行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

多層序列買權之敏感度分析與公共工程投資應用
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ：個別型
計 畫 編 號 ：NSC 98-2221-E-009-170-
執 行 期 間 ：98 年 08 月 01 日至 99 年 07 月 31 日
執 行 單 位 ：國立交通大學土木工程學系（所）

計畫主持人：黃玉霖

計畫參與人員：博士班研究生-兼任助理人員：畢佳琪

處 理 方 式 ：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 99 年 11 月 02 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

多層序列買權之敏感度分析與公共工程投資應用

Sensitivity Analysis and Public Works Investment Application of Multifold Sequential Compound Call Options

計畫編號：NSC 98－2221－E－009－170
執行期限：98年8月01日 至 99年7月31日
主 持 人：黃玉霖 交通大學土木系副教授
計畫參與人員：畢佳琪

一、中文摘要

在公共工程民營化過程中，民間投資人除了保留投資彈性，還必須審慎處理特定資產(dedicated assets)投資以及技術汰舊風險等問題。鑑於民營公共工程投資對國家社會經濟之重要性，本研究深入探討多期序列複合買權(multifold sequential compound call options)在多期公共工程投資評估之應用。針對此種新奇實質選擇權評價模型中的執行價格及股息發放比率，進行敏感度分析，推導 Kappa 與 Quoppa 之解析解，將結果應用在特定資產及技術汰舊風險之評價問題上。並且，針對重要的工程投資決策，推導結果可協助了解實質選擇權的內涵，以及實質選擇權與一般衍生性金融商品間的基本差異。

針對多期序列複合買權複雜的金融計算問題，完成多期公共工程投資評估軟體，以利實務應用。

關鍵詞：多期公共工程投資、民營化、多期序列複合買權、敏感度分析、特定資產、技術汰舊風險

Abstract

In the privatization of the works, private investors not only need to secure the rights for flexible investment decision making; they also have to deal with care the issues of dedicated assets and technological obsolescence risk. Since privatized public works projects are vital to the Nation’s social and economic developments, this research aims to study in depth the application of multi-fold sequential compound call options (SCO) in the evaluation of multi-stage privatized public works investment.

This study develops analytical solutions for the sensitivities of real-option values to the exercise price and the dividend and debt interest payout rate, which are called Kappa and Quoppa respectively. The sensitivities or the Greek Letters are applied to evaluate dedicated asset investment as well as technological obsolescence risk. Kappa and Quoppa also help to make engineering investment decisions, and to demonstrate the very nature of real options as well as some of the fundamental differences between real options and financial derivatives.

Meanwhile, this research deals with the complex financial computation issues involved in the SCO valuation model, and develop a computer program for real-world applications.

Keywords: multistage public works investment, privatization, multi-fold sequential compound call options, Greeks, dedicated assets, technological obsolescence risk

二、緣由與目的

民間投資開發的多期公共建設計畫(Multistage public works program)，一般乃由民間企業出資、規劃、設計、建造，並在投資合約明定的特許期間內營運回本，獲取合理利潤，最後在特許期間終止時，將該項公共建設資產移交政府。其優點在減輕政府財政負擔、改善公共建設工程和服務品質，並促進國家社會經濟發展。但是，由於投資環境隨時間變遷，面臨諸多風險和不確定因素，對於特許期間往往長達 30 年或更長的 BOT 投資計畫而言，投資者往往無法事先掌握各項風險因子和不確定因素，使得投資評估極為困難。尤其，多期公共建設計畫不但必須保留投資彈性，根據實際投資績效調整投資步調；還因涉及合約經濟學(Contract Economics)中所謂特定資產(dedicated assets)投資(Williamson, 1985)，使投資評估變得更為複雜。這些為特定買方而投資、量身制裁的資產，不但要掌握投資案實際的需求成長，調整投資時間點，以避免過度投資或投資不足；還因面臨技術汰舊風險(technological obsolescence risk)，一旦投資計畫面臨解約或經營危機，這些資產的經濟價值將大大減損，因投資無法有效回收或轉作它用，而影響投資意願。這些問題，透過傳統的投資評估方法，如現金流量折現法(Discounted Cash Flow Method)和決策樹(Decision Tree)，都無法處理；甚至於比較傳統的實質選擇權模型(Real-option Models)，也無法提供合理的答案。

針對多期公共建設獨特的工程投資特性，Huang and Pi (2008)利用平賭法(Martingale Method)，推導出多期序列複合買權的評價模型(multi-fold sequential compound call options pricing model)，並以我國民間投資污水下水道系統為例，展現序列複合實質選擇權在複雜公共建設計畫(complex public works program)投資評估的可能性及可行性。並且進一步將這套評估方法運用到特定資產的評價問題，展示特定資產投資需求會減損實質選擇權的評價，印證合約經濟學中對特定資產疑慮。

然而，對於特定資產對實質選擇權評價的影響，Huang and Pi (2008)並未提供解析解。這種解析解實際上是一種敏感性分析(sensitivity analysis)，或經濟學中所謂“comparative static”，或選擇權文獻中所稱的希臘字母(Greek Letters)，其推導並不簡單(non-trivial)。對於前述技術汰舊風險問題，如能導出實質選擇權評價對技術汰舊的敏感度，對相關的投資評估或評價問題，將會有很大的幫助。尤其，如同 Huang and Pi (2008)所指，傳統金融選擇權(financial options)著重避險問題，對選擇權評價模型中的 K 值（選擇權價格，由交易所給定）和 q 值（股利發放和本利還款率）並不重視。但是，K 值和 q 值在實質選擇權評價模型中，屬於重要的工程投資決策因子，深具工程經濟意涵；提供解析解不但可以解決特定資產和技術汰舊風險的評價問題，還能顯示實質選擇權評價與金融選擇權評價的基本差異。

