 - [D_m(t, t+t_{go})]^2 = 0 \quad (4.4)$$

上式可以利用正割法(secant method)來解出 t_{go} 。正割法屬於一種遞迴求解的方法

[7]。令 $f(x) = |\bar{V}_t|^2 x^2 + 2\bar{V}_t \cdot \bar{R}(t)x + |\bar{R}(t)|^2 - [D_m(t, t+x)]^2 = 0$ 。正割法的遞迴方程式為

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (4.5)$$

需要兩個接近根的初始值 x_0 、 x_1 代入(4.5)。經過反覆的遞迴計算後得到 x_2 ， x_3 ，...。直到接近實際的根為止。雖然正割法可以解出 t_{go} 但是實際上不容易實現，因為我們不知道反覆計算的次數要多少才能得到夠精確的解，而且可能會對於量測到的目標位置和速度很敏感，所以在下一個小節提出另一種簡單的誤差修正法來估計 t_{go} ，不需要在每一個時間點都反覆的計算。

4.2 誤差修正法[8]

此方法是每個取樣時間點利用測量到的資訊做計算後修正 t_{go} ，不需要再反覆的遞迴求出 t_{go} 。令 t_{go} 和 \bar{e}_L 的估計值分別為 \hat{t}_{go} 和 $\hat{\bar{e}}_L$ ，估計的飛彈飛行結束時間為 $\hat{t}_{f,L} = t + \hat{t}_{go}$ 。預估飛行結束時的位置誤差 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 可以(4.6)式表示

$$\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = \bar{R}(t) + \hat{t}_{go} \bar{V}_t - D_m(t, \hat{t}_{f,L}) \hat{e}_L(t) \quad (4.6)$$

把(4.6)對 \hat{t}_{go} 和 \hat{e}_L 取微小變化量得到 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 的相對變化量 $\Delta\bar{E}_L$

$$\Delta\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = (\bar{V}_t - \hat{V}_{m,L} \hat{e}_L) \Delta\hat{t}_{go} - D_m(t, \hat{t}_{f,L}) \Delta\hat{e}_L \quad (4.7)$$

其中 $\hat{V}_{m,L} = V_m(\hat{t}_{f,L})$ ， $\Delta\hat{e}_L$ 是 \hat{e}_L 旋轉產生的變化量，所以 $\Delta\hat{e}_L$ 垂直於 \hat{e}_L 。為了使結束時的誤差 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 減小到零，我們需要找到 $\Delta\hat{t}_{go}$ 和 $\Delta\hat{e}_L$ ，使得

$$\Delta\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = -\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \quad (4.8)$$

把(4.8)代入(4.7)並且等式兩邊同時內積 \hat{e}_L ，經過整理得到

$$\Delta\hat{t}_{go} = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \cdot \hat{e}_L(t)}{\hat{V}_{m,L} - \bar{V}_t \cdot \hat{e}_L(t)} \quad (4.9)$$

把(4.8)代入(4.7)可以得到

$$\Delta\hat{e}_L = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) - (\hat{V}_{m,L} \hat{e}_L(t) - \bar{V}_t) \Delta\hat{t}_{go}}{D_m(t, \hat{t}_{f,L})} \quad (4.10)$$

算出 $\Delta\hat{t}_{go}$ 和 $\Delta\hat{e}_L$ 之後， $\hat{t}_{f,L}$ 和 \hat{e}_L 就可以更新為

$$\begin{aligned} \hat{t}_{f,L} &= \hat{t}_{f,L} + \Delta\hat{t}_{go} \\ \hat{e}_L &= (\hat{e}_L + \Delta\hat{e}_L) / |\hat{e}_L + \Delta\hat{e}_L| \end{aligned} \quad (4.11)$$

有了 \hat{t}_{go} 之後將可以用來計算導引指令(guidance command)。

4.3 誤差修正法的使用步驟

由於誤差修正法在實現上比較可行，對於測量的誤差也較不敏感，所以我們使用此種方法計算剩餘飛行時間。因為飛彈進入第二階段(第一節火箭脫離)的時候才開始有導引控制，所以誤差修正法也是從飛彈進入第二階段開始每隔一個取樣時間 Δt_s 計算出一個 \hat{t}_{go} 。圖 4.2 為誤差修正法的計算流程圖。以下列出此方法的使用步驟：

步驟 A :

第一節火箭脫離的時間為 t_{s1} ，在此時先大略估計

$$\begin{aligned}\hat{t}_{go}(t_{s1}) &= \frac{|\bar{R}(t_{s1})|}{V_c(t_{s1})} \\ \hat{e}_L(t_{s1}) &= \frac{\bar{R}(t_{s1}) + \hat{t}_{go}(t_{s1})\bar{V}_t(t_{s1})}{|\bar{R}(t_{s1}) + \hat{t}_{go}(t_{s1})\bar{V}_t(t_{s1})|}\end{aligned}\quad (4.12)$$

其中 $V_c(t_{s1}) = \frac{(\bar{V}_t(t_{s1}) - \bar{V}_m(t_{s1})) \cdot \bar{R}(t_{s1})}{|\bar{R}(t_{s1})|}$ 為飛彈和目標的接近速率。

步驟 B :

經過一個取樣時間 Δt_s 後，利用上個取樣時間算出的剩餘飛行時間

$\hat{t}_{go}(t - \Delta t_s)$ 和碰撞路徑單位向量 $\hat{e}_L(t - \Delta t_s)$ 計算 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$

$$\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = \bar{R}(t) + \hat{t}_{go}(t - \Delta t_s)\bar{V}_t - D_m(t, \hat{t}_{f,L})\hat{e}_L(t - \Delta t_s), \quad t \geq t_{s1} + \Delta t_s \quad (4.13)$$

計算出 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 之後再依序計算：

$$\Delta \hat{t}_{go}(t) = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \cdot \hat{e}_L(t - \Delta t_s)}{\hat{V}_{m,L} - \bar{V}_t \cdot \hat{e}_L(t - \Delta t_s)}$$

$$\Delta \hat{e}_L(t) = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) - (\hat{V}_{m,L}\hat{e}_L(t - \Delta t_s) - \bar{V}_t)\Delta \hat{t}_{go}(t - \Delta t_s)}{D_m(t, \hat{t}_{f,L})}$$

步驟 C :

更新剩餘飛行時間和碰撞路徑單位向量

$$\hat{t}_{go}(t) = \hat{t}_{go}(t - \Delta t_s) + \Delta \hat{t}_{go}(t)$$

$$\hat{e}_L(t) = \frac{\hat{e}_L(t - \Delta t_s) + \Delta \hat{e}_L(t)}{|\hat{e}_L(t - \Delta t_s) + \Delta \hat{e}_L(t)|}$$

步驟 D :

模擬跑到下個取樣時間時回到步驟 B 的(4.13)式，如圖 4.2 所示。

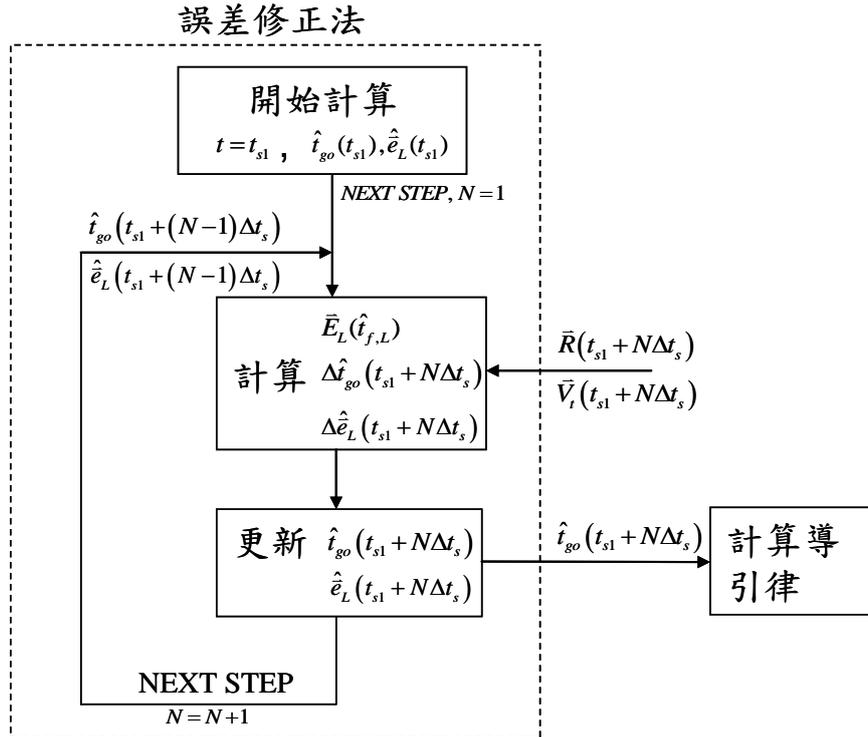


圖 4.2 誤差修正法計算流程圖

4.4 估計飛彈速度對時間函數

由於計算剩餘飛行時間需要先知道飛彈的速度對時間函數，飛彈的速度和作用在飛彈上的所有外力和，包含引擎推力、重力、氣動力，以及飛彈的質量變化有關。由於飛彈和目標均受重力作用所以圖 4.1 中計算剩餘飛行時間並未考慮重力，因此在決定飛彈速度函數時也不考慮重力。為了準確的預估飛彈的速度我們使用查表法。先用程式來模擬一次飛彈從發射到所有燃料耗盡之後的飛行，模擬完之後得到的飛彈速度取樣後用來建立表格，即可得到飛彈速度對時間函數。

不過建立的表格只是一個特定的飛行情況，實際上每種不同的飛行情況都產生不同的速度函數。這會造成估計的速度與實際上的速度有誤差，為了能夠消除誤差，假設實際的飛彈速度和估計值的比值在時間 t 之後為常數，則在任一時間 t 可以定義

$$k(t) \equiv \frac{V_m(t)}{\bar{V}_m(t)} \quad (4.14)$$

其中 $V_m(t)$ 為實際飛彈的速度大小， $\bar{V}_m(t)$ 為表格內的預測速度大小。然後再根據

這個比值 $k(t)$ 修正 t 秒之後表格內的預測飛彈速度

$$\bar{V}_m^{new}(s) = k(t)\bar{V}_m^{old}(s), \quad \text{for } s \geq t \quad (4.15)$$

而計算飛彈從時間 t 到 $t+t_{go}$ 之間的直線飛行距離 $D_m(t, t+t_{go})$ 就是計算 $\bar{V}_m(t)$ 圖形底下的面積再乘上比值 $k(t)$ 。

$$D_m(t, t+t_{go}) = k(t) \int_t^{t+t_{go}} \bar{V}_m(s) ds \quad (4.16)$$

利用(4.15)及(4.16)估算飛彈速度和飛行距離的準確度會隨著時間 t 的增加而提高， t_{go} 的計算也是如此。

4.5 預測攔截點(Predicted Interception Point)

假設目標物只受重力影響，速度和位置可以量測出來，則我們可以估計它接下來的飛行軌跡。為了方便計算假設目標的速度是固定的，並且假設重力是定值，利用前面已經算出的剩餘飛行時間，也就是 t_{go} ，則可以把預測攔截點(以下簡稱 PIP)寫為

$$PIP = \bar{X}_m(t) + \bar{R}(t) + \hat{t}_{go} \bar{V}_t + \frac{1}{2} \bar{G}_t(t) \hat{t}_{go}^2 \quad (4.17)$$

其中 $\bar{X}_m(t)$ 為飛彈位置如圖 4.3 所示， $\bar{G}_t(t)$ 為目標當時的重力加速度。實際上重力會隨著目標的位置改變而改變，目標的速度也不是定值所以這樣的估計並不完全準確，尤其是 \hat{t}_{go} 還很大的時候，不過隨著 \hat{t}_{go} 減小所預測的攔截點就會越準確。

4.6 中途導引律

前一節中我們經由剩餘飛行時間計算出預測攔截點，但在導引命令裡不是直接將飛彈朝著 PIP 飛去。由於 PIP 的計算有考慮目標的重力，但是在攔截的過程中只需考慮飛彈與目標相對重力造成的影響即可。因此定義點 PIPM 為飛彈在中途導引過程中的目的地。

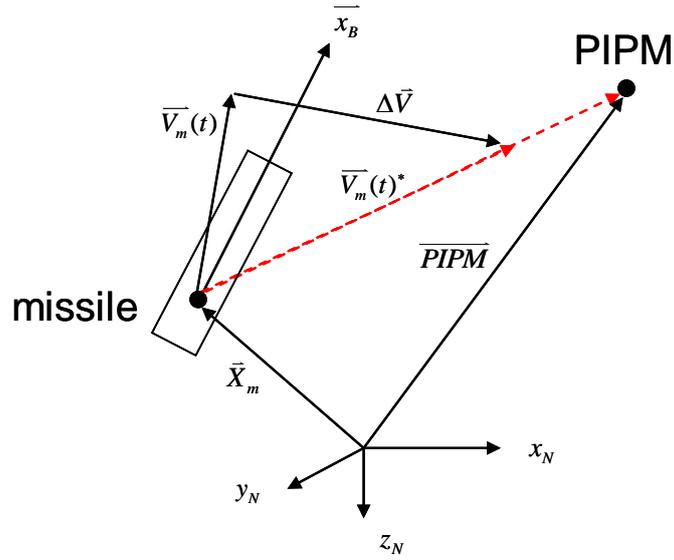


圖 4.3 三維飛彈導引關係圖

如圖 4.3，PIP 為飛彈在中途導引過後需要飛到的目的地。假設目標與飛彈受重力加速度的差值為

$$\bar{G} = \bar{G}_t - \bar{G}_m \quad (4.18)$$

而 \bar{G} 是隨時間變化的函數，在中途導引階段任一時間點算起

$$\bar{G} = \bar{G}_0 \quad (4.19)$$

經過 \hat{t}_{go} 秒後，最終擊中目標時 $\bar{G} = 0$ ，假設 \bar{G} 為線性函數[9]，則

$$\bar{G}(t) = -\frac{\bar{G}_0}{\hat{t}_{go}} t + \bar{G}_0 \quad (4.20)$$

令 $\bar{G}(t)$ 在 \hat{t}_{go} 秒內所產生的相對位移為 \bar{D}_G ，則將 $\bar{G}(t)$ 積分一次得到由 $\bar{G}(t)$ 產生的

相對速度 $\bar{V}_G(t)$ ，再將 $\bar{V}_G(t)$ 積分得到相對位移 \bar{D}_G ：

$$\begin{aligned} \bar{V}_G(t) &= \int_0^t \bar{G}(\tau) d\tau = -\frac{\bar{G}_0}{2\hat{t}_{go}} t^2 + \bar{G}_0 t \\ \bar{D}_G &= \int_0^{\hat{t}_{go}} \bar{V}_G(t) dt = \frac{1}{3} \bar{G}_0 \hat{t}_{go}^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

如此可以計算出 \overline{PIP} 為

$$\overline{PIPM} = \overline{X}_t(t) + \hat{t}_{go} \overline{V}_t + \frac{1}{3} \overline{G}(t) \hat{t}_{go}^2 \quad (4.22)$$

得到 \overline{PIPM} 之後，我們希望能將飛彈的速度在中途導引的過程中控制到 $\overline{PIPM} - \overline{X}_m$ 的方向上。

如圖 4.3。 $\overline{V}_m(t)$ 為飛彈當時的速度向量， \overline{X}_m 為飛彈的位置向量。則依照速度與位置的關係可以得到

$$\overline{PIPM} = \overline{X}_m + \hat{t}_{go} \overline{V}_m(t)^* \quad (4.23)$$

其中 $\overline{V}_m(t)^*$ 是在時間為 t 時到達攔截點所需求的飛彈速度。將(4.23)整理後可得

$$\overline{V}_m(t)^* = \frac{\overline{PIPM} - \overline{X}_m}{\hat{t}_{go}} \quad (4.24)$$

因此在時間為 t 時飛彈所需的的速度改變為

$$\Delta \overline{V} = \overline{V}_m(t)^* - \overline{V}_m(t) \quad (4.25)$$

飛彈所需的的速度改變由引擎提供，而引擎在每個時間點能提供的最大速度改變量會有所不同。隨著燃料的消耗，引擎能提供的最大速度改變量會因為剩餘燃燒時間減小而越來越小。因此我們還需要再計算引擎能提供的最大速度改變量，進而決定引擎的推力方向來達到需求的速度改變 $\Delta \overline{V}$ 。

如圖 4.4， $\Delta \overline{P}$ 為引擎能提供的最大速度改變， \overline{e} 為 $\overline{PIPM} - \overline{X}_m$ 方向的單位向量， h 為常數。由圖可以看出當 $|\Delta \overline{P}| \geq |\Delta \overline{V}|$ 時，並不需要將引擎提供的全部速度改變都放到 $\Delta \overline{V}$ 的方向上，可以用 \overline{e} 向量來做組合使得部份的速度改變是朝著 \overline{e} 而且有等效的速度改變是朝著 $\Delta \overline{V}$ 。

