行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

※ **Helipoid 齒輪之特性分析與研究** ※

※ The Characteristic Analysis and Study of Helipoid Gears ※

※ ※

計畫類別：■個別型計畫　　□整合型計畫

計畫編號：NSC 89-2212-E-009-013

執行期間： 87 年 8 月 1 日至　89 年 7 月 31 日

計畫主持人：蔡忠杓

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

■赴國外出差或研習心得報告一份

□赴大陸地區出差或研習心得報告一份

□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立交通大學 機械工程學系

中 華 民 國 89 年 8 月 10 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

Helipoid 齒輪之特性分析與研究

The Characteristic Analysis and Study of Helipoid Gears

計畫編號: NSC 89-2212-E-009-013

執行期限:87年8月至89年7月

主持人: 蔡忠杓 交通大學機械系 教授

參與計畫人員: 劉家彰 交通大學機械系 研究生

何文仁 交通大學機械系 研究生

李國維 交通大學機械系 研究生

林文翰 交通大學機械系 研究生

一、中文摘要

本研究計畫所探討的Helipoid齒輪為應用於傳遞交錯軸運動之新型齒輪，可改善傳統交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷下之缺失，製造時採用與傳統螺旋齒輪相類似之滾製生產方式，生產效率高、製造成本低且又具有戟齒輪多齒傳動之優點，可說兼具有傳統交錯軸螺旋齒輪與戟齒輪之優點。本研究發展一套泛用且完整之數學模式，用以模擬傳統交錯軸螺旋齒輪及新型 Helipoid 齒輪之齒面方程式，並據以進行接觸分析、曲率分析及齒印分析等,亦探討不同交錯角與齒形之嚙合情形。

本專題研究計畫為二年期之研究計畫，本研究計畫之第一年（87年8月至88年7月）之主要之工作，乃利用CNC滾齒機的創成運動來模擬並建立傳統交錯軸螺旋齒輪之數學模式，利用此一數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之特性，作為發展新型Helipoid齒輪時之參考依據。經由改變滾製時滾刀心軸之滾削路徑為圓弧及雙曲線等曲線，推導出各種不同型式之新型Helipoid齒輪齒面數學模式，且經由齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以分析Helipoid齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之接觸特性和優劣比較。研究之重點著重在運動誤差及接觸齒印及接觸比之比較，並嘗試以滾刀心軸滾削路徑之改變，來改善傳統交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷之缺失。

本計畫第二年（88年8月至89年7月）依據第一年研究計畫案所獲致之成果，研究重點放在各種不同應用狀況下，傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種不同型式之新型Helipoid齒輪之傳動分析。其中包括了非90°交錯角之使用場合以及不同齒數之齒輪對嚙合情形之探討。同時並將傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種不同型式之新型Helipoid齒輪之數學模式轉換成CNC 滾齒機之滾削條件，將所設計之齒輪滾削出來，並利用齒印測試機，實際進行齒輪之嚙合齒印分析，以驗證理論推導之正確性及所發展齒輪在產業上之實用性。

關鍵詞: Helipoid齒輪，主軸曲率及方向，齒面接觸分析，接觸橢圓、齒印分析、齒印測試。

Abstract

Helipoid gear is a new type of crossed axes gearing which can be used to improve the disadvantage of light load of the crossed helical gear, and to maintain the merit of hypoid gears. A general mathematical model has been developed which is very helpful to the manufacturer for gear design and manufacturing, and also helpful to simulate the generation process of a CNC hobbing machine. Based on the developed model , the principal curvatures and directions of the

tooth surface point, tooth contact patterns, and transmission errors can be obtained.

The proposed research project is a two-year project. In the first year, a mathematical model for the crossed-axes helical gear has been developed. By choosing different cutting paths for hob spindle movements, the mathematical model for different noble Helipoid gears can be obtained. Meanwhile, the principal curvatures and directions of the tooth surface point, tooth contact patterns and transmission errors can also be obtained by applying the proposed mathematical model and theory of gearing. The results obtained herein provide a very important information for comparing the advantages and drawbacks of the crossed-axes helical gears and Helpoid gears.

In the second year of this research project, analyses on some different types of power transmission situations such as non-orthogonal crossed-axes gearing and gear pairs with different tooth numbers are studied. The corresponding mathematical mathematical models of the abovementioned crossed-axes helical gears and Helipoid gears are developed and the tooth contact analysis is also investigated. By properly choosing the parameters of the developed mathematical model, the CNC hobbing machine-tool setting conditions for the crossed-axes helical gears and Helipoid gears can thus be obtained, and the respective gears can also be cut by the CNC hobbing machine. Using the gear rolling test machine, the bearing contact analysis of the developed Helipoid gears is performed. Based on the rolling test results, the correctness of gear development processes and usefulness of the developed Helipoid gears can also be verified.

Keywords: Helipoid Gear, Principal Curvatures and Directions, Tooth Contact Analysis, Contact Analysis, Rolling Tests.