本研究首先針對多期序列複合買權(multifold sequential compound call options)評價模型中據工程決策意涵的變數，進行敏感度分析，推導相關希臘字母的解析解。主要推導變數為履約價格(exercise price)，希臘字母為 K (Kappa)，和股息率(dividend and debt interest payout rate)，希臘字母為 Q (Quoppa)。第二，應用 K 及 Q 解析解，進一步分析特定資產和技術汰舊風險所涉及之實質選擇權評價問題。最後，處理多期序列複合買權複雜的金融計算問題，開發電腦軟體，以利實務應用。

三、模型設定與假設

3.1 序列複合選擇權評價模型推導

延續 Huang and Pi (2008) 的評價模型建構模式，序列複合選擇權評價模型(*n*-fold European Sequential Compound Call Options, SCCO)中各項參數可表示如下：

$C_{\{n\},n}(V, t_0)$ n 層 SCCO 期初(t_0)的資產價值

r_τ 無風險利率

σ_τ^2 資產的瞬間報酬變異數

q_τ 折舊率

$V(t_n, n)$ 時間 t_n 時，$C_{\{n\},n}(V, t_0)$的標的資產價值

$K_{\{n\},i}$ 時間 t_i 時，$C_{\{n\},n}(V, t_0)$的履約價格

$\overline{V}_{i,\{n\}}$ 第 i 個 資產價值的約當值

$\rho_{i,j}$ 資產 i 與 j 的相關係數

$N_m(\cdot)$ m 個變數的累積常態分配函數

其中，約當值(equivalent asset value, EAV) 的定義如下：

$$\overline{V}_{i,\{n\}} = \begin{cases} K_{\{n\},n} & \text{；當 } i = n \text{ 時} \\ \text{存在 } C_{\{n\},n-i}(V,t_i) - K_{\{n\},i} = 0 \text{ 成立時的資產價值，} & \forall 1 \le i < n \end{cases}$$

延續 Black-Scholes (1973)的模型假設，利用與 Lajeri-Chaherli (2002)相同的推導方式，使用平賭法(martingale method)在風險中立

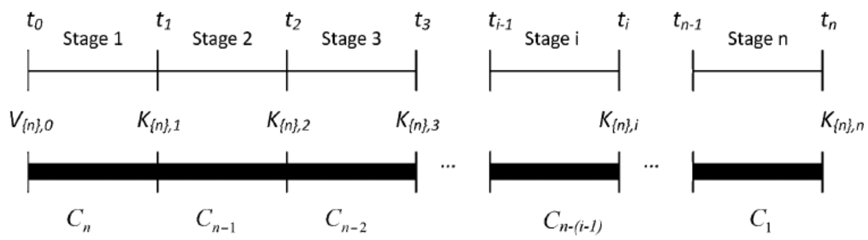

圖 1　多期投資計畫之序列複合選擇權模型

(risk-neutral)的情況下，折現未來期望現金流量，推導出二層複合選擇權評價模型。接著，依據 Lee, Yeh, and Chen (2008)多個變數之間相關性的處理方式，完成評價模型的推導。最終，序列複合選擇權評價模型(買權)可表示如下：

$$C_{\{n\},n}(V,t_0)=V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n}q_u\tau_u}N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}$$
$$-\sum_{m=1}^{n}K_{\{n\},m}e^{-\sum_{u=1}^{m}r_u\tau_u}N_m\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{m\times1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{m\times m}\right\}$$

其中，

$$g_{\{n\},i}=\frac{\ln\left(\frac{V_{\{n\},0}}{\bar{V}_{i,\{n\}}}\right)+\sum_{u=1}^{i}\left(r_u-q_u+\frac{1}{2}\sigma^2{}_u\right)\tau_u}{\sqrt{\sum_{u=1}^{i}\sigma_u{}^2\tau_u}}=h_{\{n\},i}+\sqrt{\sum_{u=1}^{i}\sigma_u{}^2\tau_u}\quad,\forall 1\le i\le n$$

$$h_{\{n\},i}=\frac{\ln\left(\frac{V_{\{n\},0}}{\bar{V}_{i,\{n\}}}\right)+\sum_{u=1}^{i}\left(r_u-q_u+\frac{1}{2}\sigma^2{}_u\right)\tau_u}{\sqrt{\sum_{u=1}^{i}\sigma_u{}^2\tau_u}}\quad,\forall 1\le i\le n$$

3.2 評價模型敏感度分析公式推導

利用序列複合選擇權評價模型(*n*-fold European Sequential Compound Call Options, SCCO)，針對模型中履約價格及股息率進行偏微分方程式的推導，Kappa 與 Quoppa。最終之推導結果如下：(推導過程詳見於附錄)

Kappa：

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},l}}=-\sum_{l=1}^{n}e^{-\sum_{u=1}^{l}r_u\tau_u}N_l\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{l\times1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{l\times l}\right\}$$