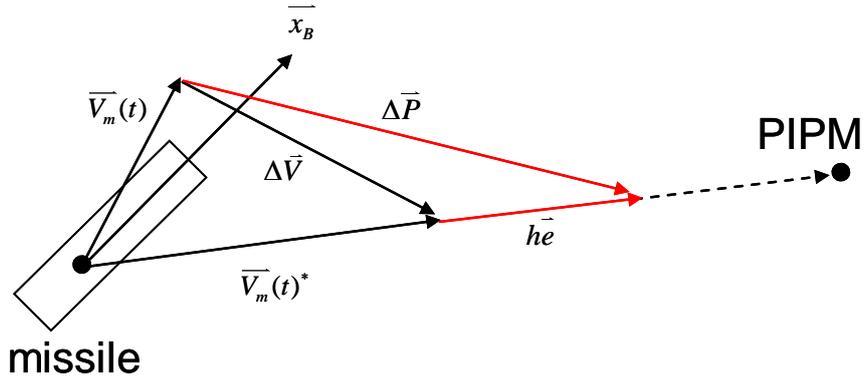


圖 4.4 引擎提供的速度改變與導引命令關係圖

引擎能提供的最大速度改變可簡單寫為

$$\Delta \bar{P} = \frac{\bar{T}}{mass} t_{bo} \quad (4.26)$$

其中 \bar{T} 是飛彈引擎推力向量， $mass$ 是飛彈的質量， t_{bo} 是燃料剩餘的燃燒時間。

根據圖 4.4 的關係可以得

$$\Delta \bar{V} + h\bar{e} = \Delta \bar{P} \quad , \quad |\Delta \bar{P}| \geq |\Delta \bar{V}| \quad , \quad h \geq 0 \quad (4.27)$$

將(4.27)等式左右兩邊同時取向量長度平方可得

$$(\Delta \bar{V} + h\bar{e}) \cdot (\Delta \bar{V} + h\bar{e}) = \Delta \bar{P} \cdot \Delta \bar{P} \quad (4.28)$$

將(4.26)代入(4.28)整理後得

$$h^2 + 2(\Delta \bar{V} \cdot \bar{e})h + \left(|\Delta \bar{V}|^2 - \left(\frac{t_{bo}}{mass} \right)^2 |\bar{T}|^2 \right) = 0 \quad (4.29)$$

(4.29)為一個 h 的二次方程式，解出 h 並取 $h \geq 0$ 代入(4.27)即可得到 $\Delta \bar{P}$ ，再將 $\Delta \bar{P}$

代入(4.26)即可得到 \bar{T} 。 \bar{T} 即為飛彈需要的引擎推力方向，要得到 \bar{T} 方向的推力

向量需要把飛彈的姿態 \bar{x}_B 軸控制到跟 \bar{T} 重合。

整個中途導引階段的導引流程如圖 4.5 所示。我們從剩餘飛行時間而推導出導引定律，計算剩餘飛行時間之前要先建立好飛彈速度對時間的表格，利用誤差

修正法(4.6)、(4.9)、(4.10)來算出需要修正的剩餘飛行時間，每個取樣時間做一次修正。接著透過剩餘飛行時間做攔截點的預測，利用(4.25)、(4.26)、(4.27)算出引擎所需的推力向量。此推力向量就是讓飛彈飛往預測攔截點所需的推力，再來我們需要做的是控制飛彈的姿態使得飛彈的姿態與引擎所需的推力向量重合，如此就可以讓推力向量系統產生我們所需的推力向量，飛彈也就會飛往預測攔截點了。

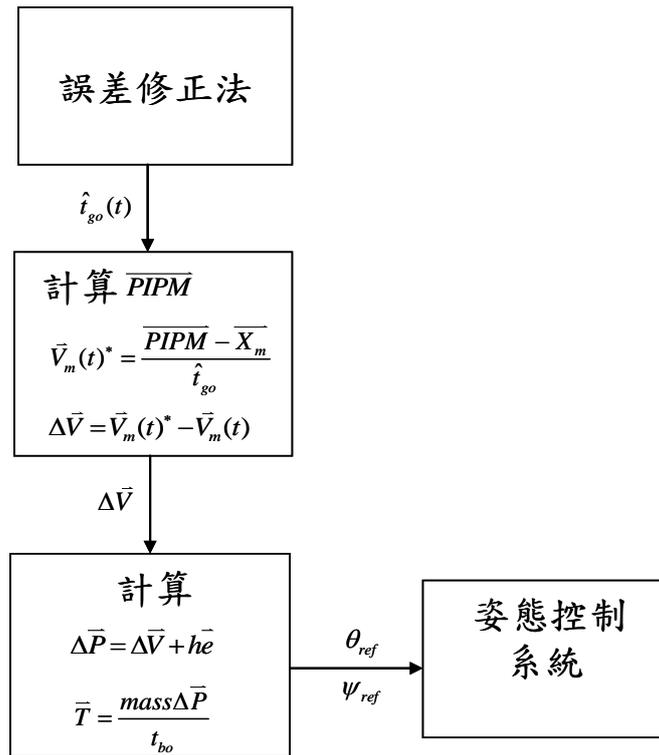


圖 4.5 導引律流程圖

4.7 估計零力誤失(Zero Effort Miss)

飛彈和目標在地面座標下的動態方程式可寫為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{V}}_t &= \bar{G}_t \\ \dot{\bar{V}}_m &= \bar{G}_m + \frac{\bar{T}}{mass}\end{aligned}\quad (4.30)$$

其中 \bar{V}_m 為飛彈的速度向量， \bar{V}_t 為目標的速度向量， \bar{T} 為飛彈的推力向量，mass為飛彈質量。則飛彈和目標相對的動態方程式可表示為

$$\dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}_i - \dot{\vec{V}}_m = \vec{G} - \frac{\vec{T}}{mass} \quad (4.31)$$

其中 $\vec{G} = \vec{G}_i - \vec{G}_m$ 。

定義 \vec{R}_{miss} [9]: 在任一時間點令推力向量 $\vec{T} = 0$ ，此時飛彈和目標都只受重力加速度作用下飛行，最終飛彈與目標的最小相對距離向量為 \vec{R}_{miss} 。

所以 \vec{R}_{miss} 為某個特定的 \vec{R} 且會和 \vec{V} 垂直。 \vec{R} 為飛彈和目標的相對位置向量。

$$\vec{V} \cdot \vec{R} = 0 \quad (4.32)$$

使用一個線性函數來表示 \vec{G}

$$\vec{G}(\tau) = \frac{\vec{G}(t)}{(t_f - t)}(t_f - \tau) = \vec{C}_1(t, t_f)(t_f - \tau) \quad , \quad \tau \geq t \quad (4.32)$$

其中 t 為現在的時間， t_f 為飛彈擊中目標的時間。

(4.32)的線性方程式，在 $\tau = t$ 時 $\vec{G}(\tau) = \vec{G}(t)$ ，在 $\tau = t_f$ 時 $\vec{G}(\tau) = 0$ 。將(4.32)代入

(4.31)且令 $\vec{T} = 0$ 再做積分後可得 $\vec{V}(\tau)$

$$\vec{V}(\tau) = \frac{1}{2} \vec{C}_1(t, t_f) \left[(t_f - t)^2 - (t_f - \tau)^2 \right] + \vec{V}(t) \quad (4.33)$$

將(4.33)再積分一次可得 $\vec{R}(\tau)$

$$\vec{R}(\tau) = \frac{1}{2} \vec{C}_1(t, t_f) \left\{ \frac{1}{3} \left[(t_f - \tau)^3 - (t_f - t)^3 \right] + (t_f - t)^2 (\tau - t) \right\} + \vec{V}(t)(\tau - t) + \vec{R}(t) \quad (4.34)$$

將(4.33)和(4.34)代入(4.32)並且令 $\tau = t_f$ 可得

$$\left[\frac{1}{6} \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_1 \right] (t_f - t)^5 + \left[\frac{5}{6} \vec{C}_1 \cdot \vec{V} \right] (t_f - t)^3 + \left[\frac{1}{2} \vec{C}_1 \cdot \vec{R} \right] (t_f - t)^2 + [\vec{V} \cdot \vec{V}] (t_f - t) + [\vec{V} \cdot \vec{R}] = 0 \quad , \quad t_f \in \mathfrak{R} \quad \text{and} \quad t_f \geq t \quad (4.35)$$

把 t_f 解出來後代入(4.34)就可以算出

$$\bar{R}_{miss}(t) = \frac{1}{3} \bar{C}_1(t, t_f)(t_f - t)^3 + \bar{V}(t)(t_f - t) + \bar{R}(t) \quad (4.36)$$

(4.36)計算出的 $\bar{R}_{miss}(t)$ 即為當時間為 t ，飛彈不受推力作用情況下和目標的最小距離向量。此時ZEM的預測大小值即為 $|\bar{R}_{miss}(t)|$ 。

估計的零力誤失可以讓我們了解在第二節火箭燃料耗盡時飛彈沒有推力與目標物同為自由落體運動，在此情形下最終飛彈與目標的預測最短距離為多少，有沒有在第三節攔截器的能力範圍內，這是判斷中途導引效能的一個重要指標。

4.8 推力向量控制系統設計

在中途導引階段推力向量控制系統負責產生飛彈所需要的速度改變，推力向量控制系統要產生所需的加速度必須要用姿態控制的方式使飛彈的姿態保持穩定且達到我們的需求。本節先將轉動方程式線性化以便做姿態控制，再設計回授控制器加以控制。

線性化轉動方程式

為了控制姿態，必須線性化方程式。假設翻滾角速度 $p \approx 0$ ，飛彈仰角 $\theta \approx 0$ ，翻滾角 $\phi \approx 0$ ，可以線性化(3.6)和(3.18)為

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{M_x}{I_{xx}} \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{I_{yy}} \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{I_{zz}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

則原本非線性方程組可簡化為翻滾角、俯仰角、偏航角三組互相獨立的雙積分線性方程組。

翻滾角控制

根據(4.37)與(4.38)可以畫出系統方塊圖，如圖 4.6。 k_ϕ 和 k_p 為兩個控制增益。我們把翻滾角和翻滾角速度做負回授控制。

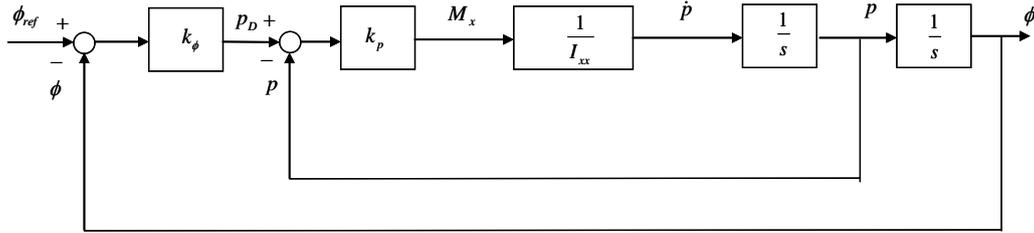


圖 4.6 翻滾角控制迴路

圖 4.6 的整體閉迴路轉移函數為

$$H_\phi = \frac{\phi}{\phi_{ref}} = \frac{k_p k_\phi / I_{xx}}{s^2 + \frac{k_p}{I_{xx}} s + k_p k_\phi / I_{xx}} \quad (4.39)$$

(4.39)是一個標準二階轉移函數，選擇阻尼比 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ，自然頻率 $f = \frac{\omega_n}{2\pi} = 1$

(Hz)。則轉移函數成為

$$H_\phi = \frac{(2\pi)^2}{s^2 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi) s + (2\pi)^2} \cong \frac{50}{s^2 + 10s + 50} \quad (4.40)$$

比較(4.39)和(4.40)的係數後得 $k_p = 10I_{xx}$ ， $k_\phi = 5$ 。

因為翻滾角在中途導引階段希望維持為 0 度所以 $\phi_{ref} = 0$ 。飛彈所需要的 X_B 方向力矩為

$$M_x = \left[(\phi_{ref} - \phi) k_\phi - p \right] k_p = \left[(-\phi) k_\phi - p \right] k_p \quad (4.41)$$

(4.41)裡的 M_x 即為保持翻滾角為零所需的力矩，在中途導引階段我們需要用某種方式讓飛彈產生此力矩，如此才不會使得另外兩個姿態角因為飛彈的翻滾角過大而在控制上產生錯亂的問題。

偏航角與俯仰角控制

將推力物性的關係式(2.9)和(2.10)代入(4.38)後可得

$$\dot{\theta} = q, \quad \dot{q} = \frac{M_y}{I_{yy}} = \frac{-|\bar{F}_T| L \Delta \tan \delta_z}{I_{yy}} \quad (4.42)$$

$$\dot{\psi} = r, \quad \dot{r} = \frac{M_z}{I_{zz}} = \frac{|\bar{F}_T| L \Delta \tan \delta_y}{I_{zz}} \quad (4.43)$$

其中 $\Delta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}}$ 。又因為飛彈噴嘴轉動角度限制在 ± 5 度以內，則可

以近似 $\tan \delta_y \cong \delta_y$ ， $\tan \delta_z \cong \delta_z$ ， $\Delta \cong 1$ 。因此 $\dot{q} = \frac{-|\bar{F}_T| L \delta_z}{I_{yy}}$ ， $\dot{r} = \frac{|\bar{F}_T| L \delta_y}{I_{zz}}$ 。

經過近似後偏航角與俯仰角方程式成為線性系統

$$\dot{\theta} = q, \quad \dot{q} = \frac{-|\bar{F}_T| L \delta_z}{I_{yy}} \quad (4.44)$$

$$\dot{\psi} = r, \quad \dot{r} = \frac{|\bar{F}_T| L \delta_y}{I_{zz}} \quad (4.45)$$

首先設計偏航角控制迴路。對於一個雙積分系統，考慮簡單的內迴路與外迴路定方向控制，如圖 4.7

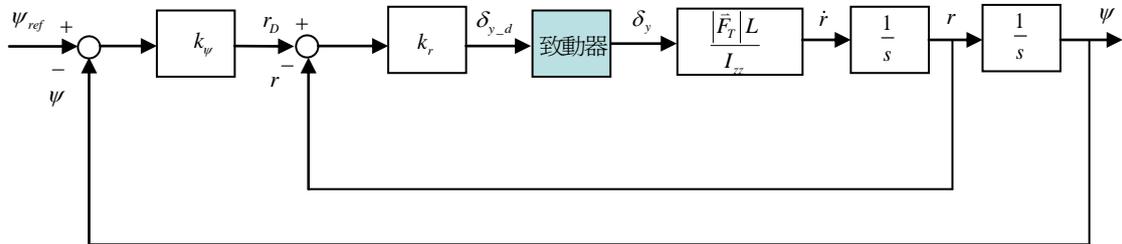


圖 4.7 偏航角控制迴路

假設致動器的轉移函數為 $\frac{a}{s+a}$ ，令 $G_p = \frac{|\bar{F}_T|L}{I_{zz}}$ 。考慮整個系統的閉迴路轉移函數

$$\frac{\psi}{\psi_{ref}} = \frac{ak_\psi k_r G_p}{s^3 + as^2 + ak_r G_p s + ak_\psi k_r G_p} \quad (4.46)$$

由於為三階系統，無標準式可以參考，設計控制器的目的是讓整個系統的步階響應穩定且暫態響應在可接受的範圍內。觀察(4.46)的特徵方程式得知，控制器可以任意調整特徵方程式的 s 項和常數項係數，但是 s^2 項係數固定為 a ，也就是致動器時間常數的倒數，因此設計控制器和制動器的時間常數有很大的關係。

指定(4.46)的三個極點為：

$$\begin{aligned} -p_1 \\ p_2 = -r + bj, \quad p_1, r, b \in \mathfrak{R}^+ \\ p_3 = -r - bj \end{aligned} \quad (4.47)$$

由根與係數關係可知 $p_1 + 2r = a$ ，為了不讓三個極點太接近虛軸導致上升時間過長，應盡量讓三個極點的實部平分 a 。選擇

$$\begin{aligned} p_1 &= \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 1 \\ r &= \frac{a - p_1}{2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 代表小於等於 x 的最大整數。在共扼複數根 p_2, p_3 的部份選擇阻尼比 $\zeta = 0.5$ 。可得

$$b = r \tan 60^\circ \quad (4.49)$$

因為還有一個極點在 $-p_1$ 的位置所以此三階系統不會像阻尼比為 0.5 的二階系統一樣產生震盪和過大的過激量(overshoot)，又能有理想的上升時間。設計完的極點位置如圖 4.8 所示。