二、計畫緣由與目的

本計畫主持人於八十五年度至八十七年度間所執行之國科會研究計畫『CNC滾齒機之滾削模擬及新型齒輪之研究』中，利用所推導之CNC滾齒機泛用滾削齒輪數學模式，發展出一新型交錯軸螺旋齒輪—Helipoid 齒輪，藉以改善傳統之交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷之缺失，並使其具有戟齒輪因多齒傳動而可傳遞較大負載之優點，同時此型齒輪之生產成本與螺旋齒輪相若。除了於理論上推導出此新型齒輪之齒面方程式，亦配合本人所執行之國科會整合型研究計畫『非圓形齒輪之研究』於八十六年度所購入之日本Kashifuji KN150 CNC 滾齒機，成功地滾製出新型交錯軸Helipoid 齒輪。在前述之研究過程中，吾人由理論推導過程以及實際製造之經驗中，發現許多甚具學術和實際產業應用價值之問題，仍有待進一步之研究，且目前國內外均尚未有任何文獻針對本研究主題進行過研究，故希望經由本計畫為期兩年之研究能針對交錯軸螺旋齒輪、新型交錯軸Helipoid 齒輪之特性與實際製造與改進，做進一步的分析與研究，並對滾齒製造上之特殊條件作一完整之探討，以利此 Helipoid 齒輪產業實用化鋪路。

基於上述背景及目的，本專題研究首先利用機構學原理、齒輪嚙合原理及微分幾何的觀念，建立傳統交錯軸螺旋齒輪之齒面數學模式，並利用此一數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之接觸特性，作為發展新型 Helipoid齒輪時之參考依據。其次，配合已發展出之泛用齒面數學模式，經由模擬CNC滾齒機之創成運動，嘗試以各種不同滾刀心軸（Spindle）切削路徑來滾製不同形式之新型Helipoid 齒輪。藉由齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解各種不同形式之新型 Helipoid 齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之特性比較並分析其差異，以期獲得最佳之接觸狀況及接觸齒印並滾削出理想的新型齒輪，以提昇齒輪的強度及壽命。同時，並經由理論之推導與模擬以及實際滾

製過程之驗證，研發出滾製此一新型 Helipoid 齒輪之各種條件限制與最佳刀具設定及刀具路徑。

三、 研究方法與結果

本計畫第一年（87年8月至88年7月）之研究重點乃利用CNC滾齒機的創成運動，模擬並建立傳統交錯軸螺旋齒輪以及新型Helipoid齒輪之數學模式，利用此數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解此類齒輪之特性。

本計畫第二年（88年8月至89年7月）承接第一年所獲致之成果，並將研究重點放在各種不同應用狀況下，傳統交錯軸螺旋齒輪以及新型Helipoid齒輪之運轉分析。同時並將傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種不同型式之新型Helipoid齒輪之數學模式轉換成 CNC 滾齒機之滾削條件，將所設計之齒輪滾削出來，並利用齒印測試機，實際進行齒輪齒印嚙合分析，以驗證理論推導之正確性。

Helipoid 齒輪之數學模式

依據滾齒機之切削創成原理，吾人可利用假想齒條刀 (Imaginary Rack Cutter) 來模擬切削齒輪時滾齒刀之滾削，以推導出傳統交錯軸螺旋齒輪、圓弧型 Helipoid 齒輪以及雙曲線型 Helipoid 齒輪之數學模式。圖一所示為假想齒條刀之法向剖面，該剖面兩側為直邊刀刃且與 X_r 軸的夾角為 ψ_n，此夾角即為齒輪之壓力角。由於齒條刀兩側的直邊刀刃對稱，因此僅針對齒條刀之左邊刀刃推導其所創成的齒形。圖一所示之直邊刀刃 $\overline{M_0M_2}$ 可表示於 $S_r(X_r,Y_r,Z_r)$ 座標系如下：

$$
\begin{aligned}
x_r &= \ell \ \cos\psi_n - a\,, \\
y_r &= \ell \ \sin\psi_n - a\ \tan\psi_n - b\,, \\
z_r &= 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

在以假想齒條刀模擬傳統交錯軸螺旋齒輪之滾製時，僅需將齒條刀之法向剖面沿導程方向平移即可得到假想齒條刀之刀面。然而由於在 Helipoid 齒輪之滾削過程中，滾刀心軸之移動路徑是在工件軸向剖面上作圓弧或雙曲線運動，如圖二所示，因此，必須將表示於 $X_c - Z_c$ 平面上之圓弧或雙曲線投影至導程方向，再令齒條刀之法向剖面沿此一投影之曲線運動，以模擬滾削過程中滾刀之移位狀況。

其中，λ 為齒輪之導程角。由此，吾人可推導出創成傳統交錯軸螺旋齒輪之假想齒條刀的齒面及單位法向量方程式表示如下：

$$
\begin{aligned}
x_c^{(J)} &= \ell_j \cos\psi_n^{J} - a_j\,, \\
y_c^{(J)} &= (\ell_j \sin\psi_n^{(J)} - a_j \tan\psi_n^{(J)} - b_j)\sin\lambda_j \\
&\quad + u_j \cos\lambda_j\,, \\
z_c^{(J)} &= -(\ell_j \sin\psi_n^{(J)} - a_j \tan\psi_n^{(J)} - b_j)\cos\lambda_j \\
&\quad + u_j \sin\lambda_j\,,
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
n_{xc}^{(J)} &= -\sin\psi_n^{(J)}\,, \\
n_{yc}^{(J)} &= \sin\lambda_j \cos\psi_n^{(J)}\,, \\
n_{zc}^{(J)} &= -\cos\lambda_j \cos\psi_n^{(J)}\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

