

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

薄膜皺折之有限元素分析 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 97-2221-E-009-079-
執行期間：97年08月01日至98年10月31日
執行單位：國立交通大學機械工程學系(所)

計畫主持人：蕭國模

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：周裕淳
博士班研究生-兼任助理人員：蔡明旭

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 98 年 12 月 02 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告
 期中進度報告

薄膜皺折之有限元素分析

Finite Element Analysis of Thin Membrane Wrinkling

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2211-E-009-097-

執行期間：2008 年 8 月 1 日至 2009 年 10 月 31 日

計畫主持人：蕭國模

共同主持人：

計畫參與人員：蔡明旭、周裕淳

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：國立交通大學

中華民國 98 年 11 月 26 日

薄膜皺折之有限元素分析

Finite Element Analysis of Thin Membrane Wrinkling

計畫編號：97-2211-E-009-079-
執行期限：2008年08月1日至2009年10月31日
主持人：蕭國模 國立交通大學機械工程學系
計畫參與人員：蔡明旭、周裕淳

中文摘要：

本研究主要目的為以共旋轉有限元素法及殼元素對膜結構皺折後的幾何形狀作初步探討。

本研究採用文獻[18]的平面三角殼元素分析膜結構，並採用牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法來解受位移負荷之結構的非線性平衡方程式。

皺折為側方向的變形，由於平面膜結構受到平面上的剪位移作用並沒有產生側方向變形的機制，本研究利用偵測結構平路徑的分歧點，計算挫屈模態，利用挫屈模態當擾動位移，使平面膜結構進入次要平衡路徑，以產生皺折。

本研究分析在邊界受剪位移作用的平面膜結構的皺折，並將分析結果與文獻上的實驗結果及數值結果比較。

關鍵詞：薄膜，幾何非線性，共旋轉法，有限元素法，殼

ABSTRACT :

The formation of wrinkling deformation for thin membrane is simulated by using the co-rotational finite element formulation and shell element.

The shell element employed here is the flat three-node triangular shell element proposed by Bathe and Ho's [18]. An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method and constant arc length method is used for solving nonlinear equilibrium equations with displacement loading.

In order to initiate the out-of-plane buckled deformation for planar membranes subjected to purely in-plane displacement loading at the bifurcation point, a perturbation displacement proportional to the first buckling mode is added to the equilibrium configuration, and then equilibrium iteration is carried out until a new equilibrium state is achieved.

Wrinkling of a planar membrane under uniform shear displacement loading along the edge of the membrane is analyzed here. The present results are compared with experimental data and numerical results in the literature. Good agreement between the present numerical results and experimental data is observed.

Keywords: Thin membrane, Geometrical nonlinearity, Co-rotational formulation, Finite element method, Shell.

1. 導論

膜結構的歷史由來已久，在自然界中存在許多膜結構形態的東西，許多動植物細胞以及人體器官都是由膜結構的系統所組成，比如說心臟，血管，以及皮膚。

膜結構(Membrane Structure)因為其材料重量輕，可以有大大跨度的延伸，方便折疊以及容易做成各種美觀的形狀而廣泛地應用在各類結構物上，如航太科技的太陽能板、天線，以及可透光的大跨度輕質屋頂，展覽場的暫時性結構……等等[1]。

膜結構是依靠膜材自身的張拉力和特殊的幾何形狀而構成的穩定的承力系統，相對於膜結構承受拉力的能力，其承受壓力和承受彎矩的能力極弱，故文獻上一般假設膜結構不能承受壓力和彎矩。膜結構的變形依其受力狀態可以分類成三種型態[2,3,4]：

1. 緊繃(taut)： $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$

膜結構承受雙向(biaxial)的拉應力。

2. 鬆弛(slack)： $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$

膜結構沒有承受任何方向的拉力。

3. 皺折(wrinkle)： $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$

膜結構既不是緊繃的狀態也不是鬆弛的狀態時，膜結構承受單軸向的拉應力，另一個主應力恰欲變成壓應力，此時膜結構會產生面外的(out of plane)的變形。

皺折可分為材料性皺折與結構性皺折兩種[5]，材料性的皺折是在外力卸載後皺折依舊存在，材料性的皺折發生的部位與本來的膜結構會有不同的結構行為。結構性皺折是由於壓應力的產生所造成的暫時性挫屈，當外力卸載後皺折也就消失了。