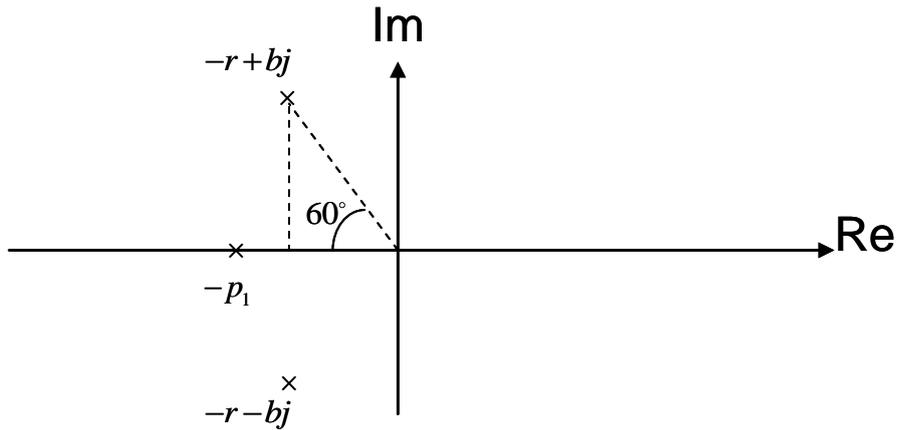


圖 4.8 複數平面極點圖

將特徵方程式以 p_1, p_2, p_3 表示為 $h(s)$

$$h(s) = s^3 + (p_1 - p_2 - p_3)s^2 + (p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3)s + p_1p_2p_3 \quad (4.50)$$

把(4.47)和(4.49)代入(4.50)整理可得

$$h(s) = s^3 + (p_1 + 2r)s^2 + (4r^2 + 2p_1r)s + 4p_1r^2 \quad (4.51)$$

比較(4.51)與(4.46)分母的係數得

$$k_r = \frac{4r^2 + 2p_1r}{aG_p} \quad (4.52)$$

$$k_\psi = \frac{2p_1r}{2r + p_1}$$

(4.52)式就是我們所需的兩個比例控制器增益值。

在此舉一個設計實例。假設制動器的時間常數為 100ms 則 $a=10$ 。由(4.52)

可以算出

$$p_1 = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + 1 = 4$$

$$r = \frac{a - p_1}{2} = 3$$

我們使用第二節火箭剛點火時的推力物性數據(4.53)做設計

$$\begin{aligned} |\bar{F}_r| &= 27742(N) \\ L(t_{f2}) &= 2.52(m) \\ I_{zz}(t_{f2}) &= 2146.5(kg \cdot m^2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

其中 t_{f2} 為第二節點火時間。由(4.53)可得 $G_p = \frac{|\bar{F}_T|L}{I_{zz}} = 32.57$ 。

將上面算出的 a 、 p_1 、 r 和 G_p 代入(4.52)得

$$k_r = 0.18$$

$$k_\psi = 2.4$$

算出 k_r 和 k_ψ 即完成設計。

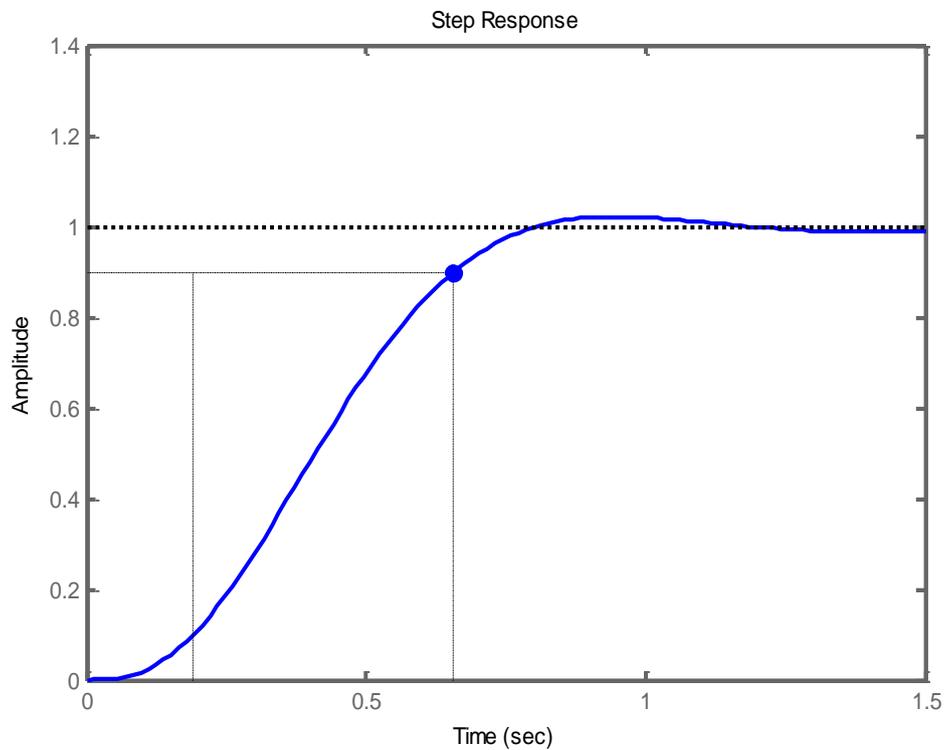


圖 4.9 指定極點的步階響應

設計完後整個偏航角控制迴路的步階響應如圖 4.9。振幅從 0.1 上升到 0.9 花了 0.466 秒。

俯仰角控制和方向角控制是一樣的迴路，如圖 4.10。因為飛彈的轉動慣量 $I_{yy} = I_{zz}$ ，所以俯仰角的迴路跟方向角的迴路只有在內迴路的開路轉移函數多了

一個負號，因此我們令 $k_q = -k_r$ ， $k_\theta = k_\psi$ 如此整個系統的轉移函數就和偏航角控制迴路一樣。也就可以沿用偏航角控制迴路的設計。

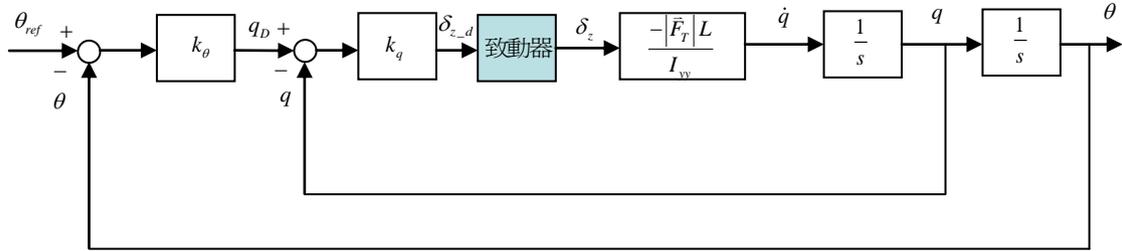


圖 4.10 俯仰角控制迴路

則線性姿態控制的輸入訊號為

$$\begin{aligned}\delta_{y_d} &= k_r \left[k_\psi (\psi_{ref} - \psi) - r \right] \\ \delta_{z_d} &= k_q \left[k_\theta (\theta_{ref} - \theta) - q \right]\end{aligned}\quad (4.54)$$

ψ_{ref} 和 θ_{ref} 為(4.46)式裡 \bar{T} 在地面座標下的兩個姿態角，若 $\bar{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$ 則

$$\begin{aligned}\psi_{ref} &= \tan^{-1} \frac{T_y}{T_x} \\ \theta_{ref} &= \tan^{-1} \frac{-T_z}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2}}\end{aligned}\quad (4.55)$$

δ_{y_d} 和 δ_{z_d} 為下達給飛彈推力系統兩個轉動角度的指令，推力向量控制系統將依據這兩個指令調整噴嘴的方向來達到需求的偏航角和俯仰角。

第五章、終端導引及控制

第二節火箭脫離後，攔截器進入第三階段的飛行。此時的零力誤失距離約在數百公尺的範圍，目標與攔截器的相對距離逐漸減小至紅外線尋標器能鎖定目標。攔截器必須有姿態控制系統，使得尋標器可以持續鎖定目標。除了姿態控制外，還必須有導引率產生側向導引加速度命令。本節討論真比例導引律的設計及利用開關式推力器的姿態控制系統設計及其 PWM 合成。

5.1 真比例導引律[10]

假設攔截飛彈在地面座標的位置為 \mathbf{r}_m ，速度為 \mathbf{v}_m ，目標在地面座標的位置為 \mathbf{r}_t ，速度為 \mathbf{v}_t ，則相對位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m = [x \ y \ z]^T$ ，相對速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m$ ，再將 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 轉換成球座標，如圖 5.1 所示

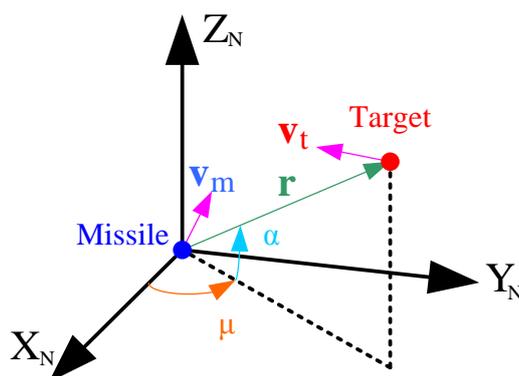


圖 5.1 相對位置與球座標之間的關係

則相對位置可表示為

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| e_r \quad (5.1)$$

其中

$$e_r = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \mu \\ \cos \alpha \sin \mu \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mu = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5.3)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (5.4)$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.5)$$

而相對速度

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}|e_r + |\mathbf{r}|\dot{e}_r = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}|e_r + |\mathbf{r}|(\dot{\mu}\cos\alpha e_\mu + \dot{\alpha}e_\alpha) \quad (5.6)$$

其中

$$e_\mu = \begin{bmatrix} -\sin\mu \\ \cos\mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$e_\alpha = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos\mu \\ -\sin\alpha\sin\mu \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

且

$$e_r \times e_\mu = e_\alpha \quad (5.9)$$

而從(5.5)式、(5.3)式及(5.4)式分別可以得到下列微分的表示式：

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.10)$$

$$\dot{\mu} = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2} \quad (5.11)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\dot{z}(x^2 + y^2) - z(x\dot{x} + y\dot{y})}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (5.12)$$

三維 TPN 導引律的導引加速度方程式為

$$a_{tpn} = N(\mathbf{V}_c \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.13)$$

其中 a_{tpn} 為三維 TPN 導引加速度， $\boldsymbol{\Omega}$ 為角速度， N 為導引常數，通常為 3~5，

\mathbf{V}_c 為攔截飛彈接近目標的速度也就是相對速度在視線上面的投影，即

$$\mathbf{V}_c = (\mathbf{v}^T \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r \quad (5.14)$$

而角速度則定義為

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r}|^2}$$

由(5.1)式及(5.6)式，可以得到

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} = \mathbf{e}_r \times \dot{\mathbf{e}}_r \quad (5.15)$$

從(5.2)式可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\mu} \begin{bmatrix} \cos \alpha (-\sin \mu) \\ \cos \alpha \cos \mu \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \mu \\ -\sin \alpha \sin \mu \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mu} \cos \alpha \begin{bmatrix} -\sin \mu \\ \cos \mu \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \mu \\ -\sin \alpha \sin \mu \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\mu + \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (5.16)$$

將(5.16)式代入(5.15)式並利用 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\alpha$ 及 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\mu$ ，可得

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\alpha - \dot{\alpha} \mathbf{e}_\mu \quad (5.17)$$

所以從(5.13)式、(5.14)式及(5.17)式可得導引加速度為

$$\mathbf{a}_{pn} = -N (\mathbf{v}^T \mathbf{e}_r) (\dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\mu + \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha) \quad (5.18)$$

我們將(5.13)式分解成相對位置與相對速度可以表示的形式，如(5.18)式，透過(5.1)-(5.12)式計算出各分量，再代入(5.18)式，就可以得到真比例導引的導引加速度。由(5.13)及(5.14)可以看出真比例導引的加速度垂直於視線。當尋標器鎖定目標時，攔截器的長軸與視線重合，因此加速度垂直於長軸。

5.2 姿態控制系統設計

姿態控制的目標是要使尋標器能一直對準目標，其中滾轉角 ϕ 維持於零，俯仰角 θ 及偏航角 ψ 則是分別追蹤一個小角度變化的角度命令，所以我們可以合理的假設攔截器滾轉角 $\phi \approx 0$ 、滾轉角的速度 $p \approx 0$ 及俯仰角 $\theta \approx 0$ ，簡化後姿態的動態方程式會形成三組雙積分的方程式同第 4.8 節所述。

由於三組雙積分方程式分別獨立，我們可以用相同的控制方法，控制系統使用內外迴路常數增益回授形成的二階理想轉移函數，理想二階系統的轉移函數可由阻尼比 ξ 及自然頻率 ω_n 二個參數來訂定，其通式為

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.19)$$

以滾轉軸為例，控制系統的方塊圖如圖 5.1 所示，其中 $G_\phi = \frac{1}{I_{xx}}$ ， $u_\phi = M_x$ ， k_p 為角速度回授增益， k_ϕ 為角度回授增益， ϕ_c 為控制系統的輸入命令，俯仰軸及偏航軸的方塊圖與圖 5.2 有一樣的結構，除了其中的變數及回授增益不同。

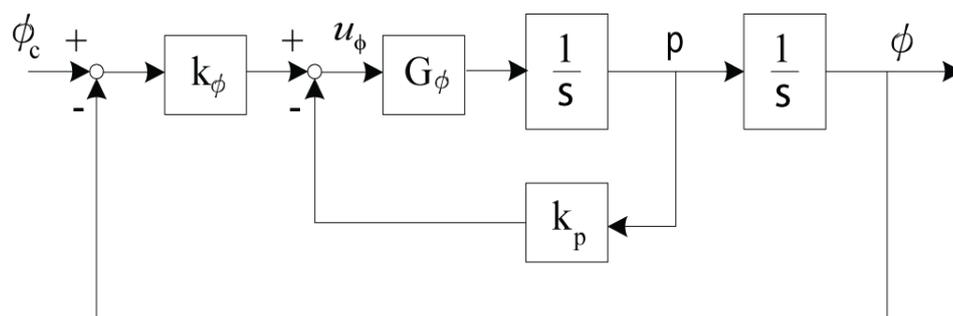


圖 5.2 滾轉軸控制系統

利用圖 5.2 的方塊圖可計算從指令 ϕ_c 至角度 ϕ 的轉移函數為

$$H_\phi(s) = \frac{k_\phi G_\phi}{s^2 + k_p G_\phi s + k_\phi G_\phi} \quad (5.20)$$

同樣的計算可得其他兩軸的轉移函數為

$$H_{\theta}(s) = \frac{k_{\theta}G_{\theta}}{s^2 + k_q G_{\theta}s + k_{\theta}G_{\theta}} \quad (5.21)$$

$$H_{\psi}(s) = \frac{k_{\psi}G_{\psi}}{s^2 + k_r G_{\psi}s + k_{\psi}G_{\psi}} \quad (5.22)$$

其中 $G_{\theta} = \frac{1}{I_{yy}}$ 、 $G_{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}$ ， k_{θ} 、 k_q 為俯仰軸的回授增益， k_{ψ} 、 k_r 為偏航軸的回授

增益。因為追蹤是小角度的命令，所以系統頻寬只要能有效地滿足命令追蹤的需

求即可。選擇阻尼比 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ，系統頻寬 $f = \frac{\omega_n}{2\pi} = 5(\text{Hz})$ ，可得轉移函數為

$$H_{\phi} = \frac{(2\pi \cdot 5)^2}{s^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2\pi \cdot 5)s + (2\pi \cdot 5)^2} \approx \frac{987}{s^2 + 44s + 987} \quad (5.23)$$

比較(5.23)式和(5.20)式的係數之後，我們可以得到滾轉軸的回授增益參數為

$$k_{\phi} = \frac{987}{G_{\phi}(0)}$$

$$k_p = \frac{44}{G_{\phi}(0)}$$

同理可以設計俯仰軸和偏航軸的回授增益為

$$k_{\psi} = k_{\theta} = \frac{987}{G_{\theta}(0)}$$

$$k_r = k_q = \frac{44}{G_{\theta}(0)}$$

由於在攔截過程中燃料不斷的消耗， I_{xx} 、 I_{yy} 及 I_{zz} 均會隨時間減小，相對的 G_{ϕ} 、 G_{θ}

及 G_{ψ} 會隨時間增加，會使得系統頻寬隨時間略為增加。經由上述的設計方法，

我們可以得到線性姿態控制的輸入訊號如下

$$\begin{aligned} u_{\phi} &= k_{\phi}(\phi_c - \phi) - k_p p \\ u_{\theta} &= k_{\theta}(\theta_c - \theta) - k_q q \\ u_{\psi} &= k_{\psi}(\psi_c - \psi) - k_r r \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.3 脈衝寬度調變合成

為了配合開關式推力器的使用，必須將連續的控制訊號轉換成對等的開關訊號，即 0 或 1 的訊號。脈衝寬度調變(PWM)是達到這個目的的方法之一。透過脈衝寬度調變可將輸入連續訊號的大小依比例轉換成脈衝訊號的寬度。

