

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫  成果報告  
 期中進度報告

## 最佳經濟批量排程問題之延伸研究

計畫類別： 個別型計畫  整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2221-E-009-186-MY2

執行期間：97 年 08 月 01 日至 99 年 07 月 31 日

執行機構及系所：國立交通大學 運輸科技與管理系

計畫主持人：姚銘忠

共同主持人：

計畫參與人員：許天成、辜珮甄、張巍翰、陳世杰、蔡宜霖、朱怡樺、  
李依潔

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告  完整報告

本計畫除繳交成果報告外，另須繳交以下出國心得報告：

赴國外出差或研習心得報告

赴大陸地區出差或研習心得報告

出席國際學術會議心得報告

國際合作研究計畫國外研究報告

處理方式：除列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年  二年後可公開查詢

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月 三 十 一 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 最佳經濟批量排程問題之延伸研究

### On the Extensions of the Economic Lot Scheduling Problems

計畫編號：NSC 97-2221-E-009-186 -MY2

執行期限：97年08月01日至99年07月31日

主持人：姚銘忠 國立交通大學 運輸科技與管理系

#### 一、中文摘要

經濟批量排程問題是針對單一生產設備的數種產品，探討其批量大小，並調整其週期生產的排程，使其生產計劃為可行，又能滿足顧客的需求，且平均總成本達到最小的存貨控制問題。在本計畫中，希望配合產品與製造性系統的特性，將經濟批量排程問題進行延伸研究。

在許多產業，決策者正面對產品具有損耗特性下之經濟批量排程問題，例如：(1)蔬菜、水果、生鮮食品等易腐敗之食物；(2)汽油、酒精等揮發性之液體；(3)電子元件之功能退化、輻射性物質蛻變、底片的變質、藥物過期所導致的失效等。本計畫第一年計畫名稱為：「在產品具損耗特性下之最佳經濟批量排程問題與三種排程策略比較之研究」，探討下列兩個研究主題：

研究主題一：在求解產品具損耗特性下之經濟批量排程問題之最佳解搜尋演算法

因為主持人已經發表論文的研究方法，無法應用於「一般整數策略」下的求解，而且對於求解大型問題時，收斂速度通常較慢。故在求解方法的設計上，本研究計畫希望可以直接針對產品具有損耗特性下之經濟批量排程問題的數學模式，進行比較深入的理論分析，並透過最佳解結構的探討，設計搜尋演算法。

研究主題二：在經濟批量排程問題中，常用

的三種排程策略之比較

文獻中未見有學者提出研究論文，對於經濟批量排程問題常用的三種排程策略，在不同的參數組合下，進行求解品質之比較。因為此關乎決策者面對問題時，應該選擇何種排程策略，直接影響其求解品質，故為一個非常重要的議題。

另外，在許多產業中（例如：金屬沖件、電子裝置、汽車、油漆、飲料、動物食品、紡織品及地毯等產業），生產系統擁有平行的多部機台，決策者正面對多機經濟批量排程問題，此為本計畫今年所探討經濟批量排程問題之延伸研究。本研究第二年計畫名稱：「求解相同與異質平行機台生產系統中最佳經濟批量排程問題之研究」，探討下列兩個研究主題：

研究主題一：求解相同平行機台生產系統中之最佳經濟批量排程問題

在本研究主題下，希望運用朝兩個方向進行探討：(1)運用啟發式程序或動態批量法的排程策略，分別在「二冪策略」及「一般整數策略」下進行求解；(2)直接針對數學模式，進行比較深入的理論分析，並透過最佳解結構的探討，設計搜尋演算法，使其求解速度比文獻中的解法更快，求解的品質更加穩定。

研究主題二：求解異質平行機台生產系統中之最佳經濟批量排程問題

本研究主題希望探討下列兩個方向：(1)將主持人先前求解相同平行機台生產系統中

之最佳經濟批量排程問題運用的「遺傳演算法」，將其延伸於異質平行機台生產系統中進行求解；(2)將第一個研究主題中，對於相同平行機台經濟批量排程問題所得的理論分析與最佳解結構的探討，嘗試延伸於異質平行機台生產系統中，設計搜尋演算法，尋求另一個效率與品質較好的求解方法。

本計畫的研究成果，將可以提供生產管理經理人，擬行最佳的生產計畫、批量與排程決策之參考。

**關鍵詞：**經濟批量排程問題、排程策略、平行機台、遺傳演算法、搜尋演算法。

## Abstract

The objective of the Economic Lot Scheduling Problem (ELSP) is to determine the lot size and the schedule of production of each item so as to minimize the total cost incurred per unit time. We would like to extend the conventional ELSP to incorporate with the characteristics of products and manufacturing systems in the real world in this proposal.

In many industries, the production managers face the ELSP with deteriorating products, *e.g.*, (1) direct-spoilage products, vegetable, fruit and fresh food etc.; (2) physical-depletion products, *e.g.*, gasoline and alcohol etc.; (3) deterioration-products, such as radiation change, negative spoiling and loss of efficacy in inventory, *e.g.*, electronic components and medicine.

The topic of the project in the first year is “*On the Optimal Strategies of the Economic Lot Scheduling for Deteriorating Products and Comparison Analysis among Three Scheduling Strategies*”.

We would like to investigate the following two research topics.