Quoppa：

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial q_l}=-\sum_{l=1}^{n}\tau_l V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n}q_u\tau_u}N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}$$

由上述公式即可推論得知以下二結論：

(1) K 愈大 $C_{\{n\},n}(V, t_0)$愈小，嚴格遞減且為凸曲線。

(2) Q 愈大 $C_{\{n\},n}(V, t_0)$愈小，嚴格遞減且為凸曲線。

四、數值分析

利用一個五期投資的數值案例解釋如何應用SCCO評價模型進行包含了技術汰舊及特定資產投資的多期投資專案計畫。

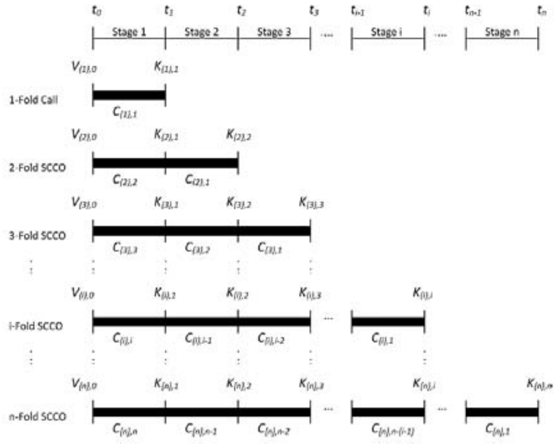

圖 2　多期投資計畫模型(包括特定資產)

4.1 基本方案

投資計畫共分為五個階段，假設每期皆有特定資產的投資。如圖 2 所示，可將此分五期投資的計畫視為擁有一個單期 B-S 買權與 4 個不同期數的序列複合選擇權而組成的投資計畫。數值案例的各期資產及成本列於表 1。

Option	$V_{[i],i}$	$K_{[j],i}$				
		$t_1=5$	$t_2=10$	$t_3=15$	$t_4=20$	$t_5=25$
1-fold Call Option	24	17				
2-fold SCCO	24	0.75	17			
3-fold SCCO	24	0.75	1	17		
4-fold SCCO	24	0.75	1	1.5	17	
5-fold SCCO	24	0.75	1	1.5	3	20
Total	120	20	20	20	20	20

表 1　基本方案之標的資產與成本

計畫之總工程期間為 25 年，每一期的建設時間為 5 年。將每期的投資成本設定為 20、標的資產的價值為 24。本研究亦將一些為了使後續各期投資能順利進行，而先行投資的

15%特定資產投資列入考慮。序列複合選擇權評價模型所需之相關參數的數值整理後列於表 2。

Parameter	Value
Number of stage (n)	5
Underlying asset value, each stage (V)	24
Nominal construction cost, each stage (K)	20
Dedicated asset investment ratio, each upstream stage	15%
Inflation rate (f)	3%
Risk-free interest rate (r)	4%
Asset return volatility (σ)	0.5
Depreciation rate (q)	5%

表 2 評價模型之相關參數值

4.2 基本方案之投資價值分析

表3為基本方案之投資價值。其中，第一區第四欄顯示單一買權之價值為9.51，序列複合買權之總值為24.9，所以，總計畫的投資價值為34.41。序列複合買權的層數愈多，買權的價值愈低。主要是因為約當值(EAVs)較高所致，如第三欄所示。然而，約當值與前置成本比率(K ratio)之變動有關。當*K ratio* 由15%增加到30%時，約當值增加許多，導致序列複合選擇權之價值降低。例如：當*K ratio* 由15%增加到30%時，總價值由34.41減少到33.64。

Option	$V_{(j),t}$	$\bar{V}_{i,\{j\}}$					$C_{(j),t}$	
K=15%								
1-fold	24	--					9.51	27.64%
2-fold	24	6.14	--				8.55	24.86%
3-fold	24	5.52	7.01	--			7.01	20.38%
4-fold	24	6.05	6.75	8.52	--		5.43	15.79%
5-fold	24	7.56	8.24	9.77	13.14	--	3.90	11.33%
				Total			34.41	100.00%
K=20%								
1-fold	24	--					9.83	28.89%
2-fold	24	6.79	--				8.58	25.21%
3-fold	24	6.51	7.80	--			6.86	20.17%
4-fold	24	7.44	8.03	9.56	--		5.18	15.22%
5-fold	24	9.65	10.34	11.95	15.34	--	3.58	10.51%
					Total		34.04	100.00%
K=25%								
1-fold	24	--					10.17	30.11%
2-fold	24	7.31	--				8.62	25.51%
3-fold	24	7.40	8.44	--			6.73	19.93%
4-fold	24	8.76	9.20	10.42	--		4.96	14.67%
5-fold	24	11.68	12.38	14.04	17.38	--	3.30	9.78%
						Total	33.79	100.00%
K=30%								
1-fold	24	--					10.53	31.31%
2-fold	24	7.73	--				8.67	25.78%
3-fold	24	8.22	8.96	--			6.62	19.66%
4-fold	24	10.02	10.28	11.16	--		4.76	14.14%
5-fold	24	13.70	14.38	16.06	19.30	--	3.07	9.11%
					Total		33.64	100.00%