假設當輸入的連續訊號是一個低頻的弦波，而參考訊號為固定頻率及振幅大小的鋸齒波，將參考訊號與輸入訊號做比較，就可以得到輸出的脈衝訊號，如圖 5.3 所示。如果輸入訊號較大則輸出為 1，否則為 0。如果鋸齒波的週期為 T 則輸出為 1 的時間 T_{ON} 滿足 $0 \leq T_{ON} \leq T$ 。定義導通週期(duty cycle, dc)為 $\frac{T_{ON}}{T}$ ，所以導通週期的範圍為 0% 至 100%。

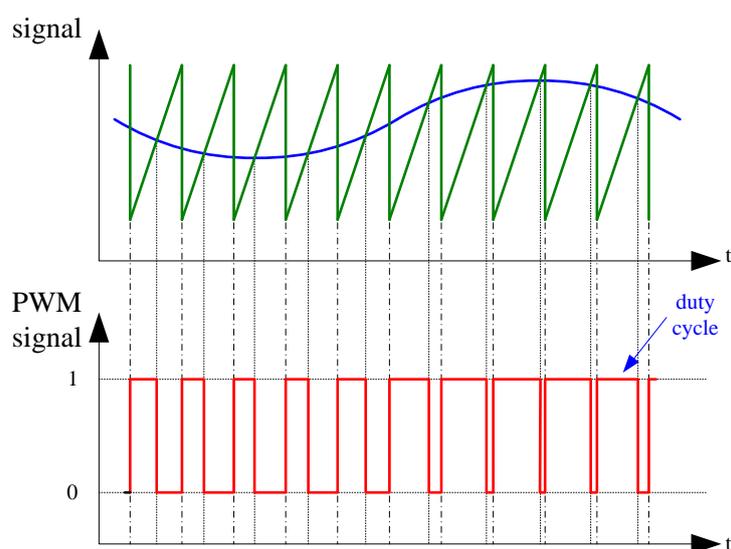


圖 5.3 脈衝寬度調變訊號示意圖

我們修改 PWM 參考訊號在 duty cycle 內的方式。假設脈衝寬度調變的參考訊號週期為 T ，利用週期一開始的輸入連續訊號 (u_n) 和參考訊號 ($u_{max,n}$) 的比值，作為 duty cycle 在該週期內的比例，來決定輸出脈衝訊號為 1 的時間，也就是開關式推力器打開的時間長短。在這邊 u_n 就是線性控制器的輸出訊號，而 $u_{max,n}$ 就是三軸所能產生的最大力矩，即 M_{xmax} ， M_{ymax} 及 M_{zmax} 。以滾轉軸為例，假設

時間 t 屬於參考訊號的第 n 個週期，也就是 $(n-1)T \leq t < nT$ ，則在這個週期的導通週期為

$$dc = \min\left(\frac{u_{\phi n}}{M_{x\max}}, 1\right)$$

大致上推力器開的時間和輸入 $u_{\phi n}$ 成比例關係，若 $u_{\phi n} > M_{x\max}$ ，則推力器開的時間為 T ，即 $dc=100\%$ ，如圖 5.4 所示。

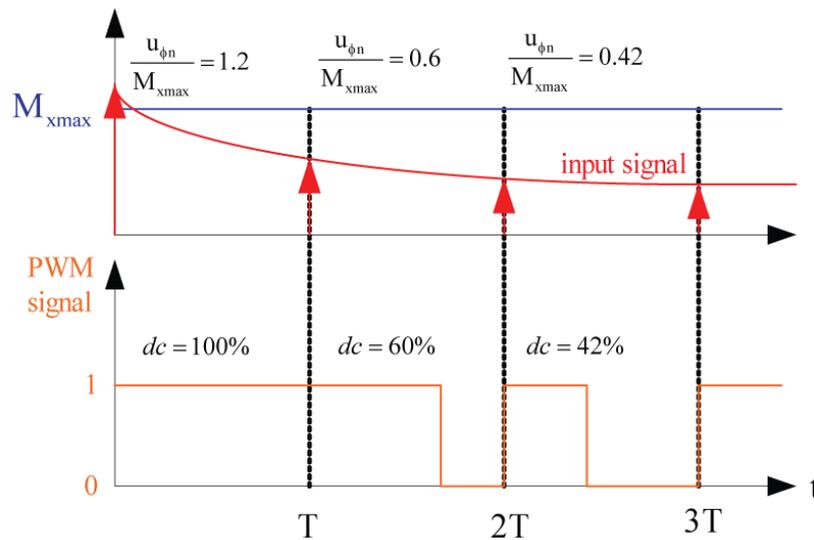


圖 5.4 脈衝寬度調變(PWM)訊號示意圖

在使用 PWM 將輸入的連續訊號轉換成脈衝訊號輸出時，參考訊號的週期 T 或是說頻率是一個可以調整的參數，當選擇的頻率過低，姿態推力器開啟或關閉的時間過多，會造成角度誤差較大，燃料消耗也會較多；相反的當選擇的頻率過高，噴嘴還未完全打開產生足夠的推力時，卻有可能收到必須關閉的命令。因此如何選擇適當的 PWM 頻率使的姿態角的誤差在可接受的範圍內，並且由於受到硬體的限制，選擇的頻率也不可以讓噴嘴的開關頻率太高。

對於攔截器的姿態控制方面，因為 PWM 是將線性控制器的輸出訊號轉換成脈衝訊號，所以脈衝訊號和線性控制器的訊號有關，因此我們先觀察線性控制器

的頻率響應，畫出(5.23)式的波德圖如圖 5.5 所示，在波德圖中，頻率響應的大小為-3(dB)時的頻率 $\omega \approx 31.4(\text{rad})$ 或 $f \approx 5(\text{Hz})$ ，由於線性控制器在這頻率還存在有不小的控制力，因此我們可以選擇更高頻的 PWM 頻率，保留線性控制器在這頻率附近控制力提供的貢獻；而在波德圖中，大小約為-20(dB)時的頻率 $\omega \approx 102(\text{rad})$ 或 $f \approx 16(\text{Hz})$ ，控制力在此頻率後所能提供的貢獻已經很小，如果再選擇更高頻的 PWM 頻率所能消除的誤差量已經不明顯，反而有可能讓噴嘴出現不能完全開啟的情況，估計 PWM 的頻率選擇在 16(Hz)附近，也就是線性控制系統頻寬的 3~4 倍將會比較適當。

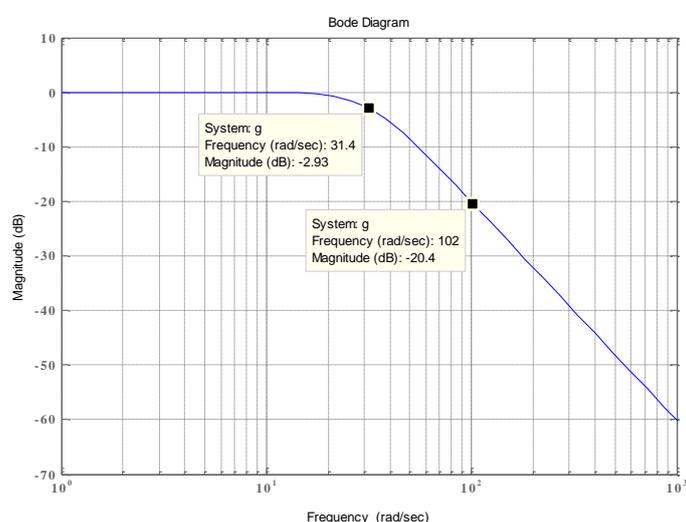


圖 5.5 線性姿態控制器的頻率響應

這邊用一個簡單的數值模擬來進一步幫助 PWM 頻率的選擇，當假設三組不同的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，如圖 5.6 所示。並且選擇不同的 PWM 頻率為 10、12、15、17、20(Hz)，觀察在不同頻率下的角度誤差(取方均根值)、燃料消耗及噴嘴開啟的情況。模擬結果如表 5.1~表 5.3 所示。

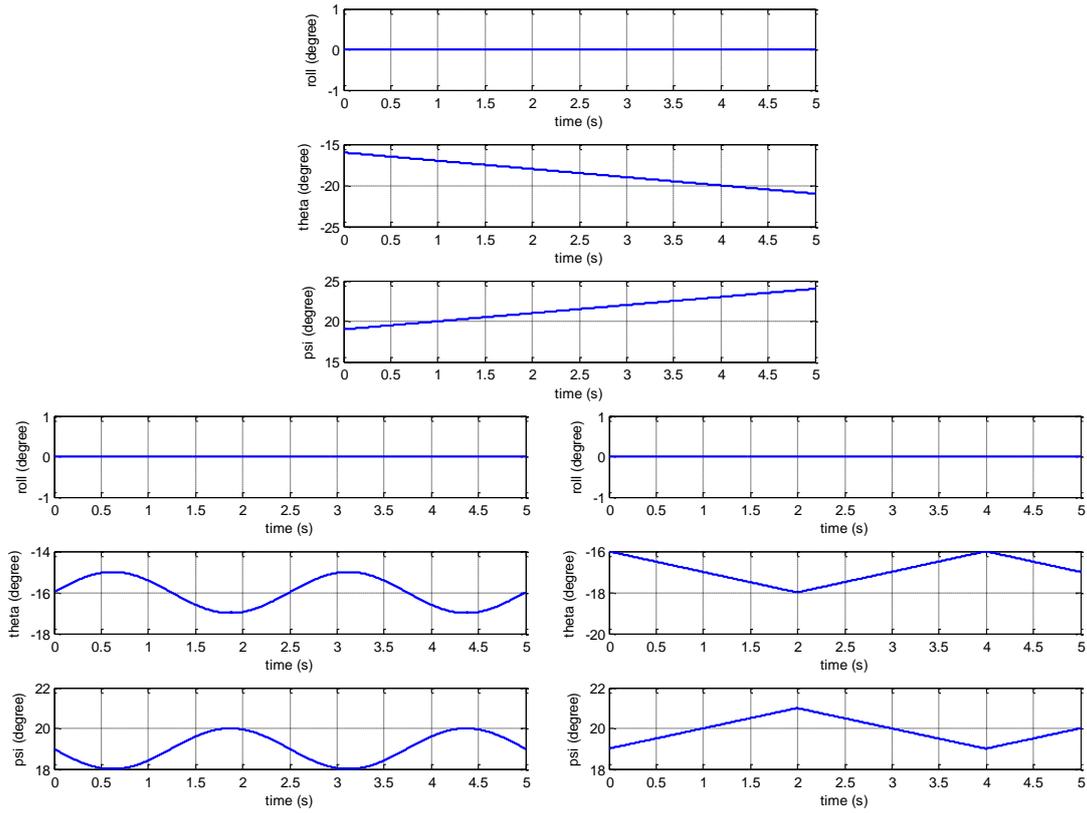


圖 5.6 三組不同的姿態角命令

表 5.1 姿態角命令為斜坡函數的模擬結果

頻率	誤差	姿態角命令			燃料消耗 (kg)
		ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	
8 (Hz)		0.4032	0.2584	0.1452	0.0178
10 (Hz)		0.1774	0.1418	0.0670	0.0123
12 (Hz)		0.0886	0.0816	0.0491	0.0089
15 (Hz)		0.0418	0.0561	0.0441	0.0066
17 (Hz)		0.0311	0.0501	0.0433	0.0059
20 (Hz)		0.0181	0.0471	0.0428	0.0044

表 5.2 姿態角命令為弦波函數的模擬結果

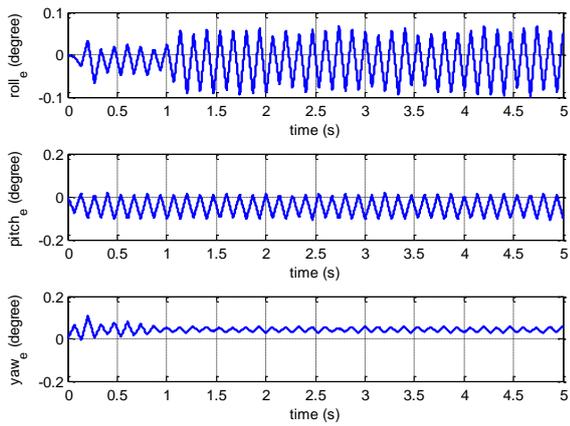
頻率	誤差	姿態角命令			燃料消耗 (kg)
		ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	
8 (Hz)		0.4010	0.2687	0.1586	0.0181
10 (Hz)		0.1752	0.1581	0.0940	0.0124
12 (Hz)		0.0881	0.1058	0.0819	0.0089
15 (Hz)		0.0473	0.0872	0.0772	0.0069
17 (Hz)		0.0353	0.0833	0.0766	0.0059
20 (Hz)		0.0262	0.0812	0.0765	0.0047

表 5.3 姿態角命令為三角波函數的模擬結果

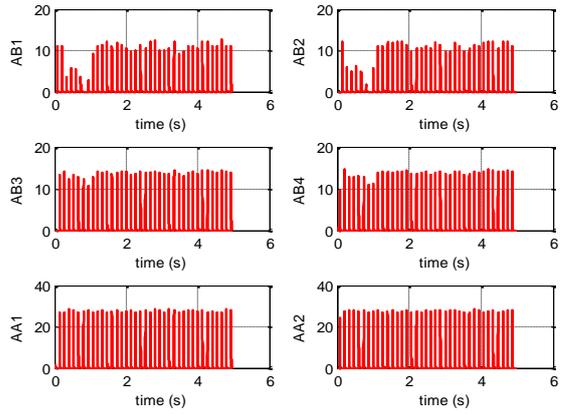
頻率 \ 誤差	ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	燃料消耗 (kg)
8 (Hz)	0.3989	0.2580	0.1451	0.0178
10 (Hz)	0.1397	0.1437	0.0756	0.0113
12 (Hz)	0.0660	0.0834	0.0530	0.0081
15 (Hz)	0.0370	0.0566	0.0459	0.0062
17 (Hz)	0.0286	0.0491	0.0437	0.0055
20 (Hz)	0.0160	0.0467	0.0433	0.0042

到目前為止，從表 5.1~表 5.3 的模擬結果可以發現，當 PWM 頻率在低頻(8Hz)時，角度誤差很大，需要比較大的控制力來消除誤差，因此噴嘴開啟的時間就會比較長，燃料也消耗的多。當頻率從 10(Hz)一直增加到 15(Hz)，角度誤差部份有明顯的改善，可是改善的量也隨的頻率的增加持續的遞減，當頻率從 15(Hz)增加到 20(Hz)時，角度誤差改善的量已經非常的少，可以證明在線性控制器頻率響應大小在-20(dB)後所提供的控制力已經下降的非常多了。

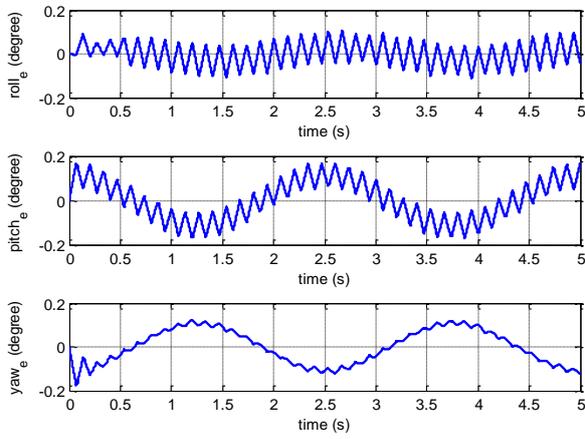
除了角度誤差這個指標外，另一個幫助我們選擇 PWM 頻率的就是噴嘴開啟的情況，四個滾轉—偏航軸噴嘴(AB1~AB4)能產生的最大推力為 15.8 牛頓，兩個俯仰軸噴嘴(AA1、AA2)所能產生的最大推力為 31.6 牛頓，所以透過觀察每個噴嘴產生推力的情況來判斷噴嘴是否有正常開啟。當 PWM 頻率為 15(Hz)時的噴嘴大部分的情況下都能正常的開啟產生推力，只有在姿態角命令為三角波這種變化比較劇烈的狀況下，噴嘴 AB1 和 AB2 才会有部份無法完全開啟的情形，如圖 5.7 中的(b)所示。當頻率為 17(Hz)時，除了姿態命令為三角波這個情況比較嚴重外，噴嘴開啟情形大致和頻率為 15(Hz)雷同，如圖 5.8 中(b)所示。當頻率為 20(Hz)時 AB1 和 AB2 兩個噴嘴普遍都只能開一半就必須要關閉，如圖 5.9 中(b)所示。雖然在一般情況姿態角是追蹤一個小角度變化的命令，但是考慮當有質心偏移或雜訊干擾造成較劇烈角度變化的情形，所以我們可以選擇 15(Hz)為適當的 PWM 頻率，也就是線性控制器頻寬的 3 倍。