**Sub-topic 1:** *Solving the Economic Lot Scheduling Problem with Deteriorating*

## *Products Using an Optimal Search Algorithm*

We note that the solution approach presented in the author’s past study is *not* applicable to the problem using the general-integer policy. On the other hand, the convergence rate of the proposed genetic algorithm may turn to be unattractive when the problem size becomes large. We would like to investigate the optimality structure of the problem and design an optimal search algorithm based on our theoretical results.

**Sub-topic 2:** *Comparison Analysis among Three Scheduling Strategies for the Economic Lot Scheduling Problem*

We did not find any research article that compares the three commonly-employed scheduling strategies for the ELSP in the literature. We would like to test the three scheduling strategies using different parameter combinations, and provide suggestions for the decision makers before they solve the ELSP.

On the other hand, the decision makers in many industries, *e.g.*, metal press, electronic devices, automobile, paint, drink, pet food, textile and carpet industries, encounter the ELSP with identical or heterogeneous parallel production facilities. This leads to an extension of the conventional ELSP, which is our second-year project, namely, “*On Solving the Optimal Strategies for the Economic Lot Scheduling with Identical and Non-identical Parallel Facilities*”. We investigate the following two sub-topics in this project.

**Sub-topic 1:** *An Optimal Search Algorithm for Solving the Economic Lot Scheduling Problem with Identical Parallel Facilities*

In this study, we would like to attack this problem using two approaches: (1) apply a heuristic procedure or the dynamic lot scheduling approach to generate a feasible

production schedule, and (2) conduct full theoretical analysis on the mathematical model and design an optimal search algorithm. Then, we may compare the solution quality and the efficiency of the both solution approaches.

**Sub-topic 2: New Solution Approaches for Solving the Economic Lot Scheduling Problem with Non-identical Parallel Facilities**

We employ two approaches to solve the concerned problem in this study: (1) modify the genetic algorithm proposed in the author's previous study, and apply it to solve the problem here, and (2) conduct full theoretical analysis on the mathematical model and design an optimal search algorithm based on our theoretical results. Then, compare the two approaches using random experiments.

We strongly believe that the deliveries of our project shall serve an important foundation for establishing a Decision-Support System (DSS) or an Advanced Planning and Scheduling (APS) for production managers in industries.

**Keywords:** Economic Lot Scheduling Problem, Scheduling Strategies, Parallel Facilities, Search Algorithm

**二、緣由與目的**

基於現實生活中更合理的假設，本研究將損耗性因素納入 ELSP 模式中探討。由於 ELSP 已被確認是一個難解的非多項式演算法 (NP-hard) 可解的存貨問題，原本就不易確保所求的解為合理可行，而在多部平行機台的情境下，會使得問題更趨複雜。

總括來說，本研究旨在個別探討對產品具有損耗特性下及多部平行機台的之經濟批量排程的生產模式，使用不同的數學模式與結合啟發式演算法來獲得一個確實可行、成本更低的生產計劃排程。

**三、研究報告應含的內容**

**第一年計畫之研究成果**

**第一研究主題的內容：在求解產品具損耗特性下之經濟批量排程問題之最佳解搜尋演算法**

第一研究主題的研究成果彙整如下：

**1. 考慮損耗品存貨的經濟批量排程問題之數學模式**

$$\text{Minimize } TC(k_1, \dots, k_n, B) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right\} \quad (3.1)$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^n w_{i\varphi(t,i)} [(s_i + \beta_i(k_i, B))] \leq B, \quad t = 1, 2, \dots, K \quad (3.2)$$

$$\sum_{t=1}^{k_i} w_{it} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} w_{it} = 1, & \text{機器 } i \text{ 在第 } t \text{ 基期有進行維修} \\ w_{it} = 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$K = lcm(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (3.4)$$

$$\varphi(i, t) = \begin{cases} t \bmod k_i, & \text{if } t \neq \gamma k_i, \gamma \in N \\ k_i, & \text{if } t = \gamma k_i, \gamma \in N \end{cases} \quad (3.5)$$

其中， $H_i = d_i(\theta_i \xi_i + h_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$

**2. 理論分析**

總成本函數可以表達成式(4.1)。

$$TC(k_1, \dots, k_n, B) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right\} \quad (4.1)$$

其中  $H_i = d_i(\theta_i \xi_i + h_i)$ 。

定義個別產品  $i$  之成本曲線為  $\Phi_i(k_i, B)$ ，如下所示：

$$\Phi_i(k_i, B) \equiv \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B$$

令  $\Gamma_i(B) = \min_{k_i \in \mathbb{N}^+, i=1, \dots, n} \left( \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right)$  表示個別

產品  $i$  之成本函數  $\Phi_i(k_i, B)$  在各個  $B$  值之最低值所構成的片段凸性曲線。我們把所有總成本函數  $TC(k_1, \dots, k_n, B)$  的最低部份命名為  $\Gamma(B)$ ，即

$$\Gamma(B) = \inf_{B>0} \left\{ \sum_{i=1}^n \Gamma_i(B) \right\}$$

**Lemma 1:**  $\Gamma_i(B)$  對  $B$  是一個片段凸性的函數。

**Proposition 1:**  $\Gamma(B)$  對  $B$  為一片段凸性的函數

在此我們將介紹在  $\Gamma(B)$  函數曲線上的接合點(Junction Point)。首先定義接合點是在片段凸性函數中，於特定時間  $T$  上之兩個連續曲