皺折對膜結構的外型，品質，可靠度會有重大的影響，所以研究皺折發生的方向以及瞭解皺折區域的應力型態是重要的。文獻上討論膜結構皺折的論文很多[2-17]。文獻上一般有有限元素法分析膜結構，所採用之元素大都為膜元素(membrane element)[2-7]，因為一般討論皺折的文章大多從結構的觀點在對膜結構皺折區域的應力與應變進行探討。

雖然膜元素較簡單，但因膜元素不能承受壓力及彎矩，如果用膜元素來進行皺折模擬，可以得到皺折的形態(pattern)，卻無法得到皺折的細節資訊，比如說振幅 A (amplitude)以及波長 λ (wavelength)[5,8-9]，在此振幅的定義為從基準面起算到皺折的最高或最低點。波長的定義是兩個連續皺折的最高點或兩個連續皺折的最低點之間的距離[9]。而在航太科技的太陽帆船(solar sail)中，膜結構的反射性(reflectivity)是皺折波長與振幅的函數，因此在太陽帆船設計上必須要知道皺折的細節[8]。所以亦有少數的論文[5,8-11,13]利用殼元素(shell element)來分析膜結構，在此所定義的殼元素是考慮抗彎矩能力很弱的薄殼元素。膜結構皺折細節的關鍵在於膜結構抵抗彎矩的能力(bending rigidity)相對於抗拉應力來說很弱，但並不是零[3]，故選用殼元素就可以研究這些面外的變形(out of plane deformation)的細節。文獻[11]分析膜結構邊界受剪位移負荷時產生的變形，由於平面膜結構單純受到平面上的位移負荷，故沒有產生側方向變形的機制，因此文獻[11]對結構側向加了擾動，使其幾何形狀不完美(Imperfection)，這個擾動的大小是利用膜結構厚度的函數來計算的。文獻[11]使用 10^4 個 ABAQUS 軟體的 S4R5 四邊型元素分析膜結構邊界受剪位移後皺折的振幅，並與文獻[12]的實驗結果比較。

由於文獻上利用殼元素來分析膜結構的論文甚少，且多是利用商用軟體 ABAQUS 的殼元素來分析膜結構的皺折[5, 8-11, 13]，甚少提及分析的細節，故本研究擬採用殼元素探討膜結構受力後完整的行為，以及膜結構皺折後幾何形狀的細節。文獻[18]中將 CST(constant strain triangle)平面元素[19] 與 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角板元素[20]疊加成一平面三角殼元素，並使用更新拉格蘭日法(updated Lagrangian formulation)將該元素用在具有大位移及大旋轉的薄殼結構分析，由[18]的數值例題可見該元素相當的簡單及精確。文獻[18]中在計算對應於 DKT 元素部分的內力時是將對應於每一增量位移的增量內力相加而成，但[18]中在計算增量內力時將旋轉視為向量，且沒有扣除剛體旋轉的部分。因三維有限旋轉並非向量，所以[18]的方法在兩增量間的增量旋轉必須是小角度，才能得到精確的答案。為了

克服此困難，文獻[21]採用共旋轉法來描述殼元素的變形，並提出一運動過程來決定平面三角殼元素的節點總變形角，再用總變形角來計算 DKT 元素[20]的節點內力。因[21]的方法可以有效的解決兩增量間增量轉角的限制，故本研究擬採用[21]中的共旋轉法及[18]的平面三角殼元素。

本研究僅考慮彈性材料的膜結構，及結構性的皺折。使用平面三角殼元素及座標系統偵測結構平衡路徑的分歧點，然後再以文獻上的例題探討膜結構邊界受到剪位移時，膜結構皺折的情形。

