行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

弱布朗運動及其應用
研究成果報告(精簡版)

計 畫 類 別 ： 個別型
計 畫 編 號 ： NSC 98-2115-M-009-006-
執 行 期 間 ： 98 年 08 月 01 日至 99 年 10 月 31 日
執 行 單 位 ： 國立交通大學應用數學系（所）

計 畫 主 持 人 ： 吳慶堂

報 告 附 件 ： 國外研究心得報告

處 理 方 式 ： 本計畫可公開查詢

中 華 民 國 100 年 01 月 31 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ■ 成果報告 □期中進度報告

弱布朗運動及其應用
(Weak Brownian Motion and its Applications)

計畫類別：■ 個別型計畫 □ 整合型計畫
計畫編號：NSC 98－2115－M－009－006
執行期間： 98 年 8 月 1 日 至 99 年 10 月 31 日

1. 計畫主持人：吳慶堂(國立交通大學應用數學系)
共同主持人：
計畫參與人員：見下頁

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：■精簡報告 □完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
■赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，□一年□二年後可公開查詢

執行單位： 國立交通大學應用數學系

中 華 民 國 一 百 年 一 月 二十七 日

計畫參與人員：

（1）陳育慈：國立交通大學應用數學系博士班
（2）傅景祥：國立交通大學應用數學系碩士班
（3）吳姿慧：國立交通大學應用數學系碩士班
（4）葉淑娟：國立交通大學科學計算與數學建模研究所碩士班

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

弱布朗運動及其應用
(*Weak Brownian Motion and its Applications*)

計畫編號：NSC 98-2115-M-009-006-
執行期限：98 年 8 月 1 日至 99 年 10 月 31 日
主持人：吳慶堂(國立交通大學應用數學系)
電子信箱：ctwu@math.nctu.edu.tw

一、 中文摘要

弱布朗運動為一其 k 次邊際分佈與布朗運動之 k 次邊際分佈相同之隨機過程. Stoyanov 於 1987 年提出此隨機過程並不需為布朗運動的猜測, 而 Föllmer-Wu-Yor 則於 2000 年解決了這個問題. 在此研究計畫中, 我們主要是想解決一些弱布朗運動的 open problems, 例如二次與三次弱布朗運動的 quadratic variation 的值的問題. 另外, 弱布朗運動在財務數學上的應用亦是我們有興趣的問題.

關鍵字：布朗運動, 弱布朗運動, 邊際分佈.

英文摘要

A weak Brownian motion of order k is a stochastic process whose k-dimensional marginal is identical with that of a standard Brownian motion. A weak Brownian motion is not necessary to be a Brownian motion. This was a conjecture appeared in Stoyanov (1987) and solved in Föllmer-Wu-Yor (2000). In this project we aim to solve some open problems in the weak Brownian motion, for example, the value of the quadratic variation of weak Brownian motion of order 2 and 3. Furthermore, we want to discuss the applications of the weak Brownian motion in finance.

Keyword： Brownian motion, weak Brownian motion, marginal distribution.

二、 計畫緣由與目的：

在 Stoyanov [12]及[13]中作者提出一個 conjecture: *若存在個隨機過程 $(X(t))$* 滿足底下的條件:

1. $X(0) = 0$ a.s.;
2. 若 $s < t$, $(X(t))$ 的增量 $X(t) - X(s)$ 為 normally distributed with mean 0 and variance $t - s$;
3. 任意兩個增量 $X(t(2)) - X(t(1))$ 及 $X(t(4)) - X(t(3))$ (其中 $t(1) < t(2) \le t(3) < t(4)$) 為獨立的,

這個隨機過程 $(X(t))$ 是不是一定是個 Brownian motion? 在 Föllmer-Wu-Yor [6] 中我們解決了這個 conjecture, 並將此概念推廣成 weak Brownian motions.

所謂的 weak Brownian motion of order k 指的是個隨機過程 $(X(t))$, 其 k-dimensional marginal $(X(t(1)), X(t(2)), ..., X(t(k)))$ 和 Brownian motion $(B(t))$ 的 k-dimensional marginal $(B(t(1)), B(t(2)), ..., B(t(k)))$ 相同. 在 Föllmer-Wu-Yor [6] 我們討論了 weak Brownian motion 的一般性質, 例如當 $k \geq 2$ 時, $(X(t))$ 會有個 continuous version. 若 X 為 Gaussian process, $(X(t))$ 會是個 Brownian motion. 當 $k \geq 4$ 時, $(X(t))$ quadratic variation = t. 而且 weak Brownian motion 並不見得會是個 semimartingale. 這同時也和 Itô integral 的構造有些關聯 (c.f. Föllmer [4]). 此外, weak Brownian motion 和 time-space Wiener chaos 也有相當大的關聯性 (c.f., Yor [15], Peccati [9]).