線的交點。首先令兩鄰近函數  $\Phi_i(k_i, B)$  之差為  $\Delta_i(k_i, B)$ ；即  $\Delta_i(k_i, B) = \Phi_i(k_i + 1, B) - \Phi_i(k_i, B)$

$$= -\frac{a_i}{B(k_i + 1)k_i} + \frac{1}{2}H_i B$$

透過  $\Delta_i(k_i, B) = 0$ ，可以得到接合點位置之公式，如下所示：

$$\delta_i(k_i) = \sqrt{2a_i / H_i(k_i + 1)k_i}$$

**Proposition 2**：  $\Gamma(B)$  曲線繼承  $\Gamma_i(B)$  曲線所有接合點的特性。

**Lemma 2**：假設  $k_L^*$  和  $k_R^*$  分別是在  $\Phi_i(k_i, B)$  凸性函數上接合點 ( $w$ ) 兩邊的最佳乘數，則  $k_L^* = k_R^* + 1$ 。

延伸 Lemma 2 的觀念，我們可以得到 Corollary 1，如下所示：

**Corollary 1**：在一給定的時間點  $B$ ， $\Phi_i(k_i, B)$  函數的最佳乘數，如下所示：

$$k_i^*(B) = \begin{cases} 1, & B > \delta(1) \\ m, & \delta(m) \leq B < \delta(m-1) \end{cases}$$

**Theorem 1**：假設  $\mathbf{k}^{(L)}$  和  $\mathbf{k}^{(R)}$  分別是在  $\Gamma(B)$  函數上接合點左右兩邊的最佳乘數向量，則  $\mathbf{k}^{(L)}$  可藉由  $k_i^{(L)} = k_i^{(R)} + 1$  從  $\mathbf{k}^{(R)}$  中獲得。

我們先定義  $\bar{B}$  是  $\Gamma(k_1, \dots, k_n, B)$  函數曲線中，對應於最佳乘數  $k_i$  的局部最小值之時間位置， $\bar{B}$  的封閉解(close form)可由式(4.11)求解得

$$\bar{B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n k_i} / \sum_{i=1}^n H_i k_i}$$

### 3. 可行解測試演算法

Proc. FT演算過程為先使用6.2節所定義的Proc. IS程序來產生一組初始的生產排程  $W$  和計算  $L(W)$ 。由Proc. FT啟發式解法的定義，我們將第一次使用Proc. IS程序所得到的初始生產排程  $W$  設為最佳生產排成  $W^*$ ，而  $L^*$  則為最佳生產排程中機台的最大工作負載量，意即  $W^* = W$  和  $L^* = L$ 。很顯然的如果  $L^* \leq B$ ，也就是對所有  $lcm\{k_i\}$  個基期中，機台的工作負載都不會超過基本週期  $B$  的長度，亦即  $W$  是一個合理的生產排程。我們定義  $\varphi$  指標來代表經由Proc. FT演算是否可以得到一組合理的生產排程解。如果可以，我們便令  $\varphi = 1$ ，否則  $\varphi = 0$ 。當  $\varphi = 0$  時，我們使用排程撫平程序 (Proc SS, 定義於6.3 節) 來改善  $L^*$ ，直到  $\varphi = 1$  或者  $L^*$  已無法改善。此時我們稱初始的生產排程  $W$  經過一次的Proc. FT程序而無法改善得到一組合理解。當  $L^*$  連續  $\Upsilon$  次經Proc. FT程

序而無法改善時，則停止Proc. FT 演算。我們定義  $L^*$  連續無法改善的次數為  $\chi$ ，當  $\chi \leq \Upsilon$  時，則隨機選取上次Proc. FT演算最終的生產排程之一半子集合將之固定，利用Proc. IS供再改善  $L^*$  的初始排程，重新另一次的區域搜尋與排程改善。最後決定是否終止Proc. FT演算法的臨界值  $\Upsilon$ ，則是決策分析者(4.8)策參數。

### 4. 數據實驗

本研究利用 Elmaghraby (1997) 和 Fujita (1978) 文獻的六個數值範例進行實驗，並定義失誤測量指標(Error Measure Index ; EMI)如下：

$$EMI = (TC_{ProT}^*(K^* * B^*) - TC^{IS}) / TC^{IS} * 100\%$$

對每一個實驗數據皆進行 30 次實驗，結果如表 1 所示；其中 Avg EMI 表示平均失誤測量指標，Avg RT 表示平均實驗時間。

表 1：六個範例的實驗數據

Data set	$\sum_{i=1}^n \rho_i$	$TC_{ProT}^*(K^*, B^*)$	Best EMI(%)	Avg EMI(%)	Avg RT(s)
1	0.8823	45302	0.396	0.396	0.449
2	0.6652	83845	0.99	0.99	0.580
3	0.7104	1258400	24.9	24.12	2.332
4	0.5845	280250	0.2301	0.512	0.343
5	0.4125	52689	0.052	0.102	0.522
6	0.5960	112750	0.0697	0.07	0.03

### 5. 結論

本研究指出在產品具有損耗性可能發生的前提假設下，使用延伸週期法找出損耗性 ELSP 模式下的最佳解。在探討損耗品 ELSP 模式，經由前面章節推導出在若干現實生活中可能發生的特定條件下，運用延伸週期法的封閉解(closed-form solution)即為該模式之最佳解。在捨棄了前提條件的情形下，本研究則利

用以搜尋法得到一組  $(K, B)$  結合Proc FT演算法求解損耗性 ELSP(EBP)模式幫助決策者得到一組較佳的合理可行的排程解。

## 第二研究主題的內容：產品的參數設定對三種 ELSP 解法之績效的影響

第二研究主題的研究成果彙整如下：

本研究以 Bomberger (1966) 的產品參數值域為基礎，用以下幾個產品參數設定方式 (參考圖 1)，以平均分配來隨機產生產品之參數，用來評量 CC 法、TVLS 法和 EBP 法求解 ELSP 之表現。