表 3 基本方案之投資價值

4.3 敏感度分析

1) Quoppa：

圖 3 顯示，在其他條件不變的情況下，q 值愈大計畫價值愈小。並且，當 q>2%時彈性價值會變負值。

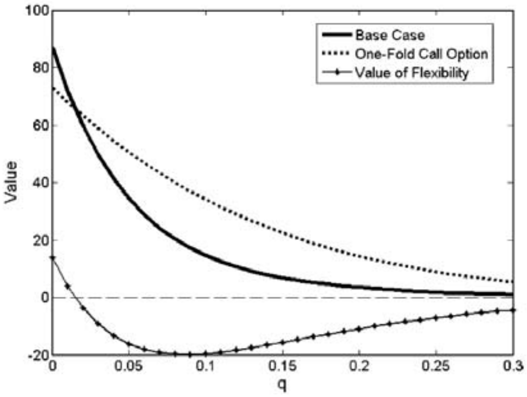

圖 3 q 的敏感度分析

2) Sigma:

圖 4 顯示，資產瞬間變動之標準差(σ)愈大，代表計畫之投資風險愈大，計畫價值愈高。反應了投資彈性的價值。

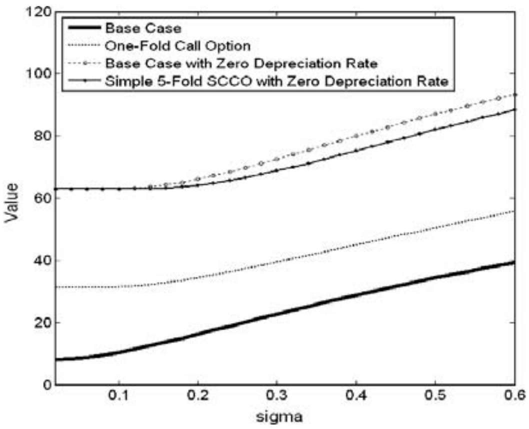

圖 4 σ 的敏感度分析

3) Kappa(or K ratio):

圖 5 顯示，在其他條件不變的情況下，K 值愈大計畫價值愈小。一般而言，沉默成本(sunk costs)會降低計畫投資的價值。例如：表 3 的第 8 欄顯示 *K ratio* 從 15%增加到 30%，總計畫價值變小。

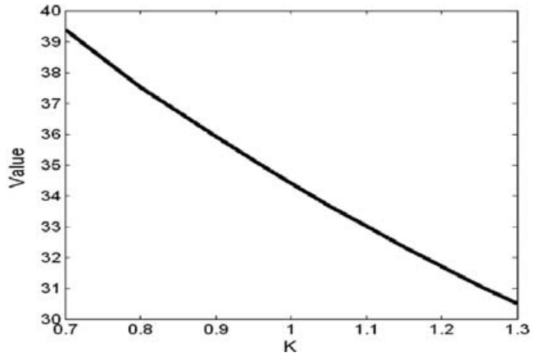

圖 5 K 的敏感度分析

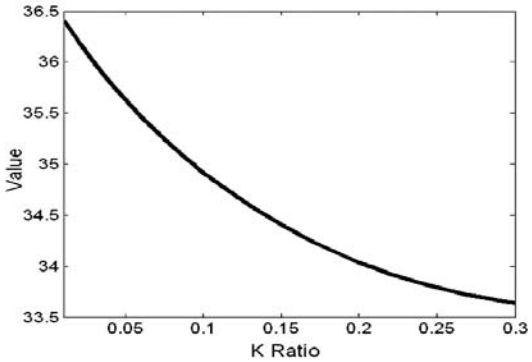

圖 6 K ratio 的敏感度分析

4.4 情境分析

1）改變σ與 K ratio:

圖 6 顯示，K ratio 之變動對於整體計畫價值的影響並不大。圖 7 更進一步顯示當σ接近 0.3 時，以不同的 K ratio 進行評估，所得到之計畫價值約莫相同。

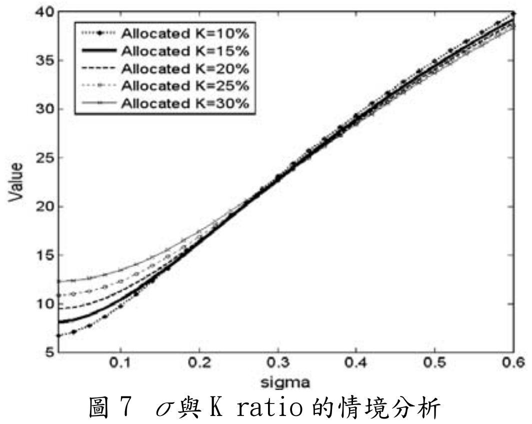

圖 7 σ與 K ratio 的情境分析

2）改變 q 與 K ratio:

圖 8 顯示，q 值的增加會顯著地降低計畫的價值。當 q>10%時，K ratio 的變異幾乎不會對計畫價值產生影響。

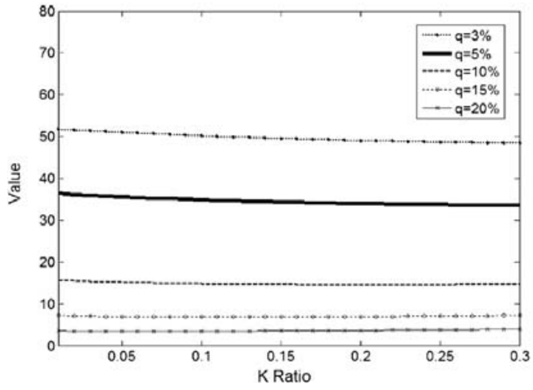

圖 8 q 與 K ratio 的情境分析

3）改變σ 與 q:

可於圖 9 中看出，即使擁有較高的σ，q 的增加亦會顯著地減少計價值。

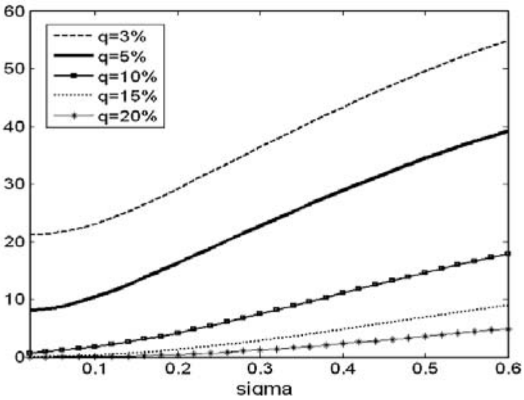

圖 9 q 與σ的情境分析

五、計畫結果自評

本研究針對多期序列複合買權(multifold sequential compound call options)評價模型，推導相關希臘字母的解析解－履約價格(exercise price)和股息率(dividend and debt interest payout rate)，希臘字母為 K (Kappa)，與 Q (Quoppa)。接著，針對此二參數值進行敏感度分析。應用上述解析解，進一步分析特定資產和技術汰舊風險所涉及之實質選擇權評價問題。最後，處理多期序列複合買權複雜的金融計算問題，開發電腦軟體，以供實務應用。最終，整理得到以下結論：

分期投資的公共建設網絡系統是一個漸進式的區域擴張策略。此種策略在管理需求方的風險時，給予了投資的彈性。但是，當未來需要擴充時，卻面臨著特定資產(dedicated assets)投資以及技術汰舊的風險。本研究建立一個序列複合選擇權評價模型與相關參數的敏感度分析解析解，Kappa 及 Quoppa，進一步分析上述之實質選擇權評價問題。在模型建構與多期投資計畫的評估上，針對競爭、特定

資產投資以及技術汰舊等問題，給予新的見解並且提供了一個可行的分析架構。

此研究結果顯示，分期投資的專案其投資彈性的價值，在競爭的市場是顯著的。但是，該價值也會因為技術汰舊的問題而完全地被摧毀。此外，特定資產(dedicated assets)的投資會影響投資的價值，必須要謹慎評估與處理。

上述結果在公共投資的特許權發放及監管設計上具有重要意義。此研究亦支持大型公共投資的建設計畫可採取分階段、多期投資的做法，並且給予特許公司在投資、擴張和放棄的權利。這種做法可以降低資本成本，服務公共利益。然而，為了取得更好的結果，其他互惠安排是必要的，以進一步減少特定資產投資與技術汰舊的風險。

註明：

此計畫之研究成果報告投稿期刊，已被 IEEE Transactions on Engineering Management 期刊所接受，準備刊載中。

六、參考文獻

1. Black, F. and Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, 637-657.
2. Huang, Y. L. and Pi, C. C. (2008) Valuation of multi-stage BOT projects involving dedicated asset investments: asequential compound option approach, Construction Management and Economics, 27, 653-666.
3. Lajeri-Chaherli, F. (2002) A note on the valuation of compound options, Journal of Future Markets, 22, 1103-1115.
4. Lee, M. Y., Yeh, F. B., and Chen, A. P. (2008) The generalized sequential compound options pricing and sensitivity analysis, Mathematical Social Science, 55, 38-54.
5. Williamson, O. E. (1985) The Economic Institutions of Capitalism, The Free Press, New York.

附　　　　錄

證明 1:

$$\frac{\partial C_{\{1\},1}(V,t_0)}{\partial K_{\{1\},1}}$$
$$= V_{\{1\},0}e^{-q_1\tau_1}\frac{\partial N_1\{g_{\{1\},1}\}}{\partial K_{\{1\},1}} - K_{\{1\},1}e^{-r_1\tau_1}\frac{\partial N_1\{h_{\{1\},1}\}}{\partial K_{\{1\},1}} - e^{-r_1\tau_1}N_1\{h_{\{1\},1}\}$$
$$= V_{\{1\},0}e^{-q_1\tau_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}g^2{}_{\{1\},1}}\left(\frac{\partial g_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}\right) - K_{\{1\},1}e^{-r_1\tau_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2{}_{\{1\},1}}\left(\frac{\partial h_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}\right) - e^{-r_1\tau_1}N_1\{h_{\{1\},1}\}$$

Since $\frac{\partial g_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}} = \frac{\partial h_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}$ and $g_{\{1\},1} = h_{\{1\},1} + \sqrt{\sigma^2\tau}$, it follows that

$$\frac{\partial C_{\{1\},1}(V,t_0)}{\partial K_{\{1\},1}}$$
$$= V_{\{1\},0}e^{-q_1\tau_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(h_{\{1\},1}+\sqrt{\sigma^2\tau}\right)^2}\left(\frac{\partial h_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}\right) - K_{\{1\},1}e^{-r_1\tau_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2{}_{\{1\},1}}\left(\frac{\partial h_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}\right) - e^{-r_1\tau_1}N_1\{h_{\{1\},1}\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2{}_{\{1\},1}}e^{-r_1\tau_1}\left(\frac{\partial h_{\{1\},1}}{\partial K_{\{1\},1}}\right)\left[\bar{V}_{1,\{1\}} - K_{\{1\},1}\right] - e^{-r_1\tau_1}N_1\{h_{\{1\},1}\}$$