2. 理論推導

本研究使用文獻[21]的共旋轉法(co-rotational formulation)，及文獻[18]中提出的平面三角殼元素，文獻[18]中的殼元素是由 CST(constant strain triangle)常應變三角形元素[19]及在文獻[20]中提出的 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角殼元素所疊加而成。為了本文的完整性，在本章將簡單描述文獻[18]中元素變形的假設與內力、剛度矩陣的推導，及本研究所修改的內力及剛度矩陣。文章中亦將簡單描述文獻[21]中決定元素變形角的方法。

2.1 基本假設

在文獻[18]中對於非線性平面三角殼元素的推導，做以下的假設

(1) 薄膜變形(membrane deformation)以及彎曲變形(bending deformation)之間無耦合作用。

(2) 殼元素的變形為小變形。

(3) 在元素變形前，垂直於中心面的法向線段，在元素變形後，依然保持直線，且沒有伸長及縮短，除了在元素三個頂點以及三個邊的中央點外，該線段不必垂直於元素變形後的中心面。

2.2 座標系統

本文採用共旋轉法，為了描述系統的運動以及元素的變形，本文定義了兩組座標系統：

(1) 固定總體座標系統(global coordinate): X_i ($i = 1, 2, 3$)；結構體節點的座標在此座標系統中定義。

(2) 元素座標系統(element coordinate): \bar{x}_i ($i = 1, 2, 3$)；此座標系統是建立在每一殼元素變形後的最新位置上，元素變形、元素內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由標準的座標轉換，將其轉換至總體座標系統。

2.3 殼元素變形的描述

殼元素中心面上有三個節點，每個節點有 6 個自由度，分別是 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 、 \bar{x}_3 軸方向的位移 u_j 、 v_j 、 w_j 以及繞 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 、 \bar{x}_3 軸方向的位移轉角 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} 。本殼元素假設元素的薄膜變形與彎曲變形之間無耦合作用，所以元素的變形可由薄膜變形及彎曲變形疊加而成。本元素的變形是由 CST (constant strain triangle)常應變三角形元素[19]的薄膜變形及文獻[20]中的 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角形殼元素的彎曲變形疊加而成。

元素節點位移 u_j 與 v_j ($j=1, 2, 3$) 是 CST 元素節點位移，而 θ_{xj} 、 θ_{yj} 以及 w_j ($j=1, 2, 3$) 為在[20]中的 DKT 元素節點位移。

θ_{zj} 是為了不使元素剛度內的面內旋轉剛度(in-plane rotational stiffness)為 0，而人為加上去的自由度。元素是在[20]中所提出的 DKT 元素，其節點 1、節點 2、節點 3 是元素的三個頂點，節點 4、節點 5、節點 6 為元素的三個邊的中央點，這三個中央點的自由度僅在元素推導的過程中暫時使用，在最後不會出現在元素的節點自由度。在本文以下的推導中，元素變形、元素內力以及元素剛度矩陣都是定義在元素座標系統上。

2.3.1 常應變三角元素(CST)的變形描述

因為 CST 元素內的應變為常數，所以其位移場為線性位移場，其位移場可表示成

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (1)$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y \quad (2)$$

其中 u 跟 v 為在 \bar{x}_1 軸與 \bar{x}_2 軸方向的位移， x 與 y 是元素內任意點變形前的座標值， $a_i (i=1-6)$ 是未定常數。

將 $a_i (i=1-6)$ 表示成 u_i 及 v_i 的函數，所以(1)、(2)式可改寫成

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_m \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \{u, v\} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_m = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\} \quad (5)$$

其中 u_2 、 u_3 、 v_3 可由元素節點在變形前後的座標決定。

因本文中假設元素的變形為小變形所以 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 可表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m \quad (6)$$