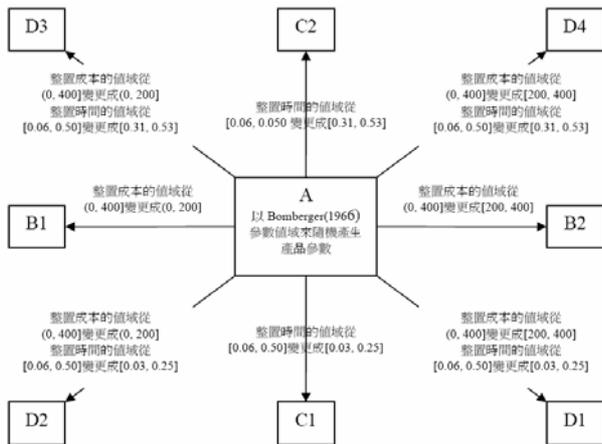


圖 1：不同參數設定的相關性

這些產品參數設定方式可以描述如下：

1. Case A：以 Bomberger(1966) 的參數值域作為建立產品參數的基礎。
2. Case B1：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 (0, 200]，以建立產品的參數。
3. Case B2：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 [200, 400]，以建立產品的參數。
4. Case C1：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.03, 0.25]，以建立產品的參數。
5. Case C2：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.31, 0.53]，以建立產品的參數。
6. Case D1：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 [200, 400]，對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.03, 0.25]，以建立產品的參數。
7. Case D2：以 Bomberger(1966) 的參數值域

為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 (0, 200]，對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.03, 0.25]，以建立產品的參數。

8. Case D3：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 (0, 200]，對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.31, 0.53]，以建立產品的參數。
9. Case D4：以 Bomberger(1966) 的參數值域為基礎，但對置成本的值域從 (0, 400] 變更成 [200, 400]，對置時間的值域從 [0.06, 0.50] 變更成 [0.31, 0.53]，以建立產品的參數。

而在上述各種參數設定情況下，本研究進一步考量以下的測試狀況：

1. 不同程度的負荷程度：負荷程度 ( $= \sum_i d_i / p_i$ ) 從 0.5 到 0.9，以 0.1 作間隔，

劃分成 4 個負荷程度水準。

2. 不同數量的產品數：一個機台生產的產品數有 10、20 和 30 個等三種可能。

因此，本研究討論的測試案例共有 9 種參數設定、4 個負荷程度、3 種產品數和 3 種 ELSP 解法，一共有 324 種組合的測試案例。每一種測試案例隨機產生 20 個測試問題，取其成本的平均數作為該案例的績效表現。

圖 2 是不同的解法和負荷程度之績效表現的示意圖。



圖 2 不同的解法和負荷程度之績效表現的示意圖

圖 3 是一機台生產 10 個產品，在不同的測試案例下 CC 法、TVLS 法和 EBP 法的表現。從圖 3，可以推知以下數點結論：

1. 很明顯地，在大部分的情況下，EBP 法都比 CC 法的表現要來的好。但是整置的成本或時間之值域較小時，EBP 法和 CC 法在負荷程度在(0.8, 0.9]的表現會一樣；若整置的成本和時間之值域同時變小(參考圖 3 的 D3 案例)，則 EBP 法和 CC 法的表現會一樣的負荷程度會有下降的趨勢。這和以往相關文獻認為當負荷程度極大時，CC 法的解答才會和 EBP 法有一樣表現的看法有些出入。
2. 圖 1 清楚地顯示整置成本值域較高或是整置時間值域較低時(參考 B2、D1 和 C1 之案例)，即使是成本上限的 CC 法的表現都會比 TVLS 法來的出色；相反的條件下，TVLS 法的表現便會比 EBP 法來的出色。這是因為在 TVLS 法下各產品的生產次數較為頻繁，整置成本的降低有助於改善 TVLS 法的表現。
3. 觀察 B1 和 B2 以及 C1 和 C2 的配對案例，對 TVLS 法的表現而言，整置的成本和時間兩項參數的重要性應是一樣的。

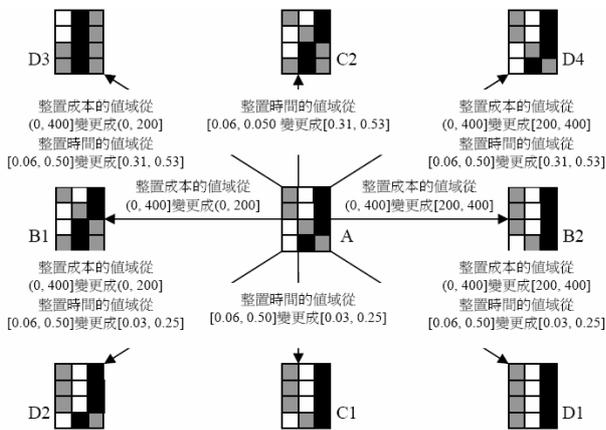


圖 3 一機台生產 10 個產品，不同 ELSP 解法在不同測試案例的表現

### 結論

相較於以基本週期為基礎的 ELSP 解法，TVLS 法是較少學者討論的解法；至今，也沒有文獻來探討以基本週期為基礎的解法和 TVLS 法來討論 ELSP 的求解表現。因此，某些文獻認為 TVLS 法的求解表現會比 CC 法更好。Chang and Yao (2007)指出 TVLS 法的表