創成圓弧型 Helipoid 齒輪之假想齒條刀的齒面及單位法向量方程式可表示如下：

$$
\begin{aligned}
x_c^{(J)} &= \ell_j \cos\psi_n^{(J)} - a_j + R_j\left(1 - \cos\alpha_j\right), \\
y_c^{(J)} &= (\ell_j \sin\psi_n^{(J)} - a_j \tan\psi_n^{(J)} - b_j)\sin\lambda_j \\
&\quad + \sqrt{2}R_j \sin\alpha_j \cos\lambda_j\,, \\
z_c^{(J)} &= -(\ell_j \sin\psi_n^{(J)} - a_j \tan\psi_n^{(J)} - b_j)\cos\lambda_j \\
&\quad + \sqrt{2}R_j \sin\alpha_j \sin\lambda_j\,,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\boldsymbol{n}_c^{(J)} = \frac{\boldsymbol{N}_c^{(J)}}{\left|\boldsymbol{N}_c^{(J)}\right|} \tag{5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
N_{xc}^{(J)} &= \sqrt{2}\cos\alpha_j \sin\psi_n^{(J)}\,, \\
N_{yc}^{(J)} &= -\sqrt{2}\cos\alpha_j \sin\lambda_j \cos\psi_n^{(J)} \\
&\quad - \sin\alpha_j \sin\psi_n^{(J)} \cos\lambda_j\,, \\
N_{zc}^{(J)} &= \sqrt{2}\cos\alpha_j \cos\lambda_j \cos\psi_n^{(J)} \\
&\quad - \sin\alpha_j \sin\psi_n^{(J)} \sin\lambda_j\,.
\end{aligned}
$$

上式中之 R_j 係表示滾刀圓弧路徑之半徑。

創成雙曲線型 Helipoid 齒輪之假想齒條刀的齒面及單位法向量方程式可表示如下：

$$
\begin{aligned}
x_c^{(J)} &= \ell_j \cos\psi_n^{(J)} - a_j + \frac{A_j(\varepsilon_j^{\,2} - 1)}{1 + \varepsilon_j} \\
&\quad + \frac{A_j(\varepsilon_j^{\,2} - 1)}{1 - \varepsilon_j \cos\alpha_j}\cos\alpha_j\,,
\end{aligned}
$$

$$y_c^{(j)} = (\ell_j \sin\psi_n^{(j)} - a_j \tan\psi_n^{(j)} - b_j)\sin\lambda_j + \sqrt{2}\,\frac{A_j(\varepsilon_j^2-1)}{1-\varepsilon_j\cos\alpha_j}\sin\alpha_j\cos\lambda_j,$$
$$z_c^{(j)} = -(\ell_j \sin\psi_n^{(j)} - a_j \tan\psi_n^{(j)} - b_j)\cos\lambda_j + \sqrt{2}\,\frac{A_j(\varepsilon_j^2-1)}{1-\varepsilon_j\cos\alpha_j}\sin\alpha_j\sin\lambda_j, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n}_c^{(j)} = \frac{\boldsymbol{N}_c^{(j)}}{\left|\boldsymbol{N}_c^{(j)}\right|} \tag{7}$$

其中

$$N_{xc}^{(j)} = \sqrt{2}\sin\psi_n^{(j)}(\cos\alpha_j - \varepsilon_j),$$
$$N_{yc}^{(j)} = -\sqrt{2}\cos\psi_n^{(j)}\sin\lambda_j(\cos\alpha_j - \varepsilon_j) + \sin\alpha_j\sin\psi_n^{(j)}\cos\lambda_j,$$
$$N_{zc}^{(j)} = \sqrt{2}\cos\psi_n^{(j)}\cos\lambda_j(\cos\alpha_j - \varepsilon_j) + \sin\alpha_j\sin\psi_n^{(j)}\sin\lambda_j\,.$$

上式中之 A_j 與 ε_j 係表示雙曲線之半長軸長度以及離心率。

為了模擬 Helipoid 齒輪對之嚙合情形，可利用假想齒條刀 Σ_F 及 Σ_P 來分別創成小齒輪 Σ_1 及大齒輪 Σ_2。圖三顯示齒條刀創成齒輪之創成機構關係圖，齒條刀固聯於座標系 $S_c(X_c,Y_c,Z_c)$，而被創成之齒輪(工件)則固聯於座標系 $S_i(X_i,Y_i,Z_i)$。此處下標 $i=1,2$ 分別表示小齒輪和大齒輪座標系。依據圖四所示之創成關係以及齒輪嚙合原理，由各種假想齒條刀所創成之齒輪齒面數學模式及其單位法向量方程式可表示如下：

$$x_i = \cos\phi_i x_c^{(j)} - \sin\phi_i y_c^{(j)} + r_i(\cos\phi_i + \phi_i\sin\phi_i)\ ,$$
$$y_i = \sin\phi_i x_c^{(j)} + \cos\phi_i y_c^{(j)} + r_i(\sin\phi_i - \phi_i\cos\phi_i)\ ,$$
$$z_i = z_c^{(j)}\ , \tag{8}$$
$$N_{xi} = N_{xc}^{(j)}\cos\phi_i + N_{yc}^{(j)}\sin\phi_i\ ,$$
$$N_{yi} = -N_{xc}^{(j)}\sin\phi_i + N_{yc}^{(j)}\cos\phi_i\ ,$$
$$N_{zi} = N_{zc}^{(j)} \tag{9}$$

其中 $\phi_i = \left(y_c^{(j)}N_{xc}^{(j)} - x_c^{(j)}N_{yc}^{(j)}\right)/N_{xc}^{(j)}$, (10)