其中 \mathbf{B}_m 稱為 CST 元素的位移-應變轉換矩陣。

2.3.2 DKT 元素的變形描述

本文中是採用在文獻[20]中提出的 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角板元素， \mathbf{n} 為殼元素中心面變形前的單位法線向量， \mathbf{n}_d 為 \mathbf{n} 在元素變形後的新位置， $\boldsymbol{\theta}$ 為一在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面上的旋轉向量，將 $\boldsymbol{\theta}$ 作用在 \mathbf{n} 可將 \mathbf{n} 轉到 \mathbf{n}_d 。由 2.1 節所提的假設(3)可知垂直於變形前的元素中心面法線向量變形後仍為直線且長度不變，由假設(2)知變形角為小角度，所以文獻[20]之 DKT 元素的位移場可表示成

$$u = z\theta_y(x, y), \quad v = -z\theta_x(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (7)$$

DKT 元素變形包含彎曲應變(bending strain) ε_x 、 ε_y 與剪應變 γ_{xy} 以及橫向剪應變(transverse shear strain) γ_{xz} 、 γ_{yz} ，可表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} = z\boldsymbol{\kappa} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b$$

其中 \mathbf{B}_b 為 DKT 元素的位移-應變轉換矩陣

2.4 元素內力與元素剛度矩陣

本文中殼元素的節點內力是由 CST 及 DKT 元素的節點內力組成而成，元素剛度矩陣是由 CST 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_m 、DKT 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_b 以及面內旋轉剛度 k_{α} 所疊加而成。本節中將用虛功原理推導 CST 元素及 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣。

2.4.1 CST 元素之節點內力與剛度矩陣

由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^t \boldsymbol{\sigma}_m dV \quad (10)$$

其中 \mathbf{f}_m 是 CST 元素對應於 $\delta \mathbf{u}_m$ 的節點內力， V 是元素的體積，

$$\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \delta \mathbf{u}_m^t \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m dV \quad (11)$$

由(11)式可得

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{k}_m \mathbf{u}_m \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_m = \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \quad (13)$$

其中 \mathbf{k}_m 是 CST 元素的剛度矩陣。

2.4.2 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣

$$\boldsymbol{\sigma}_b = z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (14)$$

由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^t \boldsymbol{\sigma}_b dV \quad (15)$$

其中 \mathbf{f}_b 是 DKT 元素對應於 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點內力， V 為 DKT 元素的體積。

將(12)式、(13)式、(14)式代入(15)式可得

$$\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \delta \mathbf{u}_b^t \int_A \int z \mathbf{B}_b^t z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dz dA = \delta \mathbf{u}_b^t \int_A \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dA \quad (16)$$

由(16)式可得[20]

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{k}_b \mathbf{u}_b \quad (17)$$

$$\mathbf{k}_b = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\xi d\eta \quad (18)$$

其中 \mathbf{k}_b 是 DKT 元素剛度矩陣。

2.5 元素幾何剛度矩陣

為了改善收斂速度，本文中在平衡迭代的過程中將元素幾何剛度矩陣加入元素剛度矩陣中。本文中採用文獻[18]中的元素幾何剛度，其表示式為

$$\mathbf{k}_g = \int_A \mathbf{B}_g^t \mathbf{N} \mathbf{B}_g dA \quad (19)$$

(19)式為一近似的幾何剛度矩陣，僅考慮面內應力 σ_x 、 σ_y 以及 τ_{xy} 在剛體運動時的效應。文獻[22]提到將元素幾何剛度矩陣加入元素剛度矩陣可以有效提高平衡迭代的收斂速率。最後，將剛度 \mathbf{k}_m 、 \mathbf{k}_b 、 \mathbf{k}_g 疊加後，旋轉至總體座標系統上。

2.6 元素變形角的描述

本文中採用文獻[21]中的兩階段旋轉法來決定元素的剛體旋轉及節點在元素座標的變形位移與轉角。本文中假設該剛體運動是由以下三個步驟達成的。

(1) $\Delta \mathbf{U}_1$ 造成的位移：元素座標 ${}^I \bar{x}_i$ 的原點受到 $\Delta \mathbf{U}_1$ 的作用移動到元素座標 \bar{x}_i 的原點，其中 $\Delta \mathbf{U}_1$ 是作用在元素節點 1 的元素節點增量位移向量。