現不是很穩定；而產品的整置之成本和時間扮演著關鍵的因素。

本研究以 Bomberger (1966)的產品參數值域為基礎，在變更整置之成本和時間的值域下，來隨機產生測案例。實驗數據顯示，TVLS 法在某些特定狀況下，求解表現甚至會比 EBP 法來的好，但在某些狀況下，TVLS 法會比 CC 法的求解結果來的差。本研究歸納了影響 TVLS 法表現好壞的條件，並提出整置因素影響 TVLS 法表現的原因。

本研究的主要貢獻是清楚地顯示了 TVLS 法和以基本週期為基礎的解法對求解 ELSP 的表現之相關性。這是以往 ELSP 文獻未曾清楚展現的結果。如何以數學模式來分析 TVLS 法的求解表現將是未來的研究方向。

## 第二年計畫之研究成果

本報告第二年執行進度之包含兩個研究主題的內容，即提出兩種方法：(1) 以 EBP 法及 (2) 以動態批量法，求解多機 ELSP 的數學模式。

### 1. 以 EBP 法求解多部平行機台的經濟批量排程問題

#### 1.1 以 EBP 法求解的數學模式

本研究以 EBP 方式求解多機 ELSP 的數學模式如下所示：

$$(P1) \text{ Min } TC(B_1, \dots, B_m, k_1, \dots, k_n)$$

$$= \sum_i \sum_j \left\{ \frac{a_i}{k_i B_j} + \frac{h_i d_i (1 - \rho_i)}{2} k_i B_j \right\} x_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n [(s_i + \rho_i k_i B_j) x_{ij}] w_{i\phi(i,n)} \leq B_j, \quad (2)$$

for  $t = 1, \dots, K(J_j) = \text{lcm}_{i \in J_j} (\{k_i\})$  and  $j = 1, \dots, m$ .

where

$$\sum_j x_{ij} = 1 \text{ for } i = 1, \dots, n \text{ and } x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{k_i} w_{it} = 1, \text{ for } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\left. \begin{cases} w_{it} = 1, & \text{if product } i \text{ is produced in the } t^{\text{th}} \text{ basic} \\ & \text{period} . \\ w_{it} = 0, & \text{otherwise} . \end{cases} \right\}$$

and

$$\varphi(i,t) = \begin{cases} t \bmod k_i, & \text{if } t \neq \gamma k_i, \gamma \in N^+ \\ k_i, & \text{if } t = \gamma k_i, \gamma \in N^+ \end{cases} \quad (5)$$

## 1.2 以 EBP 方式求解的架構

如果將所有 ( $n$  種) 產品之生產，指派至所有之 ( $m$  部) 生產機台，如果每一部機台都可以產生一個可行的生產排程，則各部機台的最佳解求解，可以視為個別的單機經濟批量排程問題。

在單機的經濟批量排程問題，Yao and Elmaghraby (2001) 已經針對無產能限制下的 ELSP，提出完整的理論分析。另外，在 Yao (2001) 及 Yao, Elmaghraby and Chen (2003) 的論文中，提出可行解測試演算法 Proc. FT，在給定產品乘數集合  $\{k_i\}$  及基本週期  $B$  的前提下，可以產生其最佳的生產排程；此一單機的經濟批量排程問題之最佳解解法，因為運用理論分析中的接合點為基本架構，故又稱為接合點搜尋法 (Junction Point Search Algorithm, JPSA)。

本研究的目的是提出兩個方法：兩階段 GA 法和一階段 GA 法，以有效地使用 JPSA 找出多機 ELSP ( $n$  個產品和  $m$  個機台) 的最佳解。此外，Carreno (1990) 是目前已知較佳的多機 ELSP 解法。因此，本研究結合 Carreno 法和 JPSA 作為求解多機 ELSP 的比較基準。這幾個方法的主要差別在於求解多機 ELSP 的指派問題之方法的不同。這幾個方法分別說明如下(如圖 4)：

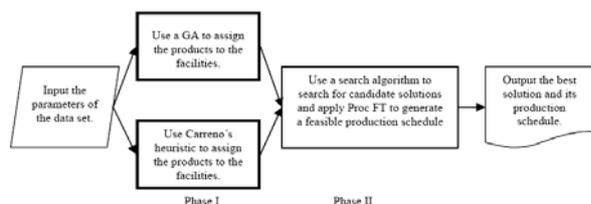


圖 4：以 EBP 法求解的架構

1. Carreno-JPSA 法: 此法使用 Carreno (1990) 的方法來獲得一個合適的指派結果，再用 JPSA 求解各機台的總成本，以求得多機

ELSP 的平均總成本。

2. 兩階段 GA 法：先以 GA 以機台的負荷平衡為目標函數來搜尋指派結果；將收集到的個體(代表一指派結果)依平衡程度從小到大加以排序，再依序使用 JPSA 來求取各機台的平均總成本，以得到多機 ELSP 的總成本。當 JPSA 發現一組指派結果是可行解時，便可停止運算；因為，此方法是基於機台負荷越平衡，則有越高的機會找到多機 ELSP 的最低平均總成本。
3. 一階段 GA 法：GA 以 JPSA 求得所有機台的總成本作為目標函數來搜尋最佳的指派結果。GA 的目標函數即是多機 ELSP 的解答；因此，此方法搜尋到的指派結果即是擁有最低總成本的最佳指派結果。