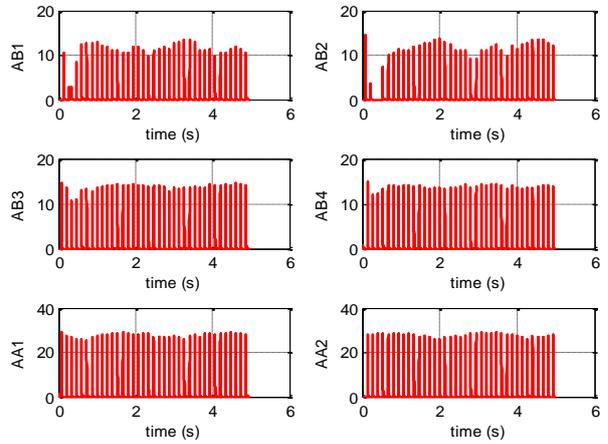
(a)



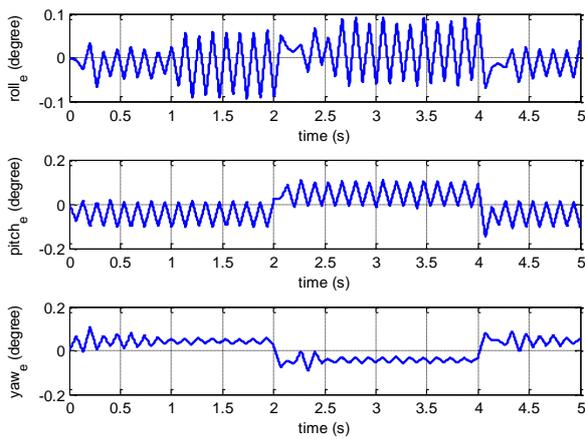
(b)



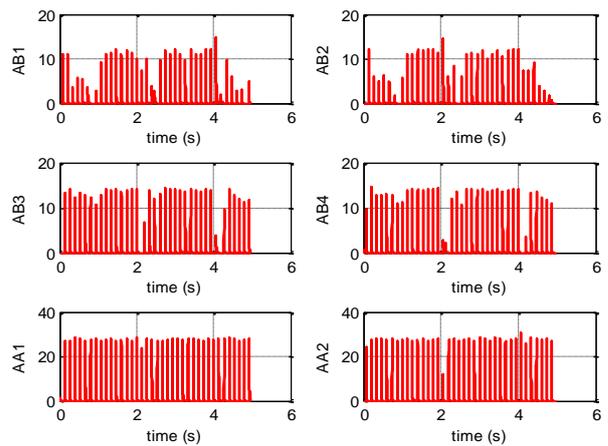
(a)



(b)



(a)



(b)

圖 5.7 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 15(Hz)，

(a)角度誤差，(b)噴嘴開啟情況

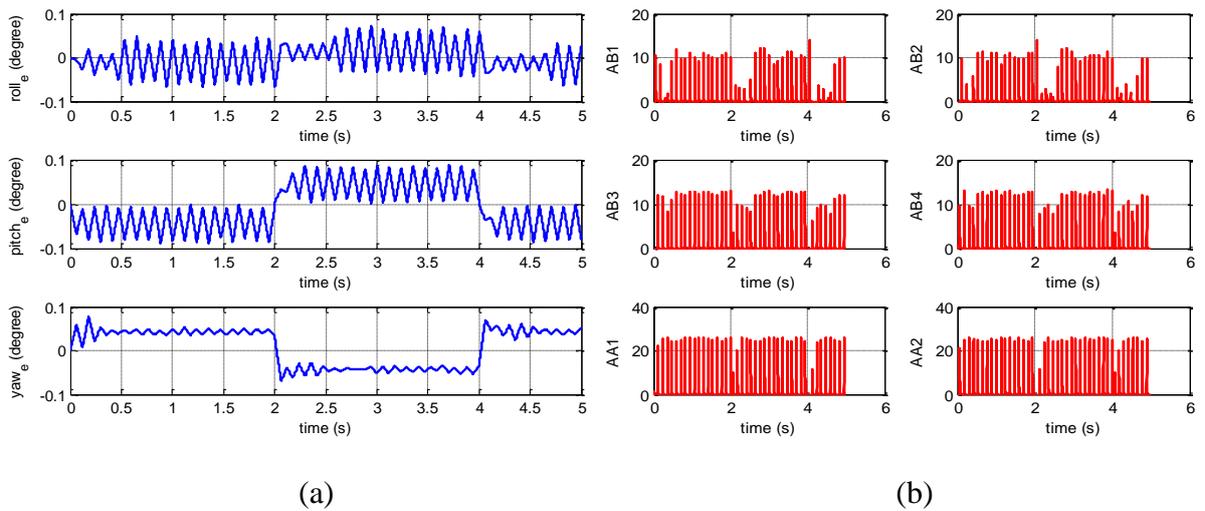
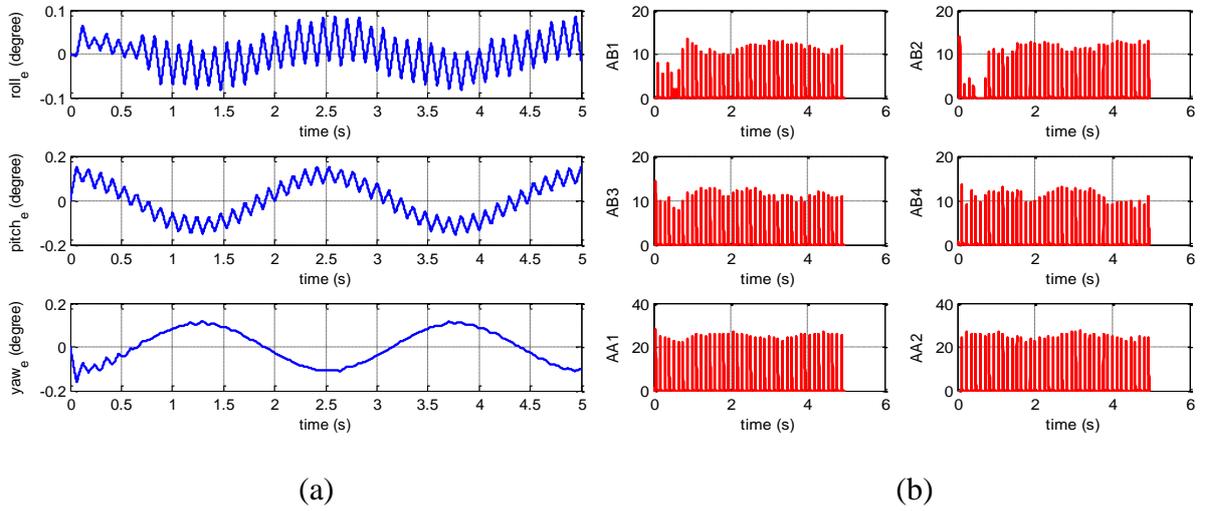
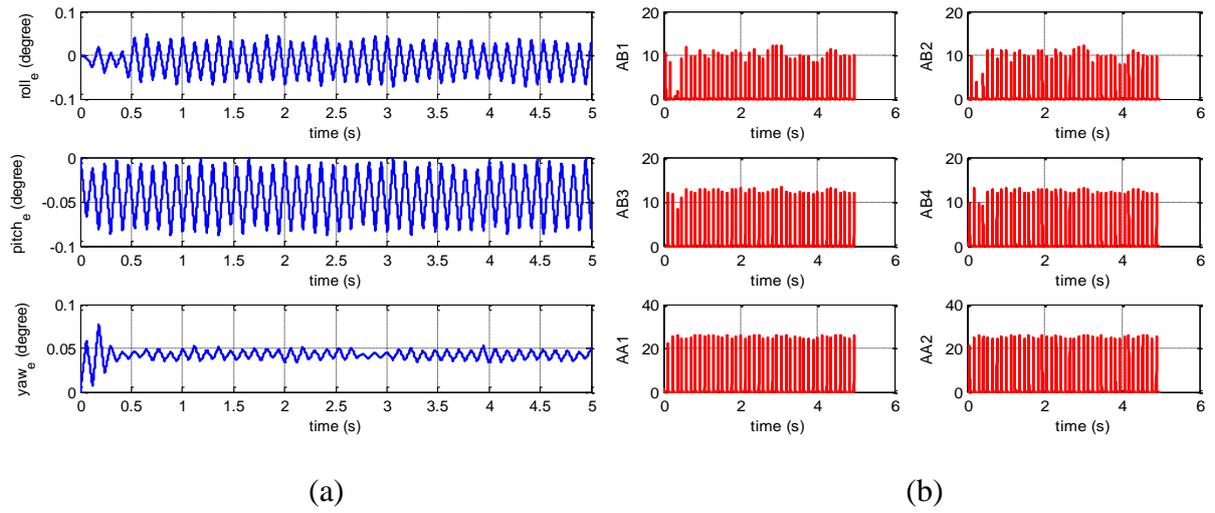


圖 5.8 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 17(Hz)

(a)角度誤差，(b)噴嘴開啟情況

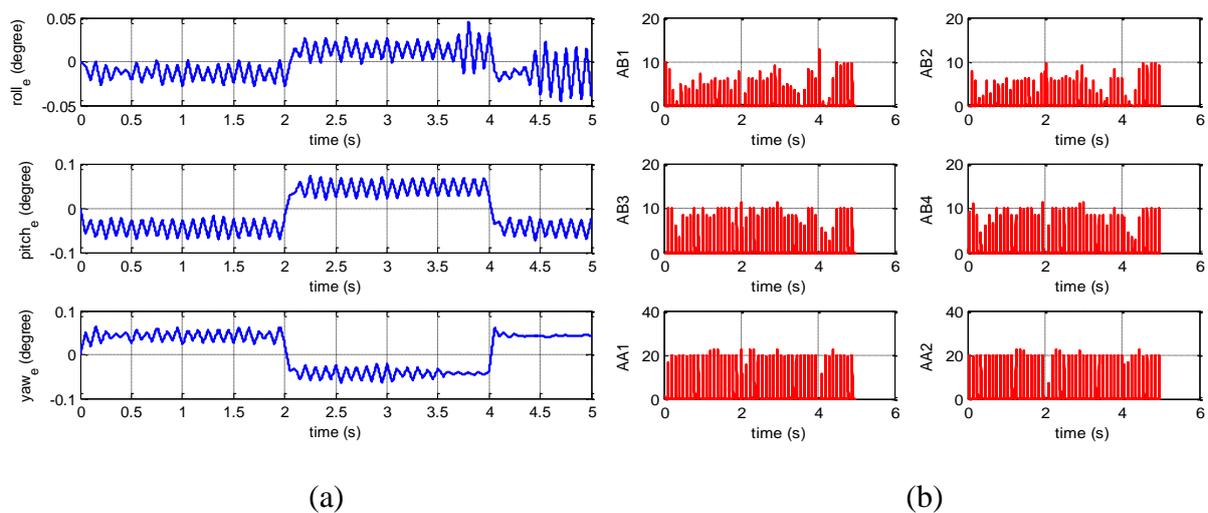
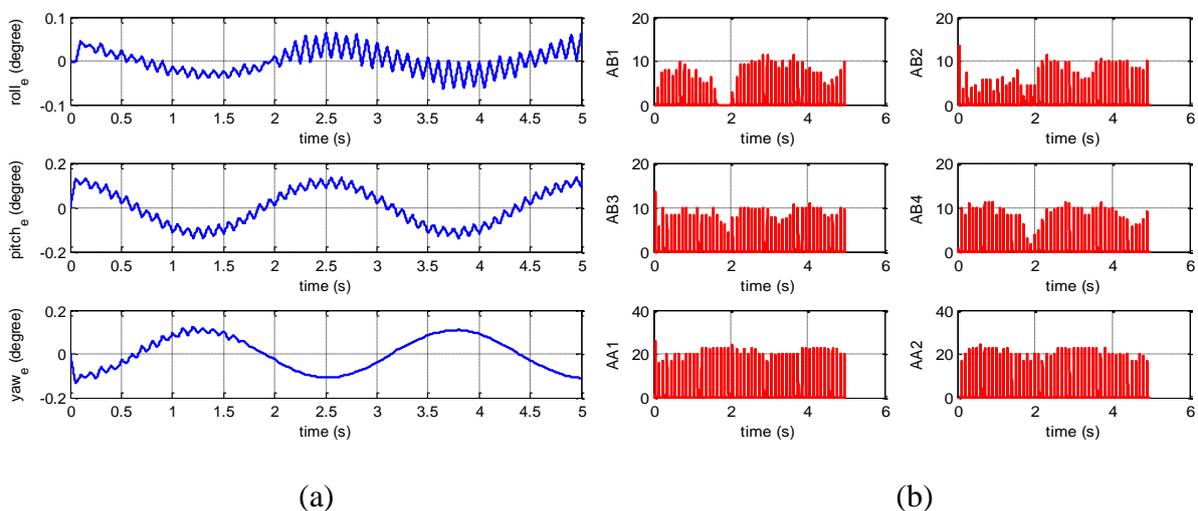
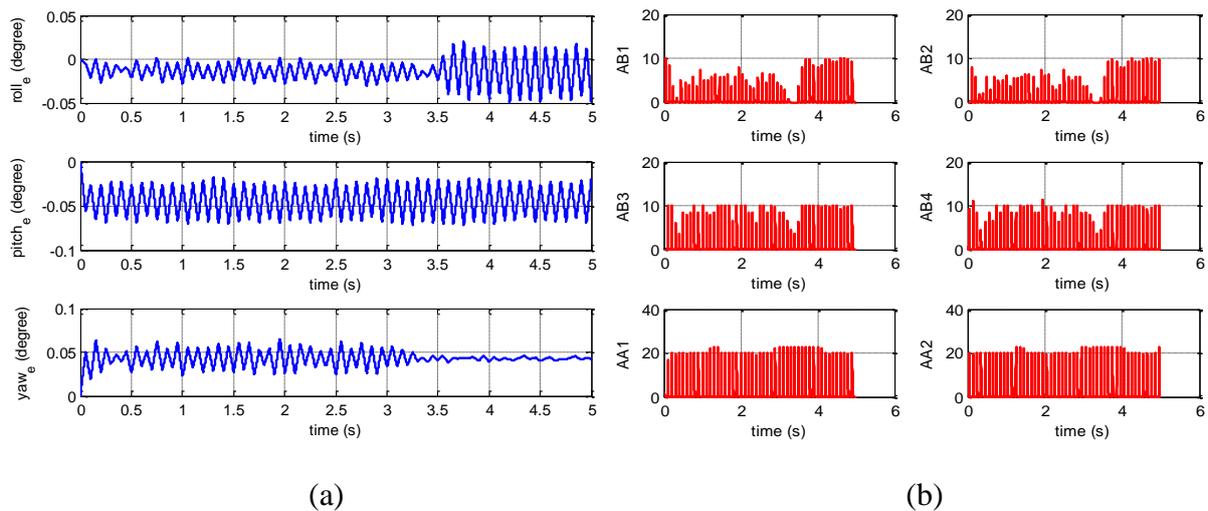


圖 5.9 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 20(Hz)

(a)角度誤差，(b)噴嘴開啟情況

對於攔截器轉向導引方面，由(5.18)式得到的真比例導引加速度是在慣性座標下，所以我們必須要把它轉換到體座標下才能使用，並且作為 PWM 的輸入訊號。

$$a_{pm,B} = T_{BN} \cdot a_{pm} \quad (5.25)$$

其中 T_{BN} 為慣性座標與體座標的轉換矩陣， a_{pm} 為三維真比例導引律的導引加速度。則我們得到轉向推力器 PWM 的輸入訊號為 $a_{pm,B}$ 在 Y_B 和 Z_B 的分量。

我們模擬時假設轉向推力器的推力最大值為 315 牛頓，以攔截器的初始的總質量為 21.33 公斤來計算，則每個轉向推力器所能產生的最大加速度值大約為 14.7679 m/s^2 ，在飛行的過程中，攔截器的質量會因推力器燃燒的關係不斷的減少，所以我們設計轉向推力器 PWM 的參考訊號為 15 m/s^2 ，及選擇 PWM 的頻率為 3(Hz)。

第六章、模擬程式說明

6.1 Simulink 模擬程式子系統方塊圖架構

六自由度攔截模擬程式利用 Matlab/Simulink 軟體發展，模擬程式有多層式方塊的架構，最上層共有 8 個子系統方塊，其功能簡列如下。

1. 運動方程式 (EQOM)：計算飛彈的六自由度狀態，包括位置，速度，姿態角，角速度及座標轉換矩陣。
2. 氣動模式 (AERO)：計算第一階段和第二階段飛彈所受到的氣動力與氣動力矩。
3. 中途導控 (MGNC)：負責計算出中途導引命令並且完成姿態控制使得推力系統產生需求的推力向量。
4. 轉向姿態控制 (DACS)：計算出所需求的加速度和尤拉角，利用 PWM 的合成實現開關式的推力器，並控制飛彈的轉向和姿態。
5. 大氣重力 (ATMO)：計算飛彈所在高度的空氣密度、音速、溫度與重力。
6. 推力物性 (PROP)：由推力大小和方向計算所受到的力矩，轉向推力及燃料的消耗狀況。
7. 目標模式 (TAGT)：計算目標的馬赫數、所受到的空氣阻力和重力，模擬目標的飛行軌跡。
8. 其他計算 (AUXI)：計算攻角、馬赫數、飛行路徑角等。