$j=F,P$，分別用以表示假想齒條刀 Σ_F 和 Σ_P，而 $i=1,2$ 分別表示相對應齒條刀所創成之小、大齒輪 Σ_1 和 Σ_2；r_i 為所創成之小、大齒輪之節圓半徑；ϕ_i 為創成過程中工件的旋轉角。方程式(10)則為假想齒條刀與被創成之齒輪齒面間的嚙合方程式。

Helipoid 齒輪對之接觸分析

利用上述推導的齒形數學模式，我們就可針對 Helipoid 齒輪的齒面接觸作進一步的分析與探討。Helipoid 齒輪對之裝配關係座標示意圖如圖四所示，其中座標系 $S_f(X_f,Y_f,Z_f)$ 為小齒輪轉動時之參考座標系，而座標系 $S_g(X_g,Y_g,Z_g)$ 則為大齒輪轉動時之參考座標系。座標系 $S_1(X_1,Y_1,Z_1)$ 及 $S_2(X_2,Y_2,Z_2)$ 則分別固聯於小齒輪及大齒輪。ϕ_1' 及 ϕ_2' 分別為小齒輪及大齒輪在嚙合運轉時的轉動角度。

為了要計算在理想情況下，兩嚙合齒輪之齒面接觸點的位置所在，必須先將嚙合齒輪對的齒形數學模式與齒面單位法向量，經由座標轉換，分別表示於固定座標系 $S_f(X_f,Y_f,Z_f)$。由於兩嚙合齒輪之齒面在瞬間之接觸點，其位置向量相同且法向量亦共線，因此，兩齒面之嚙合條件式可表示如下：

$$\boldsymbol{R}_f^{(1)} = \boldsymbol{R}_f^{(2)}, \tag{11}$$

且 $$\boldsymbol{n}_f^{(1)} = \pm\boldsymbol{n}_f^{(2)} \tag{12}$$

將(11)、(12)兩式聯立求解，即可求得兩嚙合齒面之瞬間接觸點。在求得齒面接觸點之後，即可繼續進一步計算齒輪對之傳動誤差(Transmission Errors)。由於大齒輪之輸出軸旋轉角度 ϕ_2' 為小齒輪輸入軸旋轉角度 ϕ_1' 的函數，因此，大齒輪的轉動角度 ϕ_2' 可以表示為 $\phi_2'(\phi_1')$。根據齒輪原理，在理想狀態下，大齒輪的轉動角度 ϕ_2' 應等於小齒輪的轉動角度 ϕ_1' 和小齒輪與大齒輪齒數比的乘積，因此，齒輪對之運動誤差可以定義為：

$$\Delta\phi_2'(\phi_1') = \phi_2'(\phi_1') - \frac{N_1}{N_2}\phi_1'\ , \tag{13}$$

其中 N_1 為小齒輪之齒數，N_2 為大齒輪之齒數，當 $\Delta\phi_2'(\phi_1')$ 存在時，則表示此一齒輪對具有傳動誤差。

Helipoid 齒輪之曲率及齒印分析

利用前述之方程式將傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種 Helipoid 齒輪之大小齒輪齒面方程式建立後，其主軸曲率以及主軸方向可由 Rodrigues 方程式求得：

$$\kappa_{\mathrm{I,II}}\boldsymbol{V}_r = -\dot{\boldsymbol{n}}_r \tag{14}$$

其中$\kappa_{\mathrm{I,II}}$為齒條刀之主軸曲率，$\boldsymbol{V}_r$為接觸點沿齒面移動之相對速度，而$\dot{\boldsymbol{n}}_r$則為上述運動中接觸點上之單位法向量尖端之速度（亦即一次微分）。由於 Helipoid 齒輪對中之大小齒輪皆由相同之創成機構所創成，在以下的式子中$i=F,P$和$j=1,2$，分別用以表示假想齒條刀Σ_F和Σ_P以及其所對應創成之小齒輪Σ_1和大齒輪Σ_2間之曲率關係。茲以假想齒條刀Σ_i創成齒輪Σ_j為例，利用刀具Σ_i之參數對時間微分為零之條件，吾人可由 Rodrigues 方程式求得切削刀具之第一和第二主軸曲率$\kappa_{\mathrm{I}}^{(i)}$和$\kappa_{\mathrm{II}}^{(i)}$及其對應之主軸方向$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(i)}$和$\boldsymbol{i}_{\mathrm{II}}^{(i)}$。在求得齒條刀$\Sigma_i$之主軸曲率與主軸方向之後，即可經由下列關係式求出被創成齒面Σ_j之主軸曲率與主軸方向（Litvin,1989）：

$$\tan 2\sigma^{(ij)}=\frac{2F^{(j)}}{\kappa_I^{(i)}-\kappa_{II}^{(i)}+G^{(j)}}, \tag{15}$$

$$\kappa_I^{(j)}+\kappa_{II}^{(j)}=\kappa_I^{(i)}+\kappa_{II}^{(i)}+S^{(j)}, \tag{16}$$

$$\kappa_I^{(j)}-\kappa_{II}^{(j)}=\frac{\kappa_I^{(i)}-\kappa_{II}^{(i)}+G^{(j)}}{\cos 2\sigma^{(ij)}}, \tag{17}$$

$$F^{(j)}=\frac{a_{31}^{(j)}a_{32}^{(j)}}{b_3^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_I^{(i)})a_{31}^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_{II}^{(i)})a_{32}^{(j)}}, \tag{18}$$

$$G^{(j)}=\frac{(a_{31}^{(j)})^2-(a_{32}^{(j)})^2}{b_3^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_I^{(i)})a_{31}^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_{II}^{(i)})a_{32}^{(j)}}, \tag{19}$$