## 1.3. 使用 JPSA 求解單機 ELSP 的成本

已知 Carreno 法或 GA 的產品和機台的指派結果，則應用 JPSA 求取多機 ELSP 的程序可以概略描述如下：

1. 令  $j=1$ 。
2. 已知單一機台  $j$  生產哪些產品，使用 JP 定位程序找出機台  $j$  的所有接合點  $\{B_j\}$ 。
3. 對機台  $j$  而言，對接合點之  $B_j$  值從大到小加以排序。
4. 使用 K-PoT 搜尋程序找到機台  $j$  的每個接合點相對的產品  $i$  之週期乘數  $k_i$ ，亦即  $\{k_i(B_j)\}$ 。
5. 依據接合點的  $(B_j, \{k_i(B_j)\})$ ，計算出各個接合點的成本  $TC_j(B_j, \{k_i(B_j)\})$ 。
6. 依據  $TC_j(B_j, \{k_i(B_j)\})$ ，將各接合點從小到大加以排序。
7. 使用 Proc FT 找出可以建立可行排程的機台  $j$  之最低成本。
8. 令  $j=j+1$ ，若  $j \leq n$ ，則回到步驟 1，否則結束此程序。

理想上，加總各機台的最低成本，即可得到在該次產品和機台的指派結果下之最低總成本，此即為多機 ELSP 的解。但是，機台  $j$  的最低成本之解答不一定可以建立可行的

排程；因此，對每一機台來說，必須依據找到的接合點(不考慮產能限制之解答)之成本大小，使用 Proc FT (參見：Yao (2001) 及 Yao, Elmaghraby and Chen (2003)之論文)，依序找出可以建立可能排程的最低成本，亦即找出符合產能限制的最低成本之接合點；加總各機台能建立可行排程的最低成本，即為多機 ELSP 的可行解。

#### 1.4. 使用可行解測試演算法產生生產排程

Proc. FT演算過程為先使用Proc. IS程序來產生一組初始的生產排程  $W$  和計算  $L(W)$ 。由Proc. FT啟發式解法的定義，我們將第一次使用Proc. IS程序所得到的初始生產排程  $W$  設為最佳生產排成  $W^*$ ，而  $L^*$  則為最佳生產排程中機台的最大工作負載量，

意即  $W^* = W$  和  $L^* = L$ 。很顯然的如果  $L^* \leq B$ ，也就是對所有  $lcm\{k_i\}$  個基期中，機台的工作負載都不會超過基本週期  $B$  的長度，亦即  $W$  是一個合理的生產排程。

我們定義  $\phi$  指標來代表經由Proc. FT演算是否可以得到一組合理的生產排程解。如果可以，我們便令  $\phi=1$ ，否則  $\phi=0$ 。當  $\phi=0$  時，我們使用排程撫平程序 (Proc SS) 來改善  $L^*$ ，直到  $\phi=1$  或者  $L^*$  已無法改善。此時我們稱初始的生產排程  $W$  經過一次的Proc. FT程序而無法改善得到一組合理解。

當  $L$  連續  $\gamma$  次經Proc. FT程序而無法改善時，則停止Proc. FT 演算。我們定義  $L$  連續無法改善的次數為  $\chi$ ，當  $\chi \leq \gamma$  時，則隨機選取上次Proc. FT演算最終的生產排程之一半子集合將之固定，利用Proc. IS供再改善  $L^*$  的初始排程，重新另一次的區域搜尋與排程改善。

#### 1.5. 數據實驗

本研究利用 Carreno (1990)論文中隨機產生數值範例的隨機實驗。對每一個實驗數據皆進行 30 次實驗，結果如表 1 所示；其中 Avg dev.表示與 IS 方法目標函數值的平均差額(其中，IS 方法為成本的下界值)，Avg RT 表示平均實驗時間。

表 1：三種求解方法的效能的比較

Carreno's (1990) heuristic		The Carreno-GA Approach			The double-GA approach			
No. of products=25, No. of facilities=5								
UF	Avg dev. <sup>*</sup>	Avg. RT <sup>†</sup>	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp. <sup>‡</sup>	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp.
[0.5, 0.6]	5.60%	0.01	2.53%	21.36	3.07%	1.36%	33.13	4.24%
[0.6, 0.7]	10.39%	0.01	4.03%	21.19	6.36%	2.51%	31.74	7.88%
[0.7, 0.8]	12.89%	0.01	5.15%	21.45	7.74%	3.48%	30.62	9.41%
[0.8, 0.9]	13.77%	0.01	9.46%	22.21	4.31%	7.66%	33.46	6.11%
Average	10.66%	0.01	5.29%	21.55	5.37%	3.75%	32.24	6.91%
No. of products=50, No. of facilities=5								
UF	Avg dev.	Avg. RT	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp.	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp.
[0.5, 0.6]	7.91%	0.01	5.17%	38.58	2.74%	1.78%	57.20	6.13%
[0.6, 0.7]	9.62%	0.01	6.07%	38.81	3.55%	2.20%	55.93	7.42%
[0.7, 0.8]	9.66%	0.01	5.83%	40.92	3.83%	3.35%	57.91	6.31%
[0.8, 0.9]	23.07%	0.01	22.36%	50.71	0.71%	20.57%	65.10	2.50%
Average	12.57%	0.01	9.86%	42.26	2.71%	6.98%	59.04	5.59%
No. of products=75, No. of facilities=5								
UF	Avg dev.	Avg. RT	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp.	Avg dev.	Avg. RT	Avg. dev. imp.
[0.5, 0.6]	10.99%	0.01	6.19%	51.28	4.80%	1.82%	78.57	9.17%
[0.6, 0.7]	11.61%	0.01	6.56%	53.60	5.05%	3.45%	79.09	8.16%
[0.7, 0.8]	15.37%	0.01	12.16%	56.61	3.21%	9.40%	83.65	5.97%
[0.8, 0.9]	36.74%	0.01	36.74%	59.79	0.00%	35.68%	87.66	1.06%
Average	18.68%	0.01	15.41%	55.32	3.27%	12.59%	82.24	6.09%

\*: "dev." is an abbreviation for "the deviation from the IS approach".