(2) 旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 造成的面外旋轉(out-of plane rotation)：素的 ${}^I \bar{x}_i$ ($i=1, 2, 3$) 軸因為受到在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面的旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用而旋轉，其中 ${}^I \bar{x}_3$ 軸旋轉到 \bar{x}_3 軸處並且與之重疊， $\boldsymbol{\alpha}$ 的表示式為

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos^{-1}({}^I \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) \frac{{}^I \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3}{\|{}^I \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3\|} \quad (20)$$

因為旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 造成的運動是朝遠離 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面方向，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 所造成的旋轉稱為面外旋轉。

(3) 旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 造成的面內旋轉(in-plane rotation)：元素的 ${}^I \bar{x}_i$ 軸因為受到在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面的旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用而旋轉到 \bar{x}'_i ($i=1, 2, 3$) 軸， \bar{x}'_3 軸與 \bar{x}_3 軸重疊，而 \bar{x}'_i 軸受到旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 作用轉到 \bar{x}_i 軸，旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示式為

$$\boldsymbol{\beta} = \cos^{-1}(\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3 \quad (21)$$

因為旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 造成的運動的方向是平行於 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 所造成的旋轉稱為面內旋轉。

本文使用文獻[21]提出的直接法(direct method)來計算對應於 $\Delta \mathbf{U}_j$ 及 $\Delta \Phi_j$ ($j=1, 2, 3$)的元素變形角。

在文獻[21]所提出的直接法可以分成以下四個步驟。

(1) $\Delta \mathbf{U}_1$ 造成的剛體移動：整個元素因為 $\Delta \mathbf{U}_1$ 而移動，其中 $\Delta \mathbf{U}_1$ 是作用在元素節點1的元素節點增量位移向量。

(2) 旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 造成的剛體旋轉：旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ (20式)通過元素節點1使得整個元素除了 ${}^l \mathbf{n}_{dj}$ 之外由 ${}^l \bar{x}_i$ ($i=1, 2, 3$)座標轉到 \bar{x}'_i ($i=1, 2, 3$)

(3) $\Delta \Phi_{ij}$ 造成 ${}^l \mathbf{n}_{dj}$ 的有限旋轉：法線向量 ${}^l \mathbf{n}_{dj}$ 受到 $\Delta \Phi_{ij}$ 作用而旋轉到新位置 \mathbf{n}'_{dj} 。

(4) 旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 造成的剛體旋轉：旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ (21式)通過元素節點1使得整個元素包括 \mathbf{n}'_u 及 \mathbf{n}'_{dj} 旋轉到最後的位置 \mathbf{n}_u 及 \mathbf{n}_{dj} ，其中 \mathbf{n}'_u 是 ${}^l \mathbf{n}_u$ 受到 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用後的新位置，元素變形角 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_j$ 可表示成

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_j = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{1j} \\ \bar{\theta}_{2j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \cos^{-1}(\bar{\mathbf{n}}_u \cdot \bar{\mathbf{n}}_{dj}) \frac{\bar{\mathbf{n}}_u \times \bar{\mathbf{n}}_{dj}}{\|\bar{\mathbf{n}}_u \times \bar{\mathbf{n}}_{dj}\|} \quad (22)$$

2.7 系統的平衡方程式與收斂準則

結構系統受位移負荷時，其平衡方程式可以表示為

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda \mathbf{Q}_p) = \mathbf{0} \quad (23)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 為系統不平衡力向量， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q} 為系統位移向量， λ 為負荷參數， \mathbf{Q}_p 為參考位移負荷向量。 \mathbf{F} 可由(12)與(17)式的元素節點力，用標準的座標轉換，轉換到對應總體座標後再組合而成。

本文以不平衡力 $\boldsymbol{\Psi}$ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\mathbf{F}_e\|} \leq e_{tol} \quad (24)$$

其中 \mathbf{F}_e 為對應於位移負荷的系統節點反力向量。 e_{tol} 為一給定之容許誤差值。

3. 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(23)式的數值計算方法是採用文獻[23]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。