事實上早在 Strassen [14] 便提出 martingale marginal property 的概念. 亦即給定個 family of density functions $Q = \{q(x,t): t > 0\}$, 是否會存在個 Markov martingale $(M(t))$, 對所有的 t, 其 distribution 恰有 density $q(M,t)$ 的條件. Strassen [14], Rothschild-Stiglitz [10], [11], Kellerer [7] 均對這個問題做了深度的探討, 並得到若干充份且必要條件. 此外, 這問題也牽涉到 stochastic order 的問題 (c.f. Föllmer-Schied [5]). 至於更明確的 construction 則一直到 Madan-Yor [8] 才出現 (甚至構造出一個 inhomogeneous Markov martingale).

關於 marginal distribution 的問題, 在財務數學上一直被廣泛地討論著. 主要的問題在於財務的定價公式上. 利用定價公式我們知道歐式選擇買權的定價為

$$\pi(K,T) = E^* [\min\{(S(T) - K),0\}],$$

其中 $S(t)$ 為股票在時間 t 時的價格, T 為到期日, K 為履約價, E^* 為對 equivalent martingale measure P^* 的期望值. 我們發覺這個定價公式只和 S(T) 的 distribution 有關. 此外, Breeden-Litzenberger [1]及 Dupire [3] 亦證出了

$$P^* (S(T) > K) = -(\partial/\partial K+) \pi(K, T),$$

其中 $(\partial/\partial K+)\ \pi(K, T)$ 代表的是 π 對 K 的右導數, 這也說明了定價公式與 stock price $S(T)$ 的 distribution 之間得關聯. 另外, Campi [2] 亦利用 k-dimensional marginal distribution 的想法提出 k-complete market 及 k-mixed trading strategies 的概念.

因此我們在此計畫中將針對幾個問題做探討:

1. weak Brownian motion 上的一些 open problems: 例如當 order $k = 2$ 或 3 時, weak Brownian motion 的 quadratic variation at time t 是否仍為 t.
2. weak Martingale 的推廣: 將 weal Brownian motion of order k 的概念推廣至 weak martingale, 並探討一些性質.
3. martingale k-marginal property 及 Markov martingale k-marginal property 的討論.
4. weak Brownian motion of order k, kth Wiener chaos, kth time-space Wiener chaos, 及 stochastic order 之間關係的探討.
5. 探討 weak Brownian motion of order k 在財務上的應用, 如定價公式, k-complete market 及 k-mixed trading strategies 上的應用.

三、 結果與討論：

此計畫者要是想討論 weak Brownian motion 的一些性質及其應用. 然因時間關係只能完成一部份. 由於之前完成了一個有關 weak Brownian motion of order k 的 representation theorem. 目前我們僅能針對一個 special case 來做討論, 及針對 Haar system 來探討 weak Brownian motion of order 3 的情況, 對於一般的 orthonormal basis 的情況因為複雜很多, 目前尚未想出個好法子來討論 general case.

詳細的討論可見附件.

四、參考文獻：

[1] Breeden, D. T. and Litzenberger, R. H.: Prices of state-contingent claims implicit in option prices, 1978.

[2] Campi, L.: Arbitrage and completeness in financial markets with given N-dimensional distributions, 2004.

[3] Dupire, D.: Pricing and hedging with smiles, 1997.

[4] Föllmer, H.: Calcul d'Itô sans probabilités, 1981.

[5] Föllmer, H. and Schied, A.: Stochastic finance. An introduction in discrete time, 2004.

[6] Föllmer, H., Wu, C.-T., and Yor, M.: On weak Brownian motions of arbitrary order, 2000.

[7] Kellerer, H. G.: Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale, 1972.

[8] Madan, D. B. and Yor, M.: Making Markov martingales meet marginals: with explicit constructions, 2001.

[9] Peccati, G.: A representation result for time-space Brownian chaos, 2001.

[10] Rothschild, M. and Stiglitz J.: Increasing risk: I. A definition, 1970.

[11] Rothschild, M. and Stiglitz J.: Increasing risk: II. Its economic consequences, 1971.

[12] Stoyanov J.: Counterexamples in probability, First edition, 1987.

[13] Stoyanov J.: Counterexamples in probability, Second edition, 1997.

[14] Strassen, V.: The existence of probability measures with given marginals, 1965.