†: "RT" is an abbreviation for "run time" which is measured in seconds.

‡: "imp. dev." is an abbreviation for "the improvement in the deviation from the Carreno's heuristic".

#### 1.6. 結論

本研究以 Carreno 和兩種以 GA 為基礎的方法來產生指派結果，以 JPSA 和 Proc FT 法來建立各機台的排程；實驗數據指出，一階段 GA 法通常可以取得最佳解，但是計算時間過久。而在相同時間內，兩階段 GA 法可以取得最佳解；這表示以機台負荷平衡作為指派的依據是很好的方法。本研究提出之兩階段 GA 法均可以在合理的計算時間得到品質極佳的解答。

### 2. 以動態批量法求解多機ELSP求解方法

#### 2.1 以動態批量法求解的數學模式

本研究提出以動態批量法 (Time-Varying Lot Sizing, TVLS approach) 求解多機 ELSP 的數學模式如下所示：

(P2)

$$\inf_{q \in F_j} \min_{t \geq 0, u \geq 0, T \geq 0} \sum_{j=1}^m \frac{1}{T_j} \left( \sum_{q=1}^r \frac{1}{2} h^q (p^q - d^q) \left( \frac{p^q}{d^q} \right) (t^q)^2 + \sum_{q=1}^r A^q \right) X_{ij} \quad (6)$$

$$\sum_{q \in Q_{jq}} p_i t^q = d_i T_j \quad (7)$$

$$\sum_{q \in L_{jk}} (t^q + s^q + u^q) = \left( \frac{p^{jk}}{d^{jk}} \right) t^{jk} \quad (8)$$

$$\sum_{q=1, q \in F_j}^{r_j} (t^q + s^q + u^q) = T_j \quad \text{and}$$

$$r_j = \sum_{i \in J_j} x_i \quad (9)$$

$$\sum_j X_{ij} = 1 \quad \text{for all } i \quad (10)$$

Eq. (6) 為動態批量法求解多機 ELSP 的目標函數。其他的限制式保證有一個可行的生產排程：Eq. (7) 在用於生產產品  $i$  的時間所獲得的數量足可以供應產品  $i$  的需求。Eq. (8) 要求每個產品所生產的量足以供給到其到下一個週期再被生產（不至於缺貨）。Eq. (9) 確保所有指派到在機器  $j$  的產品的生產時間、整備時間及閒置時間的總和不會超過其生產週期  $T_j$  以保證有一個可行的生產排程， $r_j$  為指派到機器  $j$  所又產品生產頻率的總和。

## 2.2 兩種解法

本研究提出兩種求解的方法：運用 Carreno's (1990) 啟發式解法及所提出的遺傳演算法將產品指派到各機器上，然後在動態批量法的前提下，再運用 Dobson (1987) 啟發式解法將各機器上的產品進行各個產品求解最佳排程；前者我們稱之為 Carreno-Dobson 啟發式解法，後者我們稱之為 GA-Dobson 演算法。

Carreno-Dobson 啟發式解法的架構，請參見如圖 5。

第二種解法為運用遺傳演算法將產品指派到各機器上，再運用 Dobson (1987) 啟發式解法將各機器上的產品進行各個產品求解最佳排程。遺傳演算法的編碼採整數編碼，請參見圖 6。

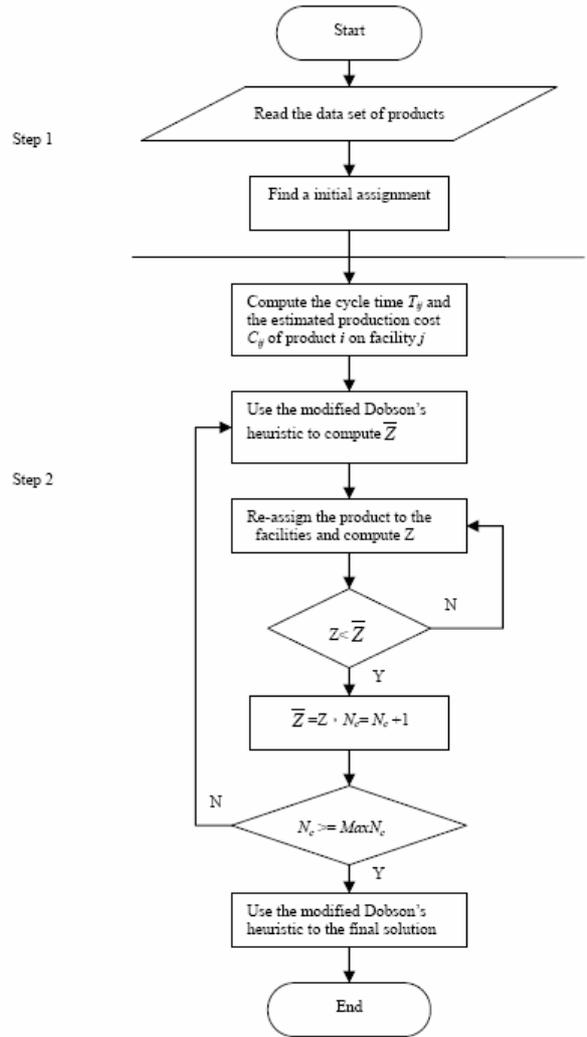


圖 5：Carreno-Dobson 啟發式解法的架構

2	1	2	3	3	1	2	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑ Assign product 1 to facility 2