$$S^{(j)}=\frac{(a_{31}^{(j)})^2+(a_{32}^{(j)})^2}{b_3^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_I^{(i)})a_{31}^{(j)}+(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_{II}^{(i)})a_{32}^{(j)}}, \tag{20}$$

$$a_{31}^{(j)}=[\boldsymbol{n}_c^{(i)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(ij)}\boldsymbol{i}_I^{(i)}]-\kappa_I^{(i)}(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_I^{(i)}), \tag{21}$$

$$a_{32}^{(j)}=[\boldsymbol{n}_c^{(i)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(ij)}\boldsymbol{i}_{II}^{(i)}]-\kappa_{II}^{(i)}(\boldsymbol{V}^{(ij)}\cdot\boldsymbol{i}_{II}^{(i)}), \tag{22}$$

以及 $$b_3^{(j)}=[\boldsymbol{n}_c^{(i)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(j)}\boldsymbol{V}_{tr}^{(i)}]-[\boldsymbol{n}_c^{(i)}\dot{\boldsymbol{u}}^{(j)}\boldsymbol{V}_{tr}^{(j)}] \ . \tag{23}$$

其中$\kappa_{\mathrm{I}}^{(j)}$和$\kappa_{\mathrm{II}}^{(j)}$以及$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(j)}$和$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(j)}$為被創成齒面$\Sigma_j$之兩個主軸曲率與主軸方向；$\sigma^{(ij)}$角為齒條刀刀面第一主軸方向$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(i)}$和被創成齒面第一主軸方向$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(j)}$間之夾角。

由上述之方法，即可分別經由齒條刀Σ_F和Σ_P上之兩個主軸方向單位向量$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(F)}$、$\boldsymbol{i}_{\mathrm{II}}^{(F)}$ 以及 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(P)}$、$\boldsymbol{i}_{\mathrm{II}}^{(P)}$，來求得小齒輪齒面$\Sigma_1$和大齒輪齒面$\Sigma_2$上之主軸方向單位向量$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(1)}$和$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(2)}$。將所求得之大小齒輪齒面主軸方向經由座標轉換分別表示於固定座標系$S_f(X_f,Y_f,Z_f)$，即可求得如圖五之關係圖。

其中角度$\sigma^{(F1)}$和$\sigma^{(P2)}$分別為$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(F)}$和$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(P)}$以及$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(1)}$和$\boldsymbol{i}_{\mathrm{I}}^{(2)}$間之夾角。

又由於齒面Σ_1和Σ_2之主軸曲率$\kappa_{\mathrm{I}}^{(1)}$和$\kappa_{\mathrm{II}}^{(1)}$以及$\kappa_{\mathrm{I}}^{(2)}$和$\kappa_{\mathrm{II}}^{(2)}$可由前述方程式(15)至(23)分別求得，再利用下列方程式即可計算出齒面因接觸負荷而造成齒面彈性變形時，在其齒面接觸點切平面上之接觸橢圓的大小與方向(Litvin, 1989)。

$$\begin{aligned}
&A=\frac{1}{4}\left[K_\Sigma^{(1)}-K_\Sigma^{(2)}-C\right],\\
&B=\frac{1}{4}\left[K_\Sigma^{(1)}-K_\Sigma^{(2)}+C\right],\\
&C=\left(g_1^2-2g_1g_2\cos 2\sigma+g_2^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&a=\left|\frac{\delta}{A}\right|^{\frac{1}{2}},\\
&b=\left|\frac{\delta}{B}\right|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{25}$$

其中$\sin 2\alpha=g_2\sin 2\sigma/C$，

$$\begin{aligned}
&\cos 2\alpha=(g_1-g_2\cos 2\sigma)/C,\\
&K_\Sigma^{(1)}=K_{\mathrm{I}}^{(1)}+K_{\mathrm{II}}^{(1)},\\
&K_\Sigma^{(2)}=K_{\mathrm{I}}^{(2)}+K_{\mathrm{II}}^{(2)},\\
&g_1=K_{\mathrm{I}}^{(1)}-K_{\mathrm{II}}^{(1)},\\
&g_2=K_{\mathrm{I}}^{(2)}-K_{\mathrm{II}}^{(2)},\\
&\sigma=\sigma^{(P2)}-\sigma^{(F1)},
\end{aligned}$$

上式中，δ為齒面彈性變形量之實驗值，吾人取齒印測試所使用之紅丹顆粒大小之 0.00632 mm 為δ值。$2a$與$2b$為接觸橢圓的長短軸長度，α則用來決定橢圓短軸之方向，如圖六所示。

我們以下列例子來探討 Helipoid 齒輪其設計參數對齒印大小之影響。

例一：

茲有一圓弧型 Helipoid 齒輪對，其主要設計參數如表1所示。圓弧型 Helipoid 齒輪主要是藉由滾削過程中滾刀沿一圓弧軌跡行走而創成。經由前述之方法，吾人可將接觸橢圓繪於小齒輪齒面。如圖七所示，改變滾刀圓弧軌跡之曲率半徑$R_F=R_P$為 200 mm、400 mm 及 800 mm，可發現當滾刀路徑之曲率半徑越小時，接觸橢圓之長軸越長。同時，於齒面上之接觸點也隨之向齒面之右方偏移。但就整體而言，