By definition, $\bar{V}_{1,\{1\}} = K_{\{1\},1}$, and therefore

$$\frac{\partial C_{\{1\},1}(V,t_0)}{\partial K_{\{1\},1}} = -e^{-r_1\tau_1}N_1\{h_{\{1\},1}\} \tag{A1}$$

For multifold SCCOs, since the $K_{\{n\},i}$, i = 1, 2, …, n-1, does not exist in the multivariate normal functions, it follows that

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},i}} = -e^{-\sum_{u=1}^{i} r_u\tau_u}N_i\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{i\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{i\times i}\right\} \tag{A2}$$

For $i = n$,

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},n}} = V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u}\frac{\partial N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}}{\partial K_{\{n\},n}} - K_{\{n\},n}e^{-\sum_{u=1}^{n} r_u\tau_u}\frac{\partial N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}}{\partial K_{\{n\},n}}$$
$$- e^{-\sum_{u=1}^{n} r_u\tau_u}N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\} \tag{A3}$$

By Lee, Yeh, and Chen's (2008) Lemma 2,

$$\frac{\partial N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}}{\partial K_{\{n\},n}}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} f\left(g_{\{n\},s}\right)\left(\frac{\partial g_{\{n\},s}}{\partial K_{\{n\},n}}\right)N_{n-1}\left\{\left(\left[\frac{g_{\{n\},i} - g_{\{n\},s}\rho_{\{n\},i,s}}{\sqrt{1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2}}\right]_{n\times 1}\right)^{(-s,)};\left(\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j} - \rho_{\{n\},i,s}\rho_{\{n\},j,s}}{\sqrt{\left(1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2\right)\left(1-\left(\rho_{\{n\},j,s}\right)^2\right)}}\right]_{n\times n}\right)^{(-s,-s)}\right\}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} f\left(g_{\{n\},s}\right)\left(\frac{\partial g_{\{n\},s}}{\partial K_{\{n\},n}}\right)N_{s-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i} - h_{\{n\},s}\rho_{\{n\},i,s}}{\sqrt{1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2}}\right]_{(s-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j} - \rho_{\{n\},i,s}\rho_{\{n\},j,s}}{\sqrt{\left(1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2\right)\left(1-\left(\rho_{\{n\},j,s}\right)^2\right)}}\right]_{(s-1)\times(s-1)}\right\}$$
$$\times N_{n-s}\left\{\left[g_{\{n\},i,\#s}\right]_{(n-s)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*s}\right]_{(n-s)\times(n-s)}\right\} \tag{A4a}$$

and

$$\frac{\partial N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}}{\partial K_{\{n\},n}}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} f\left(h_{\{n\},s}\right)\left(\frac{\partial h_{\{n\},s}}{\partial K_{\{n\},n}}\right)N_{s-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i} - h_{\{n\},s}\rho_{\{n\},i,s}}{\sqrt{1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2}}\right]_{(s-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j} - \rho_{\{n\},i,s}\rho_{\{n\},j,s}}{\sqrt{\left(1-\left(\rho_{\{n\},i,s}\right)^2\right)\left(1-\left(\rho_{\{n\},j,s}\right)^2\right)}}\right]_{(s-1)\times(s-1)}\right\}$$
$$\times N_{n-s}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#s}\right]_{(n-s)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*s}\right]_{(n-s)\times(n-s)}\right\} \tag{A4b}$$

where the symbol *s indicates a time shift such that the correlation matrix starts from time s, or

$$\rho_{\{n\},i,j,*s} = \sqrt{\sum_{u=1+s}^{i}\sigma_u^2\tau_u \Big/ \sum_{u=1+s}^{j}\sigma_u^2\tau_u};$$

$$g_{\{n\},i,\#s} = \left[\ln\left(\frac{\bar{V}_{s,\{n\}}}{\bar{V}_{i,\{n\}}}\right) + \sum_{u=1+s}^{i}\left(r_u - q_u + \frac{1}{2}\sigma^2{}_u\right)\tau_u\right]\Big/\sqrt{\sum_{u=1+s}^{i}\sigma_u{}^2\tau_u},$$

$$h_{\{n\},i,\#s} = \left[\ln\left(\frac{\bar{V}_{s,\{n\}}}{\bar{V}_{i,\{n\}}}\right) + \sum_{u=1+s}^{i}\left(r_u - q_u - \frac{1}{2}\sigma^2{}_u\right)\tau_u\right]\Big/\sqrt{\sum_{u=1+s}^{i}\sigma_u{}^2\tau_u}, \quad \forall 1 \le s \le i \le n;$$ and

$\partial g_{\{n\},i}/\partial K_{\{n\},n} = 0$, $\forall 1 \le i < n$. Substituting (A4a) and (A4b) into

(A3) gives:

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},n}}=-e^{-\sum_{u=1}^{n} r_u\tau_u} N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}+\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n},1}-\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n},2} \qquad \text{(A5)}$$

where

$$\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n,1}}=V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(g_{\{n\},n}\right)^2}\left(\frac{\partial g_{\{n\},n}}{\partial K_{\{n\},n}}\right)$$
$$\times N_{n-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i}-h_{\{n\},n}\rho_{\{n\},n,i}}{\sqrt{1-\left(\rho_{\{n\},n,i}\right)^2}}\right]_{(n-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j}-\rho_{\{n\},n,i}\rho_{\{n\},n,j}}{\sqrt{\left(1-\left(\rho_{\{n\},n,i}\right)^2\right)\left(1-\left(\rho_{\{n\},n,j}\right)^2\right)}}\right]_{(n-1)\times(n-1)}\right\}\times N_0$$

and

$$\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n,2}}=K_{\{n\},n}e^{-\sum_{u=1}^{n} r_u\tau_u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(h_{\{n\},n}\right)^2}\left(\frac{\partial h_{\{n\},n}}{\partial K_{\{n\},n}}\right)$$
$$\times N_{n-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i}-h_{\{n\},n}\rho_{\{n\},n,i}}{\sqrt{1-\left(\rho_{\{n\},n,i}\right)^2}}\right]_{(n-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j}-\rho_{\{n\},n,i}\rho_{\{n\},n,j}}{\sqrt{\left(1-\left(\rho_{\{n\},n,i}\right)^2\right)\left(1-\left(\rho_{\{n\},n,j}\right)^2\right)}}\right]_{(n-1)\times(n-1)}\right\}\times N_0$$

Since

$$f\left(g_{\{n\},n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(g_{\{n\},n}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(h_{\{n\},n}\right)+\sqrt{\sum_{u=1}^{n}\sigma_u^2\tau_u}\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2_{\{n\},n}}\left(\frac{\bar{V}_{n,\{n\}}}{V_{\{n\},0}}\right)e^{-\sum_{u=1}^{n}(r_u-q_u)\tau_u},$$

$\frac{\partial g_{\{n\},n}}{\partial K_{\{n\},n}}=\frac{\partial h_{\{n\},n}}{\partial K_{\{n\},n}}$, and $\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n},1}=\hat{C}_{\partial K_{\{n\},n},2}$, it follows that

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},n}}=-e^{-\sum_{u=1}^{n} r_u\tau_u} N_n\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}.$$

Denote by K_l a subsequent exercise price. It can be verified by a similar method that for $\forall 1<l\le n$,

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial K_{\{n\},l}}=-e^{-\sum_{u=1}^{l} r_u\tau_u} N_l\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{l\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{l\times l}\right\} \qquad \text{(A6)}$$

Summing up (A1) and (A6) get conclusion.□

證明 2:

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial q_1}=-\tau_1 V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u} N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}+V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u}\frac{\partial N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}}{\partial q_1}$$
$$-\sum_{m=1}^{n}K_{\{n\},m}e^{-\sum_{u=1}^{m} r_u\tau_u}\frac{\partial N_m\left\{\left[h_{\{n\},i}\right]_{m\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{m\times m}\right\}}{\partial q_1} \qquad \text{(B1)}$$

Again, by Lee, Yeh, and Chen's (2008) Lemma 2,

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial q_1}=-\tau_1 V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u} N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\}+\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2} \qquad \text{(B2)}$$

where

$$\hat{C}_{\partial q_1,1}=V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u}\sum_{s=1}^{n} f\left(g_{\{n\},s}\right)\left(\frac{\partial g_{\{n\},s}}{\partial q_1}\right)$$
$$\times N_{s-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i}-h_{\{n\},s}\rho_{\{n\},s,i}}{\sqrt{1-\rho^2_{\{n\},s,i}}}\right]_{(s-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j}-\rho_{\{n\},s,i}\rho_{\{n\},s,j}}{\sqrt{\left(1-\rho^2_{\{n\},s,i}\right)\left(1-\rho^2_{\{n\},s,j}\right)}}\right]_{(s-1)\times(s-1)}\right\}$$
$$\times N_{n-s}\left\{\left[g_{\{n\},i,\#s}\right]_{(n-s)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*s}\right]_{(n-s)\times(n-s)}\right\}$$

and

$$\hat{C}_{\partial q_1,2}=\sum_{m=1}^{n}K_{\{n\},m}e^{-\sum_{u=1}^{m} r_u\tau_u}\sum_{s=1}^{m} f\left(h_{\{n\},s}\right)\left(\frac{\partial h_{\{n\},s}}{\partial q_1}\right)$$
$$\times N_{s-1}\left\{\left[\frac{h_{\{n\},i}-h_{\{n\},s}\rho_{\{n\},s,i}}{\sqrt{1-\rho^2_{\{n\},s,i}}}\right]_{(s-1)\times 1};\left[\frac{\rho_{\{n\},i,j}-\rho_{\{n\},s,i}\rho_{\{n\},s,j}}{\sqrt{\left(1-\rho^2_{\{n\},s,i}\right)\left(1-\rho^2_{\{n\},s,j}\right)}}\right]_{(s-1)\times(s-1)}\right\}$$
$$\times N_{n-s}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#s}\right]_{(n-s)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*s}\right]_{(n-s)\times(n-s)}\right\}$$

The h factor and the g factor are as defined in the proof of Proposition 1. The following derivations show that the last two terms in (B2) are equivalent, or $\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2}=0, \forall 1\le s\le n$.