圖 6：遺傳演算法的整數編碼

在遺傳演算法的選擇機制中，我們採取「輪盤法」(roulette wheel mechanism)。因為本研究問題為將目標值最小化，故我們運用「適應值正規化」(fitness normalization)的手法，計算適當的染色體演化機率。

在遺傳運算子的部分，本研究嘗試過「雙切點交配演算子」(two cut-point crossover operator)及「均勻交配演算子」(uniform crossover operator)。在突變演算子，則以隨機方式挑選基因，然後在隨機選擇 1 至  $m$  之間任一整數，作為機器的重新指派。

## 2.3 數據實驗

本研究運用Carreno (1990)論文中，數據實驗的設計方式，測試四種參數組合：(10, 3), (30, 3), (50, 3) and (75, 3)；每個組合又在稼動率0.5至0.9之間，各隨機產生20個題目進行測試。我們運用Carreno (1990)的啟發式解法，Carreno-Dobson啟發式解法及GA-Dobson演算法三種方法進行求解；求解的品質與時間的比較，彙整於表2及表3。

表 2：三種求解方法的效能的比較

	Carreno's heuristic		Carreno-Dobson's heuristic		GA-Dobson's approach	
	Max(%)	Avg(%)	Max(%)	Avg(%)	Max(%)	Avg(%)
5 products 3 facilities						
[0.5 0.6]	21.42	5.33	423.54	217.23	359.63	173.70
[0.6 0.7]	22.82	6.36	304.00	141.38	197.34	110.96
[0.7 0.8]	23.72	9.10	153.75	84.52	125.35	56.87
[0.8 0.9]	59.87	14.43	151.81	41.31	96.33	22.94
30 products 3 facilities						
[0.5 0.6]	27.68	12.59	101.14	60.59	78.92	47.41
[0.6 0.7]	15.82	8.66	82.89	36.47	64.75	27.67
[0.7 0.8]	22.83	11.44	25.84	9.92	19.90	6.90
[0.8 0.9]	47.44	18.60	30.17	10.25	28.36	8.12
50 products 3 facilities						
[0.5 0.6]	16.02	10.37	58.43	26.27	49.74	21.49
[0.6 0.7]	17.49	11.98	33.19	11.84	32.97	8.43
[0.7 0.8]	18.96	12.46	7.51	4.23	6.27	3.04
[0.8 0.9]	45.19	24.28	27.73	12.11	26.84	10.87
75 products 3 facilities						
[0.5 0.6]	20.31	12.92	23.51	11.33	18.12	8.34
[0.6 0.7]	19.07	12.41	11.16	4.83	7.93	2.98
[0.7 0.8]	26.34	15.69	11.99	5.12	10.92	4.34
[0.8 0.9]	51.58	29.50	31.52	16.90	29.86	15.72

表 3：三種求解方法求解時間的比較

	Carreno's heuristic	Carreno-Dobson's heuristic	GA-Dobson's approach
5 products 3 facilities			
[0.5 0.6]	0.00	0.11	0.90
[0.6 0.7]	0.01	0.11	0.90
[0.7 0.8]	0.01	0.11	0.92
[0.8 0.9]	0.00	0.12	0.85
30 products 3 facilities			
[0.5 0.6]	0.01	0.16	2.15
[0.6 0.7]	0.01	0.17	2.50
[0.7 0.8]	0.01	0.13	1.91
[0.8 0.9]	0.01	0.15	1.89
50 products 3 facilities			
[0.5 0.6]	0.01	0.29	4.51
[0.6 0.7]	0.01	0.29	4.85
[0.7 0.8]	0.01	0.30	3.96
[0.8 0.9]	0.00	0.26	4.05
75 products 3 facilities			
[0.5 0.6]	0.01	0.67	10.30
[0.6 0.7]	0.01	0.82	9.70
[0.7 0.8]	0.01	0.54	6.81
[0.8 0.9]	0.01	0.62	7.93

time unit: seconds

## 2.4 結論

本研究提出兩種求解演算法，運用動態批量法求解多機 ELSP 的問題。根據數據實驗，我們觀察到這兩種解法均可以在合理的

運算時間獲得品質良好的答案。但是，在稼動率較高的情況下，則運用動態批量法求解多機 ELSP 的問題的解答品質會較不理想。

## 參考文獻

1. Bomberger, E., "A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem," *Management Science*, **12**, 778-784 (1966).
2. Carreno, J.J., "Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors," *Management Science*, **36**, 348-358 (1990).
3. Yao, M.-J., "The peak load minimization problem in cycle production," *Computers & Operations Research*, **28**, 1441-1460 (2001).
4. Yao, M.-J. and S. E. Elmaghraby, "The economic lot scheduling problem under power-of-two policy," *Computers and Mathematics with Applications*, **41**, 1379-1393 (2001).
5. Yao, M.-J., S. E. Elmaghraby and I. C. Chen, "On the feasibility testing of the economic lot scheduling problem using the extended basic period approach," *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineering*, **20**, 435-448 (2003).