4. 數值分析與結果

圖1所示為本例題分析之正方形膜結構與受負荷圖，本例題是參考文獻[11]提出的例題，正方形膜結構邊長 $L=229$ (mm)，厚度 $h=0.0762$ (mm)，楊氏係數 $E=3790$ (MPa)，蒲松比 $\nu=0.38$ 。AB，CD邊為自由邊，BC邊為固接(Fixed End)，AD邊為固接，但可在X軸方向上移動，本例題在AD邊上施加均勻的水平位移 λ (mm)。

本例題的挫屈負荷為切線剛度行列式值的正負號恰欲由正變負時的位移負荷，使用 80×80 元素網格對膜結構進行分析，並與使用 40×40 以及 60×60 元素網格的結果以及文獻[11,12]作比較。圖2為位移邊界AD在X與Y軸方向上的節點反力。由圖2可以看出越靠近A點的地方節點反力越大。

圖3為等高線圖及透視圖，可以看出皺折的走向是呈AC的方向，膜結構最大拉應力的分佈的應是沿著對角線AC的走向，隨著位移邊界AD上的點越靠近D點，拉應力逐漸

變小，故位移邊界上之節點力的分佈是合理的。本例題使用 60×60 與 80×80 元素網格，膜結構的皺折數目較使用 40×40 元素網格多，與文獻[11,12]比較，可以看出本例題以 40×40 元素網格分析的結果與文獻[11]數值例題的結果較接近，都有三條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移的差也接近，但是本例題以 40×40 元素網格分析的膜結構側方向最大正位移比起文獻[11]的結果大了許多。本例題使用 60×60 與 80×80 元素網格分析的結果與文獻[12]實驗結果較接近。

5. 結論

本文以共旋轉有限元素推導法，殼元素來分析膜結構的皺折，由本文分析之數值例題的結果，可得以下的結論：

(1)膜結構邊界受剪力側向挫屈後有很多不同平衡路徑，且膜結構受力後的變形很敏感，差異很小的負荷條件，有可能會造成差異很大的變形結果。

(2)由本文例題結果發現膜結構受剪位移時，若元素網格不夠密，則膜結構皺折的數目太少。若欲得到精確的結果，應使用較密元素網格。

(3)本文對於平面膜結構產生側方向位移的機制為在分歧點加上挫屈模態擾動，使膜結構有側方向的位移，本研究發現挫屈模態與膜結構挫屈後皺折的的形狀差異很大。

(4)由本研究分析的結果與文獻上的實驗結果比較，可以發現兩者的皺折型態有相同的特徵，但細部仍有差異，其原因可能是本研究分析時，元素的數目不夠，文獻上的結構有初始不完美，且實驗操作上真實的邊界條件可能與分析的邊界條件不同。