[15] Yor, M.: Some aspects of Brownian motion, Part I, Some special functionals, 1992.

附件

The quadratic variation of weak Brownian motion of order 3

First we recall the characterization of weak Brownian motion.

Proposition 0.1. *Let $k \in \mathbb{N}$ and let X be a continuous stochastic process. Then X is a weak Brownian motion of order k with $E[X_s X_t] = s \wedge t$ if and only if for all $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1$, $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ is a Gaussian vector and X can be represented in the form*

$$X_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \varphi_n(u) du \right) \xi_n(\omega)$$

in L^2-sense, where $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ is an orthonormal basis on $L^2([0,1])$ and $(\xi_n)_{n\geq 1}$ is a sequence of centered uncorrelated random variables with variance 1.

In the sequel let us take (φ_n) to be the Haar system $\{H_{l,i} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \in I(l)\}$, explicitly,

$$\varphi_1 \equiv H_{0,1} \equiv 1,$$

(the corresponding $I(0) = \{1\}$) and for $n \geq 2$ with $n = 2^{l-1} + i$, $i \in I(l) := \{1, 2, \cdots, 2^{l-1}\}$,

$$\varphi_n(t) := H_{l,i}(t) = \begin{cases} 2^{(l-1)/2}, & \text{if } \dfrac{i-1}{2^{l-1}} \leq t < \dfrac{2i-1}{2^l}, \\ \\ -2^{(l-1)/2}, & \text{if } \dfrac{2i-1}{2^l} \leq t < \dfrac{i}{2^{l-1}}, \\ \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence, for $k \geq 3$, a weak Brownian motion of order k can be represented as

$$X_t(\omega) = \sum_{l,i} \left(\int_0^t H_{l,i}(u) du \right) Y_{l,i}, \tag{1}$$

where $(Y_{l,i})$ is a sequence of $N(0,1)$-distributed uncorrelated random variables.

In order to prove the main result we need first some definitions.

Definition 0.1. Let $\{H_{l,i} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \in I(l)\}$ be the system of Haar functions. We say that $H_{l,i}$ is a root of $H_{m,j}$ if $l \neq m$ and

$$\text{supp}(H_{m.j}) \subseteq \text{supp}(H_{l,i}).$$

From the definition of Haar functions, it is easy to check that $H_{l,i}$ is a root of $H_{m,j}$ if and only if $l < m$ and

$$\text{supp}(H_{l,i}) \cap \text{supp}(H_{m.j}) \neq \emptyset.$$

For example,

$$\mathrm{supp}(H_{3,1}) \subset \mathrm{supp}(H_{2,1}) \subset \mathrm{supp}(H_{1,1}) = \mathrm{supp}(H_{0,1}).$$

This implies that the roots of $H_{3,1}$ are $\{H_{0,1}, H_{1,1}, H_{2,1}\}$.

Lemma 0.1. *Let X be a weak Brownian motion of order 3. Then the corresponding $(Y_{l,i})$ in (1) is pairwise independent.*

Proof. The proof is omitted here. □

Proposition 0.2. *Let X be a weak Brownian motion of order 3. Then the quadratic variation of X is given by*

$$\langle X \rangle_t = t.$$

Proof. Let σ_n be a partition of the interval $[0, t]$ with

$$0 = t_0 < t_1 = 2^{-n} < t_2 = 2 \cdot 2^{-n} < \cdots < t_i = i \cdot 2^{-n} < \cdots < t_N = t,$$

and

$$(N-1)2^{-n} \leq t < N2^{-n}.$$

Furthermore, we may write t as the dyadic sum

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/2^n,$$

with $a_n \in \{0, 1\}$. It is sufficient to show that

$$E\left[\left(\sum_{t_i \in \sigma_n} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2 - t\right)^2\right] \longrightarrow 0, \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Since the 2-marginal law of X is the same of that of a Brownian motion B,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{t_i \in \sigma_n} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2\right] &= \sum_{t_i \in \sigma_n} E\left[\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2\right] = \sum_{t_i \in \sigma_n} E\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\ &= \sum_{t_i \in \sigma_n} (t_{i+1} - t_i) = t. \end{aligned}$$

Thus,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{t_i\in\sigma_n}\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2-t\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{t_i\in\sigma_n}\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2\right)^2\right]-t^2\\
&= \sum_{i,j}E\left[\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2\left(X_{t_{j+1}}-X_{t_j}\right)^2\right]-t^2.
\end{aligned}
$$

We discuss it in three cases:

Case 1: $i, j \neq N-1$. Due to Lemma 0.1, we have

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2\left(X_{t_{j+1}}-X_{t_j}\right)^2\right]\\
=&\sum_{\substack{l_1,m_1\\ l_2,m_2}}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}H_{l_1,m_1}(u)du\right)^2\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}H_{l_2,m_2}(u)du\right)^2\\
&\qquad +2\sum_{l,m}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}H_{l,m}(u)du\right)^2\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}H_{l,m}(u)du\right)^2
\end{aligned}
$$

Case 2: One of i, j equals $N-1$. This implies that

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(X_t-X_{t_{N-1}}\right)^2\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2\right]\\
\leq\ & 3\sum_{\substack{p,q\\ l,m}}\left(\int_{t_{N-1}}^{t}H_{p,q}(u)du\right)^2\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}H_{l,m}(u)du\right)^2\\
&+3\sum_{\substack{l_1,m_1,l_2,m_2\\ l_1\neq l_2,m_1\neq m_2}}\sum_{l,m}\left(\int_{t_{N-1}}^{t}H_{l_1,m_1}(u)du\right)\left(\int_{t_{N-1}}^{t}H_{l_2,m_2}(u)du\right)\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}H_{l,m}(u)du\right)^2.
\end{aligned}
$$

Both of these two terms converge to 0 as n goes to ∞ due to Case 1 and the definition of Haar function.

Case 3: $i=j=N-1$. Due to (1) and the definition of Haar functions we know that

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(X_{t_N}-X_{t_{N-1}}\right)^4\right] &= E\left[\left(\sum_{l,m}\int_{t_{N-1}}^{t}H_{l,m}(u)du\cdot Y_{l,m}\right)^4\right]\\
&\leq E\left[\left(\sum_{l}\int_{t_{N-1}}^{t}|H_{l,m_l}(u)|du\cdot|Y_{l,m}|\right)^4\right],
\end{aligned}
$$

for some $m_l \in I(l)$. Applying (??), (??) and (??), we see that

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_t - X_{t_{N-1}}\right)^4\right] &\leq E\left[\left((t-t_{N-1})|Y_{0,1}| + \sum_{l=1}^{n} 2^{(l-2n+1)/2}|Y_{l,m_l}| + \sum_{l=n+1}^{\infty} 2^{-(l+1)/2}|Y_{l,m_l}|\right)^4\right] \\
&\leq 3\left(\frac{1}{2^n} + \sum_{l=1}^{n} 2^{(l-2n+1)/2} + \sum_{l=n+1}^{\infty} 2^{-(l+1)/2}\right)^4,
\end{aligned}$$

which converges to 0 as n goes to infinite.
Summering the above three cases we conclude that

$$\begin{aligned}
&\sum_{t_i,t_j\in\sigma_n} E\left[\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2\left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right)^2\right] \\
\longrightarrow\ & \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j\leq N-2}\left(\sum_{\substack{l_1,m_1\\ l_2,m_2}}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_{l_1,m_1}(u)du\right)^2\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_{l_2,m_2}(u)du\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2\sum_{l,m}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_{l,m}(u)du\right)^2\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} H_{l,m}(u)du\right)^2\right) \\
=\ & \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j\leq N-2}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j) = \lim_{n\to\infty} t_{N-1}^2 = t^2,
\end{aligned}$$

as $n\to\infty$. This results in the desired result, i.e., the quadratic variation $\langle X\rangle_t = t$. $\square$

赴國外出差研習心得報告

弱布朗運動及其應用

Weak Brownian Motion and its Applications

計畫編號：NSC98-2115-M-009-006-
執行期限：98 年 8 月 1 日至 99 年 10 月 31 日
主持人：吳慶堂(國立交通大學應用數學系)
電子信箱：ctwu@math.nctu.edu.tw

一、 前言:

本次出國訪問決定得相當倉促，主要的原因是與本人申請之短期出國訪問（計畫編號：NSC99-2918-I-009-007)有關。原訂之短期出國訪問時間為一月二十四日出發, 六月底回台灣。在解決學校的一些事務後，再回到德國柏林進行此次國科會計畫的出國研究訪問，為此我也與德國柏林洪堡大學方面Professor Dr. Hans Föllmer聯絡好相關事宜。

然而在辦理短期出國訪問時，因居留證辦理不及，無法準時出發。然而在二月中時已拿到居留證，若不及時出發可能會造成過海關與居留證延簽的問題，與短期出國研究訪問之經費核銷問題，因而臨時將此計畫之出國研究訪問移至二月十九日出發。又我此時已答應參加四月九日至十七日於中央研究院數學研究所舉辦之 Workshop & Spring School on Stochastic Calculus and Applications，因而決定四月三日返回臺灣。