接觸齒印仍保持於齒面之中央部分。此外，針對不同之滾刀圓弧軌跡之曲率半徑 $R_F = R_P$，吾人可繪出接觸橢圓長短軸比 (a/b) 對滾刀軌跡曲率半徑之關係，如圖八所示。當滾刀軌跡曲率半徑趨近於無限大時，圓弧型 Helipoid 齒輪即退化為交叉軸螺旋齒輪，其接觸齒印之長短軸比較小。隨著滾刀軌跡曲率半徑之減小，觸齒印之長短軸比隨之增加，故可增加接觸橢圓面積，以改善傳統交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷之缺點。

例二：

茲有一雙曲線型 Helipoid 齒輪對，其主要設計參數亦如表1所示。雙曲線型 Helipoid 齒輪主要是藉由滾削過程中，滾刀沿一雙曲線軌跡行走而創成。吾人定義當雙曲線之離心率 ε_i 為無限大時，雙曲線型 Helipoid 齒輪即退化為交叉軸螺旋齒輪。因此，雙曲線之半長軸長度必須選定為 $A_F = A_P$= 55.1543 mm。如圖九所示，藉由改變滾刀雙曲線軌跡之離心率 $\varepsilon_F = \varepsilon_P$ 為 1.6、 1.7 和 2.0，可發現當滾刀路徑之離心率越小時，接觸橢圓之長軸越長。其趨勢與減小圓弧型 Helipoid 齒輪之滾刀路徑曲率半徑所造成之效果相似。

例三：

針對例一中之圓弧型 Helipoid 齒輪對，改變其螺旋角($\beta_F = \beta_P$)，並使此一齒輪對之交錯角 $\sigma = \beta_F + \beta_P$ 隨之變化。圖十所示為接觸橢圓長短軸比 (a/b) 對之交錯角 σ 之關係。隨著交錯角的遞減，接觸橢圓長短軸比隨之遞增。由於此一齒輪對由交錯軸漸漸偏向平行軸，原本交錯軸之點接觸特性亦慢慢偏向平行軸之線接觸特性。由圖十中三條分別代表滾刀軌跡曲率半徑 $R_F = R_P = 500mm$ 、 $1000mm$ 及 ∞ (即傳統交錯軸螺旋齒輪)之曲線，吾人可得知在交錯角較小的情形下，滾刀之軌跡曲率半徑大小對接觸橢圓長短軸比有較顯著之影響。

Helipoid 齒輪之滾製與齒印測試

將 Helipoid 齒輪對之各項設計參數轉換為滾齒機之切削條件，本計劃成功地利用實驗室現有的 Kashifuji K-150 CNC 滾齒機自行滾製多組 Helipoid 齒輪對。由 Helipoid 齒輪之接觸分析結果得知，當滾刀軌跡曲率半徑過小時，不但其傳動誤差甚大，且在其齒面兩端面附近會有齒面干涉的現象，造成組裝上的困難。本計劃第一年所滾製之 Helipoid 齒輪在組裝測試時即發現此一問題。有鑑於此，吾人嘗試將 Helipoid 齒輪適當地進行兩次滾削，以消除齒面之干涉現象。如圖十一所示，兩次滾削乃是將滾刀心軸沿著原來之圓弧曲線的滾削路徑先行對齒胚加工後，滾刀之心軸位置往外退刀後再以較大之圓弧半徑進行第二次滾削。

由於本實驗室缺乏適當之齒印測試設備以測試 Helipoid 齒輪之齒印，因此藉由與日本工業大學合作研究之機會，請其代為測試接觸齒印。齒印測試機之機構及裝置如圖十二所示，測試所得之接觸齒印則如圖十三所示。經過測試之後發現經由兩次滾削所創成之 Helipoid 齒輪其齒印相當不錯，且在組裝過程中並無干涉之現象，顯示吾人所提出之兩次滾削方式來滾製 Helipoid 齒輪齒面之正確性及齒印理論模擬之正確性，相信此一突破性發現，對於 Helipoid 齒輪之實用化甚具意義。

四、計畫成果自評

本計畫第一年建立傳統交錯軸螺旋齒輪之數學模式，利用此一數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之特性，作為發展新型 Helipoid 齒輪時之參考依據。此外，經由改變滾刀滾製時其心軸之滾削路徑曲線，亦成功推導出圓弧型及雙曲線型等不同型式之新型 Helipoid 齒輪及其齒面數學模式，且發展齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析之電腦模擬程式，可用以分析各種新型 Helipoid 齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之特性優劣比較之依據。

本計畫第二年依據第一年研究計畫案所獲致之成果，研究各種不同應用狀況下，傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種不同型式之新型Helipoid齒輪之傳動分析。同時

並將傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種不同型式之新型Helipoid齒輪之數學模式轉換成CNC滾齒機之滾削條件，將所設計之齒輪滾削出來，並利用齒印測試機，實際進行齒輪齒印嚙合分析，以驗證理論推導之正確性及所發展齒輪在產業上之實用性。

綜合本計畫之第一年至第二年所完成之工作項目，是國內外首次針對交錯軸螺旋齒輪乃至於新型Helipoid 齒輪從CNC滾齒機滾削機構的建立、創成運動的模擬、接觸齒印分析模式的建立Helipoid齒輪二次滾削、齒印測試等，做一有系統的分析及研究。本研究計畫之成果，不但具有實用價值亦具有相當之學術價值，可謂相當成功的學術與應用性研究。

五、參考文獻

[1] C. B. Tsay, "A Study on the Contact of Wildhaber-Novikov Gear ", Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 15, No. 2, pp. 109-117 (1994).