6.2 子系統的輸入輸出及參數

以下列出最上層子系統之輸出輸入變數及子系統參數。

(一)運動方程式(EQOM)

輸入訊號：

1. mass：飛彈總質量 (kg)
2. I_x ：x-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
3. I_y ：y-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
4. I_z ：z-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
5. FT_x ：x-軸方向引擎推力 (N)
6. FT_y ：y-軸方向引擎推力 (N)
7. FT_z ：z-軸方向引擎推力 (N)
8. FA_x ：x-軸方向氣動力 (N)
9. FA_y ：y-軸方向氣動力 (N)
10. FA_z ：z-軸方向氣動力 (N)
11. g_x ：x-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
12. g_y ：y-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
13. g_z ：z-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
14. MT_x ：x-軸方向引擎力矩 (N-m)
15. MT_y ：y-軸方向引擎力矩 (N-m)
16. MT_z ：z-軸方向引擎力矩 (N-m)
17. MA_x ：x-軸方向氣動力矩 (N-m)
18. MA_y ：y-軸方向氣動力矩 (N-m)
19. MA_z ：z-軸方向氣動力矩 (N-m)
20. MT_{3x} ：x-軸方向第三節引擎力矩 (N-m)
21. MT_{3y} ：y-軸方向第三節引擎力矩 (N-m)
22. MT_{3z} ：z-軸方向第三節引擎力矩 (N-m)
23. time：時間(s)

輸出訊號：

1. r_{mx} ：x-軸飛彈位置 (m)
2. r_{my} ：y-軸飛彈位置 (m)
3. r_{mz} ：z-軸飛彈位置 (m)
4. v_{mx} ：x-軸飛彈速度 (m/s)
5. v_{my} ：y-軸飛彈速度 (m/s)
6. v_{mz} ：z-軸飛彈速度 (m/s)
7. p ：x-軸方向角速率 (rad)
8. q ：y-軸方向角速率 (rad)
9. r ：z-軸方向角速率 (rad)
10. ψ ：滾轉角 (rad/s)
11. θ ：俯仰角 (rad/s)
12. ϕ ：偏航角 (rad/s)
13. e_0 ：第一個 4 元素 (無單位)
14. e_1 ：第二個 4 元素 (無單位)
15. e_2 ：第三個 4 元素 (無單位)
16. e_3 ：第四個 4 元素 (無單位)
17. v_{mxb} ：體座標 x-軸飛彈速度 (m/s)
18. v_{myb} ：體座標 y-軸飛彈速度 (m/s)
19. v_{mzb} ：體座標 z-軸飛彈速度 (m/s)
20. a_x ：x-軸飛彈加速度 (m/s^2)
21. a_y ：y-軸飛彈加速度 (m/s^2)
22. a_z ：z-軸飛彈加速度 (m/s^2)
23. a_{xb} ：體座標 x-軸飛彈加速度 (m/s^2)
24. a_{yb} ：體座標 y-軸飛彈加速度 (m/s^2)
25. a_{zb} ：體座標 z-軸飛彈加速度 (m/s^2)

參數/初始條件：

1. $r_{mx0}=r_{mx}(0)$ ：x-軸飛彈初始位置 (m)
2. $r_{my0}=r_{my}(0)$ ：y-軸飛彈初始位置 (m)
3. $r_{mz0}=r_{mz}(0)$ ：z-軸飛彈初始位置 (m)
4. $v_{mx0}=v_{mx}(0)$ ：x-軸飛彈初始速度 (m/s)
5. $v_{my0}=v_{my}(0)$ ：y-軸飛彈初始速度 (m/s)
6. $v_{mz0}=v_{mz}(0)$ ：z-軸飛彈初始速度 (m/s)
7. $p_0=p(0)$ ：x-軸方向初始角速率 (rad)
8. $q_0=q(0)$ ：y-軸方向初始角速率 (rad)
9. $r_0=r(0)$ ：z-軸方向初始角速率 (rad)
10. $e_{00}=e_0(0)$ ：第一個 4 元素初值 (無單位)

11. $e_{10}=e_1(0)$: 第二個 4 元素初值 (無單位)
13. $e_{30}=e_3(0)$: 第四個 4 元素初值 (無單位)
15. $\theta_0=\theta(0)$: 初始俯仰角 (rad/s)

12. $e_{20}=e_2(0)$: 第三個 4 元素初值 (無單位)
14. $\psi_0=\psi(0)$: 初始滾轉角 (rad/s)
16. $\phi_0=\phi(0)$: 初始偏航角 (rad/s)

(二) 氣動模式(AERO)

輸入訊號：

1. t : 時間(s)
3. v_{mxb} : 體座標 x-軸飛彈速度 (m/s)
5. v_{mzb} : 體座標 z-軸飛彈速度 (m/s)
7. p : x-軸方向角速率 (rad/s)
9. r : z-軸方向角速率 (rad/s)

2. ρ : 飛彈所在高度的空氣密度 (kg/m^3)
4. v_{myb} : 體座標 y-軸飛彈速度 (m/s)
6. Mach: 飛彈馬赫數 (無單位)
8. q : y-軸方向角速率 (rad/s)
10. X_{cg} : x-軸方向的質心位置 (m)

輸出訊號：

1. q_d : 動壓 (kg/m^2)
3. FA_x : x-軸方向氣動力 (N)
5. FA_z : z-軸方向氣動力 (N)
7. MA_y : y-軸方向氣動力矩 (N-m)

2. X_{cp} : 壓力中心
4. FA_y : y-軸方向氣動力 (N)
6. MA_x : x-軸方向氣動力矩 (N-m)
8. MA_z : z-軸方向氣動力矩 (N-m)

(三) 中途導控(MGNC)

輸入訊號：

1. r_{mxm} : x-軸飛彈位置量測值 (m)
3. r_{mzm} : z-軸飛彈位置量測值 (m)
5. v_{mym} : y-軸飛彈速度量測值 (m/s)
7. r_{txm} : x-軸目標位置量測值 (m)
9. r_{tzm} : z-軸目標位置量測值 (m)
11. v_{tym} : y-軸飛彈速度量測值 (m/s)
13. t : 時間 (s)
15. t_{ht} : 飛彈推力(N)
17. p : x-軸方向角速率 (rad/s)
19. r : z-軸方向角速率 (rad/s)
21. θ : 俯仰角 (rad)

2. r_{mym} : y-軸飛彈位置量測值 (m)
4. v_{mxm} : x-軸飛彈速度量測值 (m/s)
6. v_{mzm} : z-軸飛彈速度量測值 (m/s)
8. r_{tym} : y-軸目標位置量測值 (m)
10. v_{txm} : x-軸目標速度量測值 (m/s)
12. v_{tzm} : z-軸飛彈速度量測值 (m/s)
14. SMG: 中途導引啟動訊號
16. mass: 飛彈質量(kg)
18. q : y-軸方向角速率 (rad/s)
20. ψ : 滾轉角 (rad)
22. ϕ : 偏航角 (rad)

輸出訊號：

1. δ_y : y-軸噴嘴角度 (rad)
3. t_{go} : 剩餘時間 (s)

2. δ_z : z-軸噴嘴角度 (rad)
4. ZEM: 估算零力誤失 (m)

參數/初始條件：

1. $t_{go0}=t_{go}(0)$: 初始剩餘時間 (s)
3. V_{m_table} : 預測飛彈速度對時間的函數表

2. $e_{10}=e_1(0)$: 初始預測視線向量

(四) 轉向姿態控制 (DACS)

輸入訊號：

1. r_{mx} : x-軸飛彈位置 (m)
2. r_{my} : y-軸飛彈位置 (m)
3. r_{mz} : z-軸飛彈位置 (m)
4. v_{mx} : x-軸飛彈速度 (m/s)
5. v_{my} : y-軸飛彈速度 (m/s)
6. v_{mz} : z-軸飛彈速度 (m/s)
7. r_{tx} : x-軸方向目標位置 (m)
8. r_{ty} : y-軸方向目標位置 (m)
9. r_{tz} : z-軸方向目標位置 (m)
10. v_{tx} : x-軸方向目標速度 (m/s)
11. v_{ty} : y-軸方向目標速度 (m/s)
12. v_{tz} : z-軸方向目標速度 (m/s)
13. p : x-軸方向角速率 (rad/s)
14. q : y-軸方向角速率 (rad/s)
15. r : z-軸方向角速率 (rad/s)
16. θ : 俯仰角 (rad)
17. φ : 偏航角 (rad)
18. ψ : 滾轉角 (rad)
19. S_{tg} : 終端導引啟動訊號

輸出訊號：

1. DA1
2. DA2
3. DB1
4. DB2
5. AA1
6. AA2
7. AB1
8. AB2
9. AC1
10. AC2
11. AC3
12. AC4

(五)大氣重力 (ATMO)

輸入訊號：

1. r_{mx} : x-軸方向飛彈高度 (m)
2. r_{my} : y-軸方向飛彈高度 (m)
3. r_{mz} : z-軸方向飛彈高度 (m)

輸出訊號：

1. ρ : 飛彈所在高度的空氣密度 (kg/m^3)
2. P_a : 飛彈所在高度的空氣壓力 (N/m^2)
3. temp : 飛彈所在高度的溫度 ($^{\circ}\text{C}$)
4. ss : 飛彈所在高度的音速 (m/s)
5. g_x : x-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
6. g_y : y-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
7. g_z : z-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)

(六)推力物性 (PROP)

輸入訊號：

1. t : 時間 (s)
2. delta_y : y-軸噴嘴角度 (rad)
3. delta_z : z-軸噴嘴角度 (rad)
4. DA1
5. DA2
6. DB1
7. DB2
8. AA1
9. AA2
10. AB1
11. AB2
12. AC1
13. AC2
14. AC3

15.AC4

輸出訊號：

1. tht：飛彈推力(N)
2. mass：飛彈質量(kg)
3. I_x ：x-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
4. I_y ：y-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
5. I_z ：z-軸方向轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
6. X_{cg} ：x-軸方向的質心位置 (m)
7. MT_x ：x-軸方向引擎力矩 (N·m)
8. MT_y ：y-軸方向引擎力矩 (N·m)
9. MT_z ：z-軸方向引擎力矩 (N·m)
10. FT_x ：x-軸方向引擎推力 (N)
11. FT_y ：y-軸方向引擎推力 (N)
12. FT_z ：z-軸方向引擎推力 (N)

參數：

1. t_{b1} ：第一節燃燒時間 (s)
2. t_{b2} ：第二節燃燒時間 (s)
3. tht1：第一節推力最大值 (N)
4. tht2：第二節推力最大值 (N)
5. t_{s1} ：第一節脫離時間 (s)
6. t_{s2} ：第二節脫離時間 (s)
7. t_{f2} ：第二節點火時間 (s)

(七)目標模式 (TAGT)

輸入訊號：

1. g_{tx} ：x-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
2. g_{ty} ：y-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)
3. g_{tz} ：z-軸方向重力加速度(慣性座標) (m/s^2)

輸出訊號：

1. r_{tx} ：x-軸方向目標位置 (m)
2. r_{ty} ：y-軸方向目標位置 (m)
3. r_{tz} ：z-軸方向目標位置 (m)
4. v_{tx} ：x-軸方向目標速度 (m/s)
5. v_{ty} ：y-軸方向目標速度 (m/s)
6. v_{tz} ：z-軸方向目標速度 (m/s)
7. M_t ：目標馬赫數

參數：

1. r_{tx0} ：x-軸方向目標初始位置 (m)
2. r_{ty0} ：y-軸方向目標初始位置 (m)
3. r_{tz0} ：z-軸方向目標初始位置 (m)
4. v_{tx0} ：x-軸方向目標初始速度 (m/s)
5. v_{ty0} ：y-軸方向目標初始速度 (m/s)
6. v_{tz0} ：z-軸方向目標初始速度 (m/s)
7. C_D ：阻力係數
8. β ：目標彈道阻力係數 (kgf/m^2)

(八)其他計算 (AUXI)

輸入訊號：

1. v_{mx} ：x-軸飛彈速度 (m/s)
2. v_{my} ：y-軸飛彈速度 (m/s)
3. v_{mz} ：z-軸飛彈速度 (m/s)
4. ss：飛彈所在高度的音速 (m/s)
5. v_{mxb} ：體座標 x-軸飛彈速度 (m/s)
6. v_{myb} ：體座標 y-軸飛彈速度 (m/s)
7. v_{mzb} ：體座標 z-軸飛彈速度 (m/s)

輸出訊號：

1. Mach：飛彈馬赫數 (無單位)
2. alfa：攻角
3. beta：測滑角

6.3 氣動模式 (AERO)

透過查表的方法得到氣動係數再加以計算氣動力與氣動力矩。氣動的模型如圖 4.2 所示，其中 (X_B, Y_B, Z_B) 為體座標的三個座標軸， (X_S, Y_S, Z_S) 為風洞平衡座標，

V_∞ 為飛彈的速度大小， $[U \ V \ W]^T$ 為飛彈速度在體座標下的三個分量。全攻角

$$\alpha_c = \cos^{-1} \frac{U}{V_\infty}, \quad \text{風向角 } \phi = \tan^{-1} \frac{V}{W}, \quad \text{攻角 } \alpha = \tan^{-1} \frac{W}{U}, \quad \text{側滑角 } \beta = \sin^{-1} \frac{V}{V_\infty}.$$

$F_A = [F_{Ax} \ F_{Ay} \ F_{Az}]^T$ 為飛彈在體座標下受的氣動力， $M_A = [M_{Ax} \ M_{Ay} \ M_{Az}]^T$

為飛彈在體座標下受的氣動力矩。計算氣動力和力矩所需的氣動係數如(6.1)。

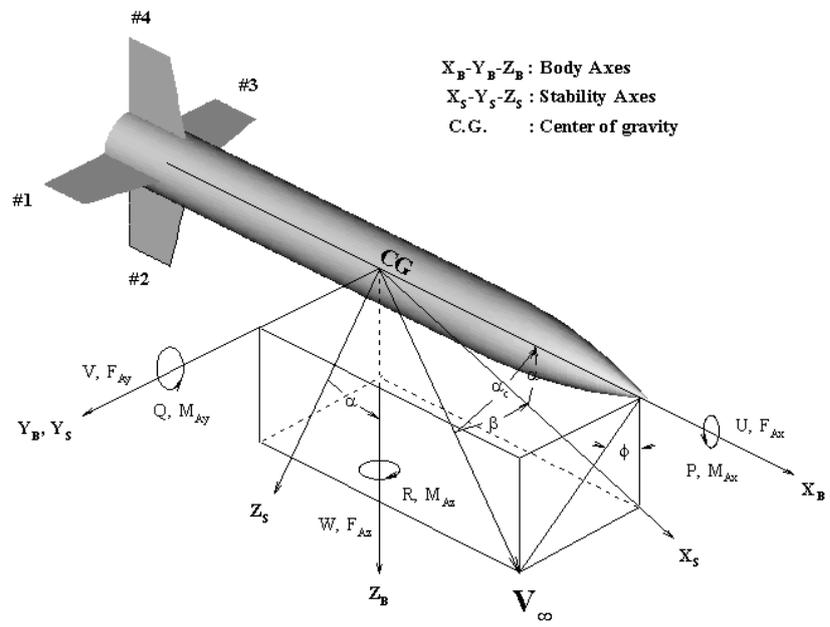


圖 6.1 氣動力模型

$$\begin{aligned}
C_{FX} &= -C_A(M, \alpha_c, \phi) \\
C_{FY} &= C_Y(M, \alpha_c, \phi) + C_{Yr}(M) \frac{rl_{ref}}{2V_\infty} \\
C_{FZ} &= -C_N(M, \alpha_c, \phi) - C_{Nq}(M) \frac{ql_{ref}}{2V_\infty} \\
C_{Mx} &= C_l(M, \alpha_c, \phi) + C_{lp}(M) \frac{pl_{ref}}{2V_\infty} \\
C_{My} &= C_m(M, \alpha_c, \phi) + C_N(M, \alpha_c, \phi)X_{cg} + C_{Nq}(M)(X_{cg} - X_{cpq}) \frac{pl_{ref}}{2V_\infty} \\
C_{Mz} &= C_n(M, \alpha_c, \phi) + C_Y(M, \alpha_c, \phi)X_{cg} + C_{Yr}(M)(X_{cg} - X_{cpr}) \frac{rl_{ref}}{2V_\infty}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 M 為飛彈的馬赫數，在量測係數時是採用風洞平衡座標表示為 C_{N1} 、 C_{Y1} 、 C_{m1} 、 C_{n1} 。將 C_{N1} 、 C_{Y1} 、 C_{m1} 、 C_{n1} 轉換到體座標的轉換公式如(6.2)。

$$\begin{aligned}
C_N &= C_{N1} \cos \phi + C_{Y1} \sin \phi \\
C_Y &= -C_{N1} \sin \phi + C_{Y1} \cos \phi \\
C_m &= C_{m1} \cos \phi + C_{n1} \sin \phi \\
C_n &= -C_{m1} \sin \phi + C_{n1} \cos \phi
\end{aligned} \tag{6.2}$$