First let $\hat{C}_{\partial q_1,3}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2_{\{n\},1}}e^{-\sum_{u=1}^{1} r_u\tau_u}\left(\frac{\partial h_{\{n\},1}}{\partial q_1}\right)$. Since

$f\left(g_{\{n\},s}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}h^2_{\{n\},s}}\left(\frac{\bar{V}_{s,\{n\}}}{V_{\{n\},0}}\right)e^{-\sum_{u=1}^{s}(r_u-q_u)\tau_u}$ and $\frac{\partial g_{\{n\},s}}{\partial q_1}=\frac{\partial h_{\{n\},s}}{\partial q_1}$, it follows that for s = 1,

$$\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2}=\bar{V}_{1,\{n\}}e^{-\sum_{u=2}^{n} q_u\tau_u}\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0N_{n-1}\left\{\left[g_{\{n\},i,\#1}\right]_{(n-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{(n-1)\times(n-1)}\right\}$$
$$-K_{\{n\},n}e^{-\sum_{u=2}^{n} r_u\tau_u}\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0N_{n-1}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#1}\right]_{(n-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{(n-1)\times(n-1)}\right\}$$
$$-K_{\{n\},n-1}e^{-\sum_{u=2}^{n-1} r_u\tau_u}\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0N_{(n-1)-1}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#1}\right]_{((n-1)-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{((n-1)-1)\times((n-1)-1)}\right\}$$
$$-\cdots$$
$$-K_{\{n\},2}e^{-\sum_{u=2}^{2} r_u\tau_u}\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0N_{2-1}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#1}\right]_{(2-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{(2-1)\times(2-1)}\right\}$$
$$-K_{\{n\},1}\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0$$

Rearranging gets $\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2}=\hat{C}_{\partial q_1,3}N_0\left[\hat{C}_{\partial q_1,4}-K_{\{n\},1}\right]$, where

$$\hat{C}_{\partial q_1,4}=\bar{V}_{1,\{n\}}e^{-\sum_{u=2}^{n} q_u\tau_u}N_{n-1}\left\{\left[g_{\{n\},i,\#1}\right]_{(n-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{(n-1)\times(n-1)}\right\}$$
$$-\sum_{m=2}^{n}K_{\{n\},m}e^{-\sum_{u=2}^{m} r_u\tau_u}N_{n-1}\left\{\left[h_{\{n\},i,\#1}\right]_{(m-1)\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j,*1}\right]_{(m-1)\times(m-1)}\right\}$$

The $\hat{C}_{\partial q_1,4}$ is an (*n-1*)-fold SCCO starting at time t_1. By definition, $\hat{C}_{\partial q_1,4}=K_{\{n\},1}$, and therefore $\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2}=0$. Applying the same method gets $\hat{C}_{\partial q_1,1}-\hat{C}_{\partial q_1,2}=0$ for s = 2, 3, …, n. Accordingly, the total effect of increasing the q_1 is given by

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial q_1}=-\tau_1 V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u} N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\} \qquad \text{(B3)}$$

Further denote by q_l a subsequent depreciation rate. It can be verified by a similar process that,

$$\frac{\partial C_{\{n\},n}(V,t_0)}{\partial q_l}=-\tau_l V_{\{n\},0}e^{-\sum_{u=1}^{n} q_u\tau_u} N_n\left\{\left[g_{\{n\},i}\right]_{n\times 1};\left[\rho_{\{n\},i,j}\right]_{n\times n}\right\} \quad \textit{for}\ \ 1\le l\le n \qquad \text{(B4)}$$

Summing up gets the conclusion.. □

國科會補助計畫衍生研發成果推廣資料表

日期:2010/11/02

<table>
<tr><td rowspan="3">國科會補助計畫</td><td colspan="2">計畫名稱: 多層序列買權之敏感度分析與公共工程投資應用</td></tr>
<tr><td colspan="2">計畫主持人: 黃玉霖</td></tr>
<tr><td>計畫編號: 98-2221-E-009-170-</td><td>學門領域: 營建管理</td></tr>
<tr><td colspan="3">無研發成果推廣資料</td></tr>
</table>

98 年度專題研究計畫研究成果彙整表

計畫主持人：黃玉霖	計畫編號：98-2221-E-009-170-
計畫名稱：多層序列買權之敏感度分析與公共工程投資應用	

成果項目			量化			單位	備註（質化說明：如數個計畫共同成果、成果列為該期刊之封面故事...等）
			實際已達成數（被接受或已發表）	預期總達成數(含實際已達成數)	本計畫實際貢獻百分比		
國內	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%		
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（本國籍）	碩士生	0	0	100%	人次	
		博士生	1	1	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		
國外	論文著作	期刊論文	1	1	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%	章/本	
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（外國籍）	碩士生	0	0	100%	人次	
		博士生	0	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		

其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)	無

	成果項目	量化	名稱或內容性質簡述
科教處計畫加填項目	測驗工具(含質性與量性)	0	
	課程/模組	0	
	電腦及網路系統或工具	0	
	教材	0	
	舉辦之活動/競賽	0	
	研討會/工作坊	0	
	電子報、網站	0	
	計畫成果推廣之參與（閱聽）人數	0	

國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

■達成目標

□未達成目標（請說明，以 100 字為限）

□實驗失敗

□因故實驗中斷

□其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文：□已發表 ■未發表之文稿 □撰寫中 □無

專利：□已獲得 □申請中 ■無

技轉：□已技轉 □洽談中 ■無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）