[2] F. L. Litvin, *Theory of Gearing*, NASA Publication RP-1212, Washington D. C., 1989

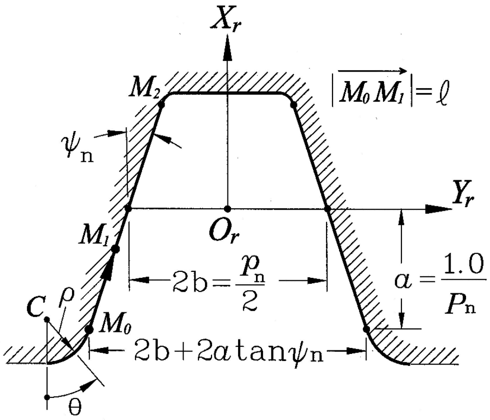
[3] F. L. Litvin, *Gear Geometry and Applied Theory*, PTR Prentice Hall , 1994.

[4] Y. Zhang and Z. Fang, "Analysis of Transmission Errors Under Load of Helical Gears With Modified Tooth Surfaces," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 119, pp. 120-126, MARCH 1997.

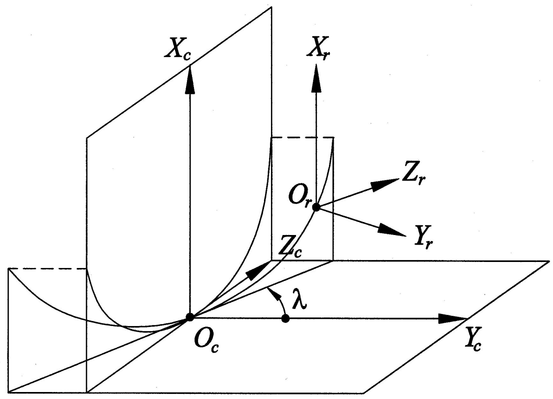
[5] 張信良，*電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬*，國立交通大學機械所，博士論文，1996 年 6 月。

表1 Helipoid 齒輪對之主要設計參數

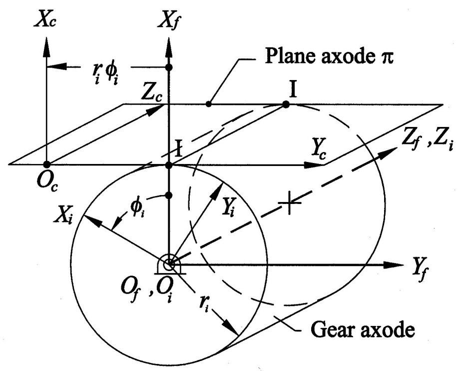
項目	小齒輪	大齒輪
齒數	$N_1 = 39$	$N_2 = 39$
法向模數	$m_n = 2.0$ mm/Teeth	$m_n = 2.0$ mm/Teeth
螺旋角	$\beta_F = 45°$ (右螺旋)	$\beta_P = 45°$ (右螺旋)
法向壓力角	$\psi_n = 20°$	$\psi_n = 20°$
齒寬	$B = 40mm$	$B = 40mm$