上列的係數使用查表法求得，查表時需要的輸入訊號為馬赫數、全攻角和風向角。得到以上的氣動係數後即可算出體座標之下的氣動力和力矩，如(6.3)和(6.4)。

$$F_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{FX} S \\ \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{FY} S \\ \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{FZ} S \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{Mx} S l_{ref} \\ \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{My} S l_{ref} \\ \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_{Mz} S l_{ref} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

其中 ρ 為空氣密度， l_{ref} 為參考長度， $S = \frac{1}{4} \pi l_{ref}^2$ 為參考面積。

6.4 大氣重力(ATMO)

大氣重力方塊計算飛彈所在高度的空氣密、音速、溫度與重力。這些都跟高度有關。我們假設在模擬的時候地球為平面，所以重力只有向下的 z 分量。重力 z 分量的公式為

$$g_z = \frac{GM}{(R_e - r_{mz})^2} \quad (6.5)$$

其中 G：萬有引力係數 (6.67×10^{-11})

M：地球質量 (5.97×10^{24} kg)

Re：地球半徑 (6.372×10^6 m)

$-r_{mz}$ ：飛彈高度 (m)

大氣壓力和溫度可以利用高度作為輸入參數查出需要的參數並使用以下公式得到[13]，當標準溫度下降率不為零時使用(6.6)式計算飛彈所在高度的氣體壓力，標準溫度下降率為零時使用(6.7)式計算飛彈所在高度的氣體壓力，而(6.8)式為計算大氣溫度

$$Pa = P_b \cdot \left[\frac{T_{mb}}{T_{mb} + L_{mb}(-r_{mz} - h_b)} \right]^{\left(\frac{g_0 \cdot M_0}{R \cdot L_{mb}} \right)} \quad (6.6)$$

$$Pa = P_b \cdot \exp \left[\frac{-g_0 \cdot M_0 \cdot (-r_{mz} - h_b)}{R \cdot T_{mb}} \right] \quad (6.7)$$

$$temp = (-r_{mz} - h_b) \cdot L_{mb} + T_{mb} \quad (6.8)$$

其中 P_b ：靜態氣壓 (pascals)

T_{mb} ：標準溫度(kelvins)

L_{mb} ：標準溫度下降率 (kelvins per meter)

$-r_{mz}$ ：飛彈高度(m)

h_b ：b 層的底部高度(meters, e.g., h1 = 11,000 meters)

R：理想氣體常數(8.31432 N m / (mol·K))

g_0 ：重力加速度(9.80665 m/s²)

M_0 ：氣體莫爾質量 (0.0289644 kg/mol)

空氣密度利用算出的大氣壓力和溫度可以算出

$$\rho = \frac{M_0 \cdot Pa}{R \cdot temp} \quad (6.9)$$

音速則由(6.10)式算出

$$ss = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot temp}{M_0}} \quad (6.10)$$

其中 γ ：絕熱指數(adiabatic index) (假設值為 1.4)

第七章、模擬結果

本章整理六自由度攔截模擬的結果，考慮一個典型的攔截狀況，飛彈由地面定點發射，方向角由飛彈目標相對位置及速度決定。第一節為自由飛行，第二節點火之後進入中途導引階段，一直到 40 公里鎖定為止。中途導引的控制初期是利用第二節的 TVC 來達成。終端階段姿態控制採線性控制器且以 PWM 合成的方式來實現開關式推力器的形式，轉向控制則是採用真比例導引命令，同樣以 PWM 合成來實現。我們的初始條件設定如下：

目標初始位置 (420, -243, -285) 公里。

飛彈初始位置 (0, -10, -0.01) 公里。

目標初始速度 (-1299, 750, 0) 公尺/秒。

飛彈初始速度 (0, 0, 0) 公尺/秒。

飛彈的初始姿態角 $(\phi, \theta, \psi) = (0, 70, -27.9)$ 度。

第一節燃料的燃燒時間 $t_{b1} = 16$ 秒。

第一節脫離時間 $t_{s1} = 25$ 秒。

第二節點火時間 $t_{f2} = 34$ 秒。

第二節燃料的燃燒時間 $t_{b2} = 36$ 秒。

第二節脫離時間 $t_{s2} = 75$ 秒。

第三節點火時間 $t_{f3} = 80$ 秒。

考慮理想狀況下，模擬的結果顯示全部飛行時間為 168.8 秒，飛彈於中途結束時(70 秒)的零力誤失距離為 50.6 公尺，所估的剩餘飛行時間為 98.53 秒，相當接近實際的剩餘飛行時間。飛彈於 80 秒啟動轉向及姿態控制系統、紅外線尋標器於 40 公里鎖定目標的時間為 158.5 秒，距離攔截的時間約 10.3 秒。

飛彈攔截目標的三維軌跡如圖 7.1。第一張圖為飛彈與目標三維的飛行軌跡圖，下面兩張圖分別為二維的水平平面軌跡圖和垂直平面軌跡圖。由攔截軌跡可以看出飛彈是由地面朝著西北方發射，目標是在高空中朝著東南方飛行。圖 7.2

為飛彈和目標的高度隨時間變化曲線，攔截發生的高度約為 156 公里，距離發射為時 168.8 秒。圖 7.3 為目標與飛彈的馬赫數對時間圖形。

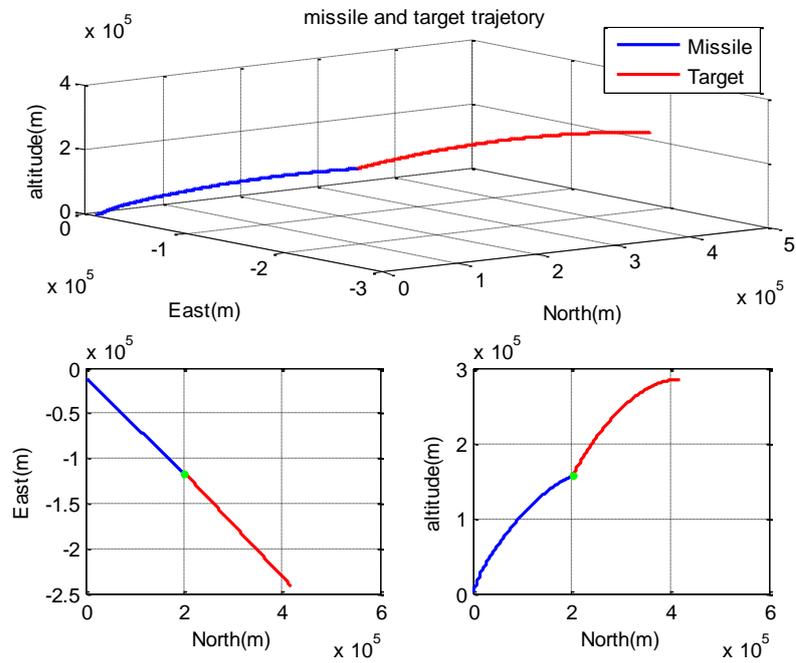


圖 7.1 飛彈攔截軌跡圖

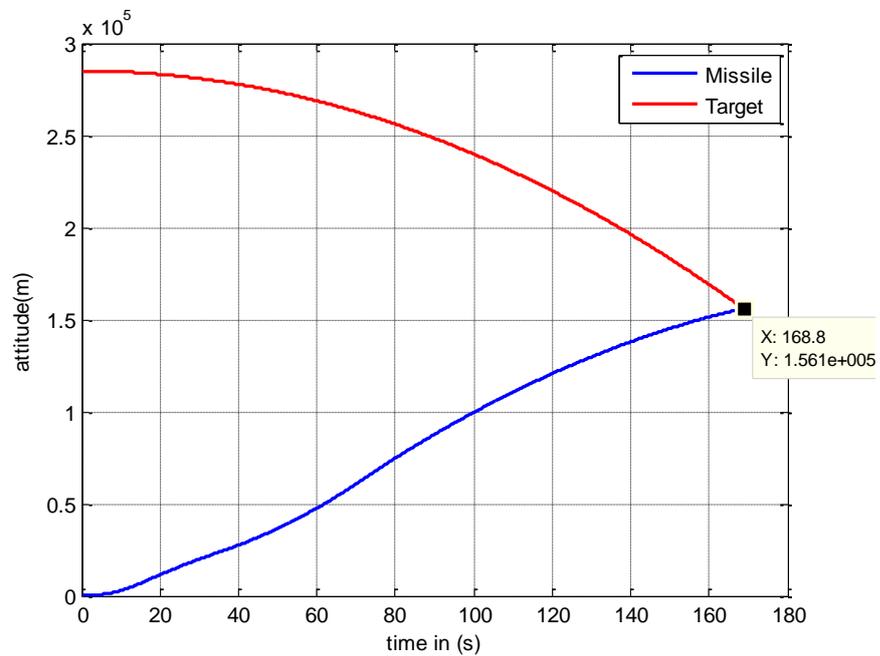


圖 7.2 高度對時間圖

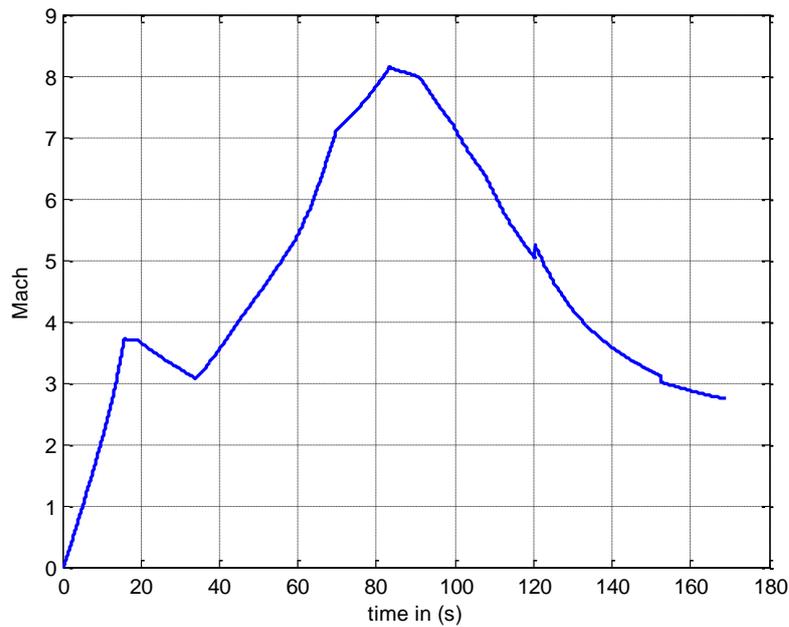


圖 7.3 馬赫數對時間圖

圖 7.4 為尤拉角示意圖，由上到下分別為翻滾角、俯仰角、偏航角。圖中可以看出 34 秒之後第二節火箭點火，飛彈開始受到姿態控制。翻滾角在 34 秒之後都控制為零度，這是避免翻滾角過大造成其他姿態角在控制上發生錯亂。俯仰角發射時為 70 度，但是當第一節火箭在做推進時受到氣動力的影響而仰角變小，到了第二節點火前仰角為 53 度。偏航角發射前計算出應為 -27.9 度發射，到第二節點火時由中途導引律修正角度才突然產生 1 度的變化。而 80 秒之後則為第三節姿態控制的部分。

圖 7.5 左上為第二節火箭的俯仰角指令與實際俯仰角比較圖，右上圖為控制俯仰角的推力噴嘴轉動角度。下面兩張圖則是偏航角的部份。在設計姿態控制時並沒有考慮氣動力，因此實際的角度控制與理想的會有些差別。在 34 秒時因為動態壓力還比較大再加上需要改變的姿態角度比較大所以有點沒跟上指令，不過到了 40 秒之後就能隨時跟上指令的變化。圖 7.6 為飛彈加速度在體座標下的三個分量。

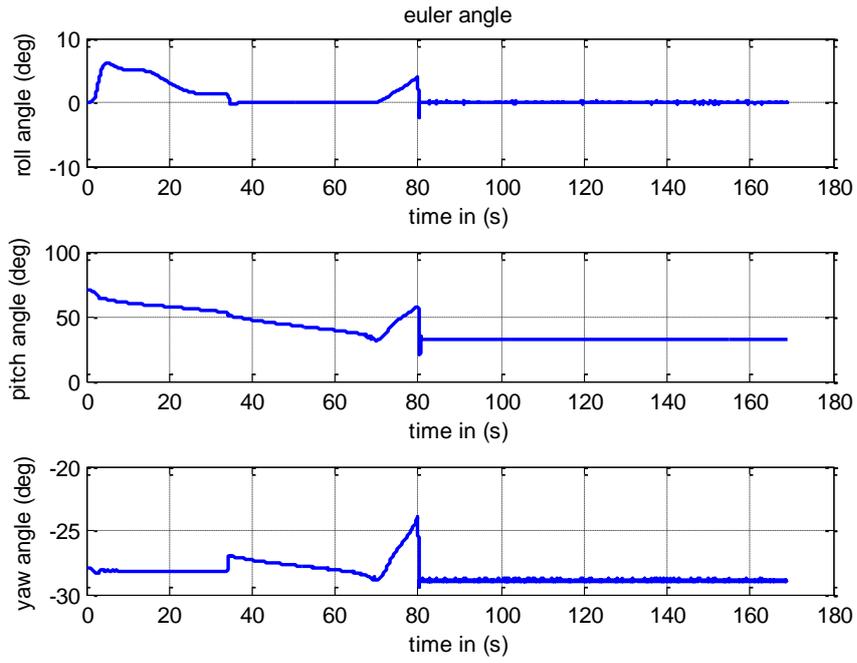


圖 7.4 尤拉角對時間圖

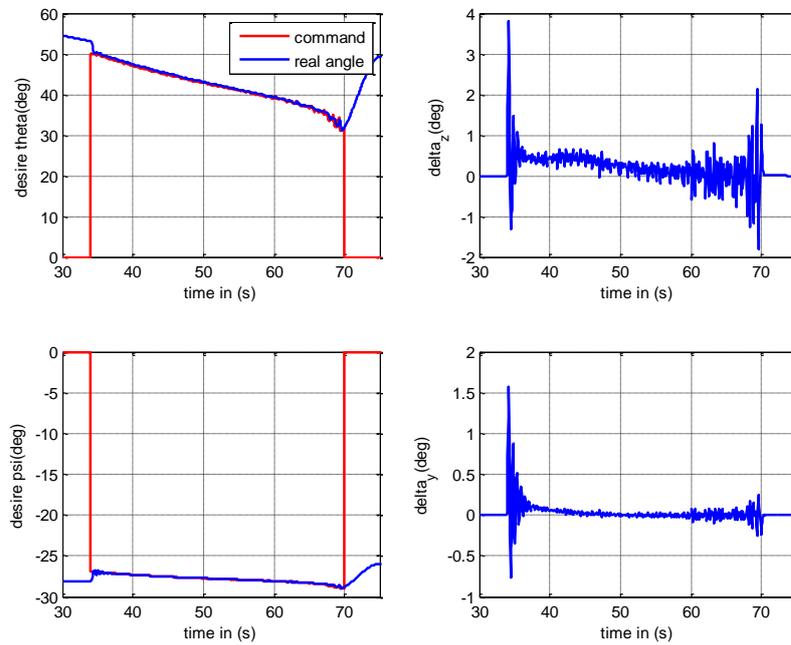


圖 7.5 第二節偏航角俯仰角命令、噴嘴轉動對時間圖

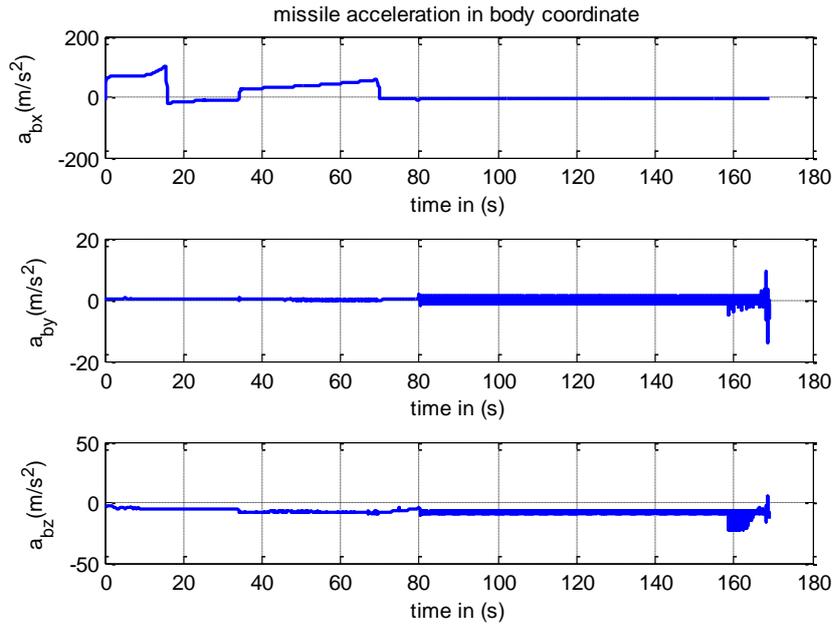


圖 7.6 體座標下飛彈加速度對時間圖

圖 7.7 的第一張圖為攻角隨時間的變化曲線，剛發射的時候因為仰角為 70 度，受到氣動力影響以致攻角較大，6 秒後穩定攻角幾乎為零，到了 34 秒第二節火箭點火飛彈受到姿態控制轉向，這時由於飛彈的姿態轉向但是速度方向並沒有馬上跟著轉向而產生攻角和側滑角。