雖然基本上此次的出國研究訪問與短期出國訪問兩者合起來之時間並不會相差太多，做一下前後順序對調應該不會有太大問題，但由於者個前置作業的不確定性，造成所有之前和一些德國柏林方面的學者所約好的時間必須重新約定。尤其在得知 Professor Dr. Hans Föllmer 在二、三月時人在新加坡，原訂八、九月之行程也因我這方面遲遲無法決定也排定了新的行程進去，也因此此次出國訪問期間我只短短見到 Professor Dr. Hans Föllmer 一兩次，並沒做太多詳細的討論。

二、 出國訪問日期與地點:

民國 99 年 2 月 20 日--民國 99 年 4 月 3 日: 德國柏林洪堡大學。

三、 心得報告:

在完成 Föllmer-Wu-Yor [1] 這篇論文之後，我和 Professor Dr. Hans Föllmer 一直在針對這個主題作一些後續研究，例如除了 Föllmer-Wu-Yor [1] 中所列的 weak Brownian motion of order *k* construction 的方法外，我們又得到兩個新的 construction 的方法。也因此我們一直希望可以在寫出一篇關於這方面的研究。然而這期間

Professor Föllmer 的研究興趣已經轉到 risk measures 及 risk management 方面，而我一直有別的研究主題，在 weak Brownian motion 的 characterization property 方面的成果有限，只次我終於在 weak Brownian motion 的 representation theorem 有一點小結果，因此想和 Professor Föllmer 再做一次面對面的討論。但似乎單單這個成果與之前得到 construction 的方法並無法構成一篇論文，也就如此我在此段時間一直在考慮 representation theorem 的應用， 例如在檢驗 weak Brownian motion of order 2 or 3 的 quadratic variation 是否仍為 t 的這個 open problem 上的應用，可惜只能得到針對 Haar system 且 order 3 的結果。這離我們想要的成果相差時在太多了。對於一般的情況目前實在不知有什麼較好的方法可以使用，可能得先試試一般較常用的 orthonormal bases。但就 Haar system 而言，整個的推導與計算已不算簡單。其他的 orthonormal basis 能否有用目前尚是未知數。

四、 參考文獻：

[1] Föllmer, H., Wu, C.-T., and Yor, M.: On weak Brownian motions of arbitrary order, 2000.

國科會補助計畫衍生研發成果推廣資料表

日期:2011/01/31

國科會補助計畫	計畫名稱: 弱布朗運動及其應用
	計畫主持人: 吳慶堂
	計畫編號: 98-2115-M-009-006- 學門領域: 機率
無研發成果推廣資料	

98 年度專題研究計畫研究成果彙整表

計畫主持人：吳慶堂			計畫編號：98-2115-M-009-006-				
計畫名稱：弱布朗運動及其應用							
成果項目			量化			單位	備註（質化說明：如數個計畫共同成果、成果列為該期刊之封面故事...等）
			實際已達成數（被接受或已發表）	預期總達成數(含實際已達成數)	本計畫實際貢獻百分比		
國內	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%		
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（本國籍）	碩士生	3	0	100%	人次	
		博士生	1	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		
國外	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%	章/本	
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（外國籍）	碩士生	0	0	100%	人次	
		博士生	0	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		

其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等,請以文字敘述填列。)	無

	成果項目	量化	名稱或內容性質簡述
科教處計畫加填項目	測驗工具(含質性與量性)	0	
	課程/模組	0	
	電腦及網路系統或工具	0	
	教材	0	
	舉辦之活動/競賽	0	
	研討會/工作坊	0	
	電子報、網站	0	
	計畫成果推廣之參與（閱聽）人數	0	

國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

□達成目標

■未達成目標（請說明，以 100 字為限）

□實驗失敗

□因故實驗中斷

■其他原因

說明：

研究內容與計畫相符，然因時間因素與起初評估本計畫之難易有誤，所以沒有完全完成此項計畫之預期目標.

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文：□已發表 □未發表之文稿 ■撰寫中 □無

專利：□已獲得 □申請中 ■無

技轉：□已技轉 □洽談中 ■無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）

此研究成果為純學術方面之價值. 我們已知 weak Brownian motion of order 4 以上，其 quadratic variation 會等於 t，而在 order 1 時，我們可以簡單地舉出個 quadratic variation 不等於 t 的反例. 我們的研究成果乃是針對 of order 3 的某個例子的 quadratic variation 做計算.