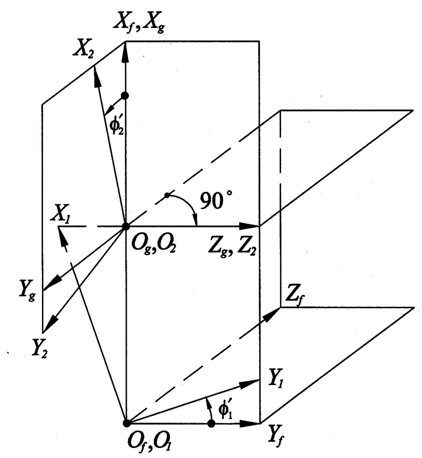
圖一 假想齒條刀之法向剖面



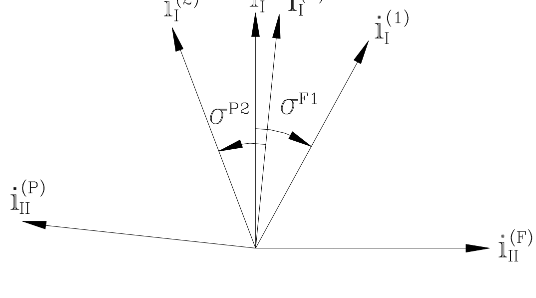
圖二 形成假想齒條刀刀面之座標關係



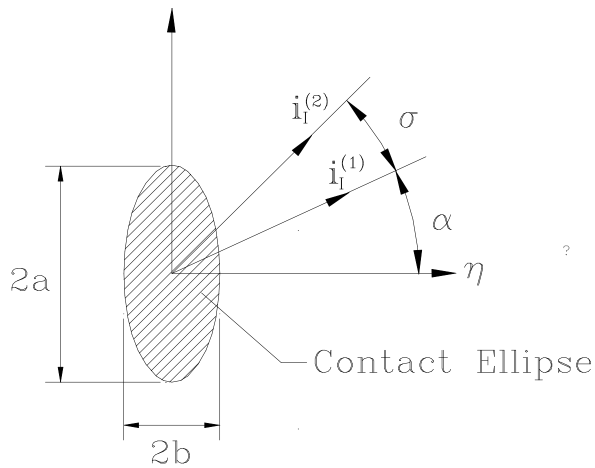
圖三 假想齒條刀與工件之關係



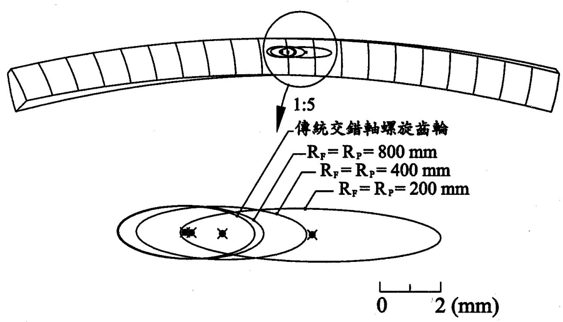
圖四 Helipoid 齒輪對之裝配座標關係圖



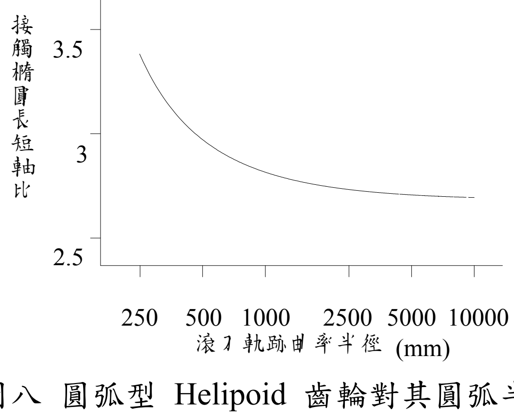
圖五 齒條刀主軸方向與齒面主軸方向之關係



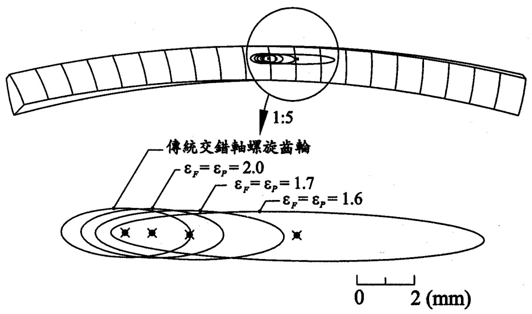
圖六 接觸齒印（橢圓）與主軸方向之關係



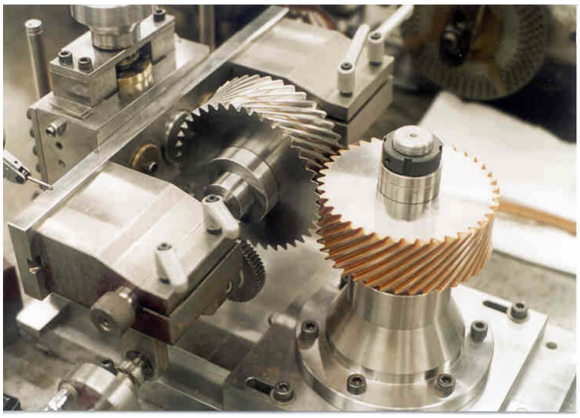
圖七 圓弧型 Helipoid 齒輪對其圓弧半徑與接觸橢圓之關係圖



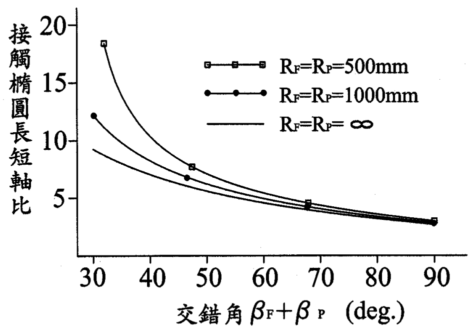
圖八 圓弧型 Helipoid 齒輪對其圓弧半徑與接觸橢圓長短軸比之關係圖



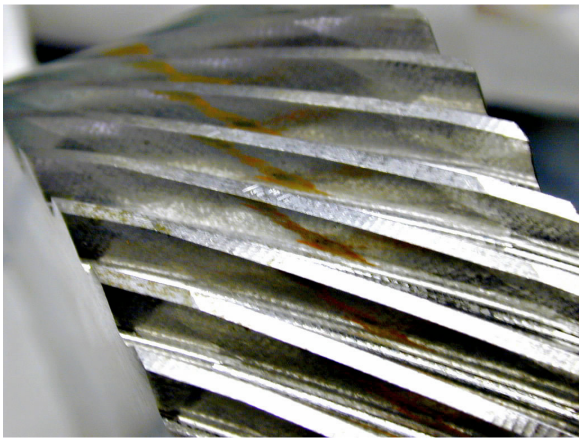
圖九 雙曲線型 Helipoid 齒輪對其離心率與接觸橢圓之關係圖



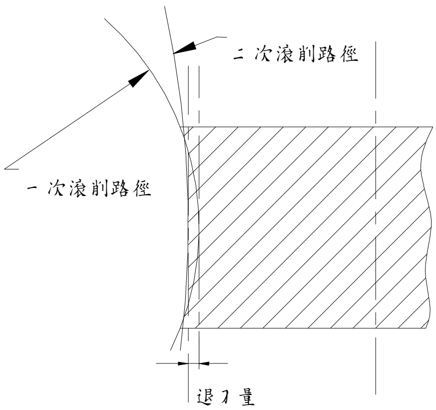
圖十二 齒印測試機



圖十 圓弧型 Helipoid 齒輪對其交錯角與接觸橢圓之長短軸比關係圖



圖十三 接觸齒印



圖十一 兩次滾削圓弧型 Helipoid 齒輪對之示意圖