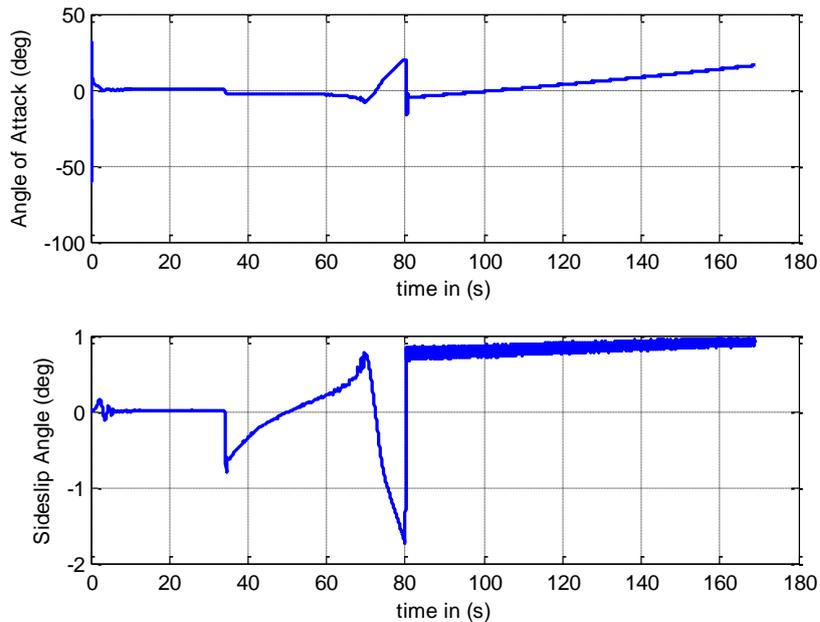


圖 7.7 攻角與側滑角對時間圖

圖 7.8 和圖 7.9 分別為剩餘飛行時間，預測的誤差(ZEM)和飛彈與目標的相對距離。在 40 秒時估計剩餘時間為 149.3 秒多估了 20.5 秒，到了 70 秒時估計剩餘時間為 98.53 秒少估了 0.31 秒，可見剩餘時間的估計是越來越準確，中途導引控制時間為 36 秒，只要在這 36 秒裡可以達到準確即可。若要開啟第三階段的中途導引，則在第三節點火的時間即第 80 秒也必須要求準確以算出噴嘴正確的開啟時間。第二節火箭脫離後預測的 ZEM 為 29.87 公尺。由圖 7.9 的第二張可看出飛彈擊中目標。飛彈與目標的相對距離利用相對位置的三個分量平方相加後開根號可算出，發射前相對距離為 558.5 公里。

圖 7.10 和圖 7.11 分別為燃料消耗及火箭脫離所造成的質量變化，由圖 7.10 也可以明顯看出第一階段及第二階段的段燃燒時間和脫離時間，由圖 7.11 看出第三階段的姿態控制開啟時間為 80 秒，在 158.5 秒時進入 40 公里的鎖定狀態開啟轉向噴嘴。

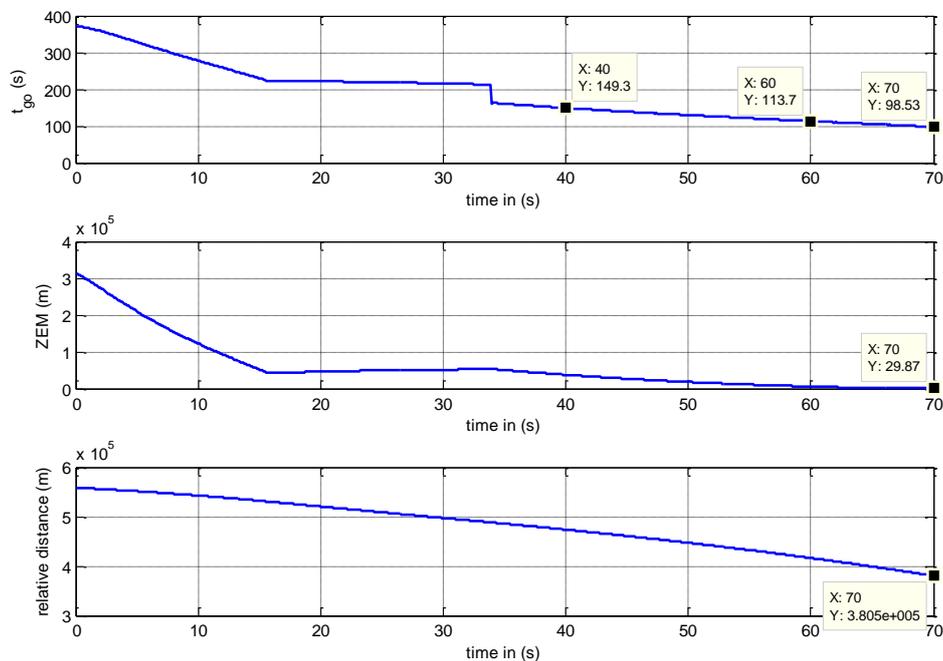


圖 7.8 飛彈第一節和第二節的剩餘飛行時間、ZEM、相對距離對時間圖

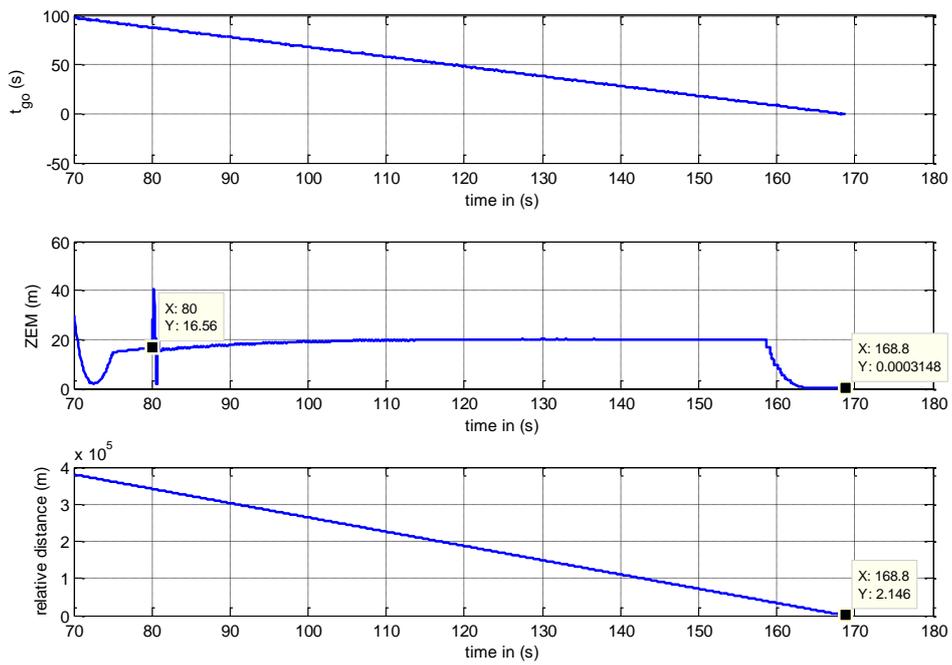


圖 7.9 飛彈第三節的剩餘飛行時間、ZEM、相對距離對時間圖

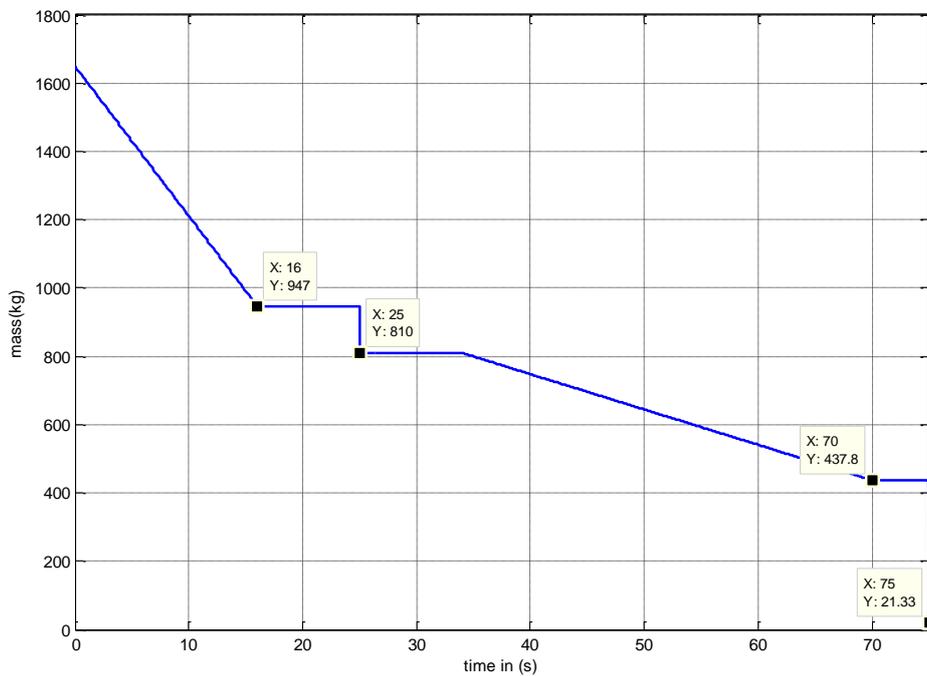


圖 7.10 飛彈第一節和第二節的質量消耗

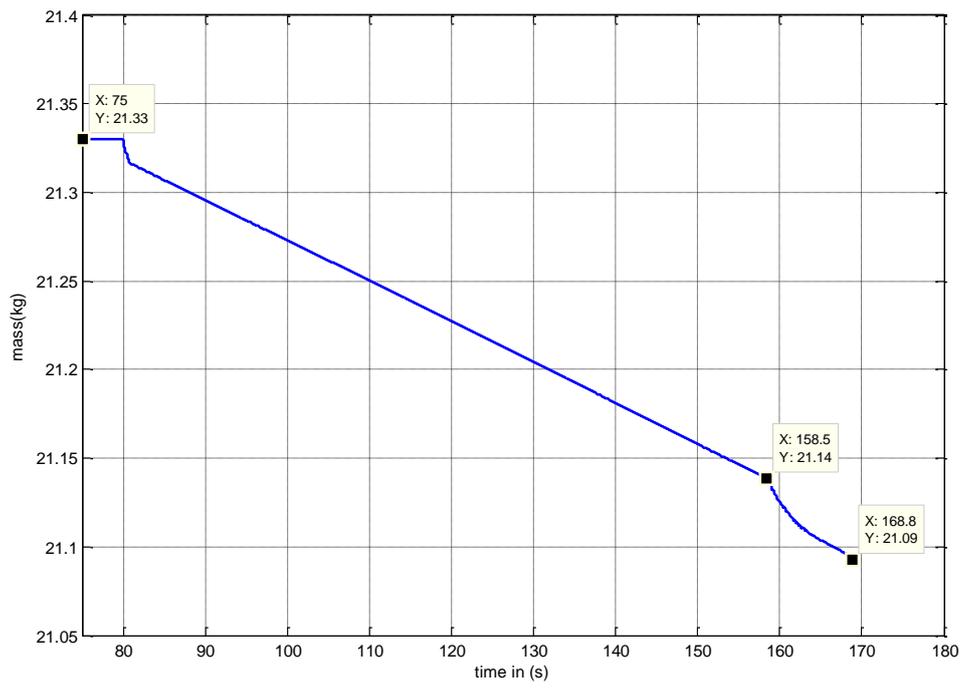


圖 7.11 飛彈第三節的質量消耗圖

第八章、結論及討論

本研究以美國標準三型飛彈為藍本，提出一個兩節推力加上截殺彈頭的攔截飛彈結構。攔截飛彈發射之後，第一節脫離第二節點火之後進入以推力向量為致動的中途導引階段，第二節脫離之後啟動彈頭的轉向與姿態控制系統做必要修正，當紅外線尋標器鎖定目標之後進入終端導引直致命中。六自由度攔截模擬顯示這樣的構想相當可行，所設計的中途導引律、終端導引律及配合的控制系統均能發揮功能。根據數學模式的模擬到實際系統的發展當然還有很長的距離，這個研究的成果提供幾點結論或許可供未來發展做參考：

- (一) 線性控制設計可行。中途導引階段的控制及終端導引的姿態控制均採用線性角度及速率回授，模擬結果顯示控制均可達到預期效果。
- (二) 第三節轉向與姿態的開關式推力器控制可用脈衝寬度調變(PWM)合成的方式來實現。經過選擇適當的 PWM 頻率後可以有很好的效果。
- (三) 紅外線尋標器鎖定的距離對攔截有關鍵的影響。模擬均採用 40 公里鎖定，終端階段持續約 10 秒。鎖定的距離愈短，時間愈短，轉向推力必須越大，姿態控制愈困難。

後續研究

在目前考慮的攔截飛彈兩節加彈頭的架構下，如果要進一步提升攔截的效能，仍有一些問題可再深入討論，列舉如下：

- (一) 第一節第二節推力器的能量分配及推力大小的決定。在總衝量固定的條件之下，如何分配燃料及推力大小(或燃燒時間)才能在大氣的影響之下，將能量做最佳的利用。
- (二) 第一節推力器脫離之後至第二節推力器點火之間的巡航時間(coast time)如何最佳化。
- (三) 中途導引律最佳化設計及最大攔截防禦區間分析。

參考文獻

- [1] “探空五號發動機設計審查報告”，中科院二所固推組，2005 年 6 月。
- [2] 美國雷神公司，資料由陳科祥博士提供，2006 年 7 月。
- [3] 陳科祥，“轉向與姿態控制研究初步分析”，中科院二所飛行控制組，2009 年 5 月。
- [4] B. Etkin, “*Dynamics of Atmospheric Flight*,” Wiley, 1972.
- [5] Herbert Goldstein, *Classical mechanics*, 2nd edition, Section 4-5, pp.148-158, Appendix B, pp.608-610, Addison-Wesley publishing company, 1980
- [6] 楊憲東，「自動飛行控制：原理與實務」，全華科技圖書，台北，2002。
- [7] “Secant method”, http://en.wikipedia.org/wiki/Secant_method.
- [8] Tahk, M.J., Ryoo, C.K. and Cho, H., “Recursive time-to-go estimation for homing guidance missile,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, Vol.38, No.1, 2002.
- [9] Newman, B., “Strategic intercept midcourse guidance using modified zero effort miss steering,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.19, No.1, pp.107-112, 1996.
- [10] 林清安，“轉向與姿態導控系統設計”，國防科技學術合作研究計畫成果報告，計畫編號 NSC-96-2623-7-009-011-D，2007 年 3 月。
- [11] 郭清晨，「常值推力姿態控制方法研究」，碩士論文，哈爾濱工業大學，2006 年 6 月。
- [12] K. H. Keinitz and J. Bals, “Pulse modulation for attitude control with thrusters subject to switching restrictions”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 9, pp.635-640, 2005.
- [13] “Atmospheric pressure”, http://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure.

- [14] 「透析美 2008 年中共軍力報告書意涵」
<http://www.youth.com.tw/db/epaper/es001001/M97.04.07-A.htm>
- [15] 「東風系列飛彈」
<http://linsouth.myweb.hinet.net/web/weapon/c-3.htm>
- [16] 陳科祥，「由標準飛彈三型發展看防禦需求發展方向」，中科院新新月刊，
35 卷 2 期，2007 年 4 月
- [17] 「美國海基導彈射星首枚集中間諜衛星」
<http://big5.thethirdmedia.com/g2b.aspx/ido.3mt.com.cn/Article/200802/show916275c30p1.html>
- [18] Cho, H., Ryoo, C.K. and Tahk, M.J., “Implement of optimal guidance laws using predicted missile velocity profiles,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.22, No.4, 1999.
- [19] Newman, B., “Robust conventional based midcourse guidance for spacecraft intercepts” *Proceedings of the American Control Conference*, Vol.5, 21-23, pp. 3116-3120, June.1995.