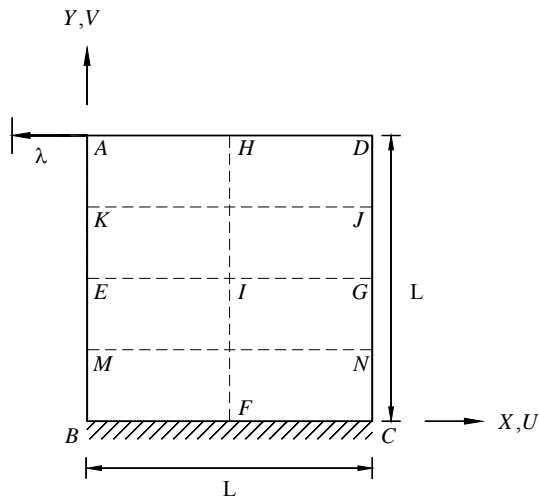
REFERENCES

- [1] J. W. Leonard, "Tension Structure." McGraw-Hill Book Company; 1988.
- [2] H. Ding, B. Yang, "The modeling and numerical analysis of wrinkled membranes." Int J Numer Meth Engng. 2003; 58: 1785-1801.
- [3] E. S. Lee, S. K. Youn, "Finite element analysis of wrinkling membrane structures with large deformations." Finite Elements Anal Design. 2006; 42: 780-791.
- [4] R. Rossi, M. Lazzari, R. Vitaliani, And E. Onate, "Simulation of light-weight membrane structures by wrinkling model." Int J Numer Meth Engng. 2005; 62: 2127-2153.
- [5] J. Månsson, J. Söderqvist, "Finite element analysis of thin membrane wrinkling." Mekanik KTH MSc Thesis; 2003.
- [6] A. Diaby, A. L. Van, C. Wielgosz, "Buckling and wrinkling of prestressed membranes." Finite Elements Anal Design. 2006; 42: 992-1001.
- [7] M. Stanuszek, "FE analysis of large deformations of membranes with wrinkling." Finite Elements in Anal Design. 2003; 39: 599-618.
- [8] Y. W. Wong, S. Pellegrino, K. C. Park, "Prediction of wrinkle amplitudes in square solar sails." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Conference. Norfolk. 2003.
- [9] Y. W. Wong, S. Pellegrino "Computation of wrinkle amplitudes in thin membranes." 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Denver. 2002.
- [10] Y. W. Wong, S. Pellegrino, "Amplitude of wrinkles in thin membranes." In new approaches to structural mechanics shells and biological structures (Dordrecht, The Netherlands, 2002). Kluwer Academic Publishers. pp. 257-270.
- [11] A. Tessler, D. W. Sleight, J. T. Wang, "Nonlinear shell modeling of thin membranes with emphasis on structural wrinkling." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, Virginia 2003.
- [12] J. Leifer, Paducah, J. Black, "Evaluation of shear compliant borders for wrinkle reduction in thin film membrane structures." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Norfolk, Virginia 2003.

- [13] A. Tessler, D. W. Sleight, J. T. Wang, "Effective modeling and nonlinear shell analysis of thin membranes exhibiting structural wrinkling." *J Spacecraft Rockets*. 2005; 42: 287-298.
- [14] Y. Miyazaki, "Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane." *Int J Numer Meth Engng*. 2006; 66: 1179-1209.
- [15] T. Raible, K. Tegeler, S. Löhnert, P. Wriggers. "Development of a wrinkling algorithm for orthotropic membrane materials." *Comput Methods Appl Mech Engrg*. 2005; 194: 2550-2568.
- [16] J.-C. Geminard, R. Bernal, F. Melo, "Wrinkle formulations in Axi-symmetrically stretched membranes." *Eur. Phys. J. E*. 2004; 15: 117-126.
- [17] W. Zhang, T. Hisada, H. Noguchi, "Post-buckling analysis of shell membrane structure by dynamic relaxation method." *Comp Mech*. 2000; 26: 267-272.
- [18] K. J. Bathe, L. W. Ho, "A simple and effective element for analysis of general shell structures." *Comput Struct* 1981; 13: 673-681.
- [19] R. H. Gallagher, "Finite Element Analysis Fundamentals." Prentice-Hall: Englewood Cliffs; 1973.
- [20] J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho, "A study of three-node triangular plate bending elements." *Int J Numer Meth Engng* 1980; 15: 1771-1812.
- [21] K. M. Hsiao, "Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element." *Comput Struct*. 1987; 25: 665-675.
- [22] 楊禮龍, 薄殼結構在位移負荷作用之下的幾何非線性分析, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2006.
- [23] 張景維, 平面梁結構在位移負荷作用下之幾何非線性分析, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 1998.

計畫成果自評

本研究以用共旋轉法和由CST(constant strain triangle)常應變三角形元素及DKT(discrete Kirchhoff theory)三角殼元素所疊加的非線性平面三角殼元素探討膜結構邊界受到剪位移時，膜結構皺折的情形，同時分析變形過程中平衡路徑、挫屈模態與挫屈點，並以不同密度的網格與文獻例題做比較，驗證本研究方法的準確性，本研究計畫確實完成預期的工作及目標。



$L = 229(\text{mm})$
 Thickness, $h = 0.0762(\text{mm})$
 $E = 3790(\text{N}/\text{mm}^2)$
 $\nu = 0.38$
 $AK = KE = EM = MB = 0.25L$
 $EH = HD = 0.5L$

圖 1 正方形膜結構示意圖及其受之位移負荷圖 (例題二)

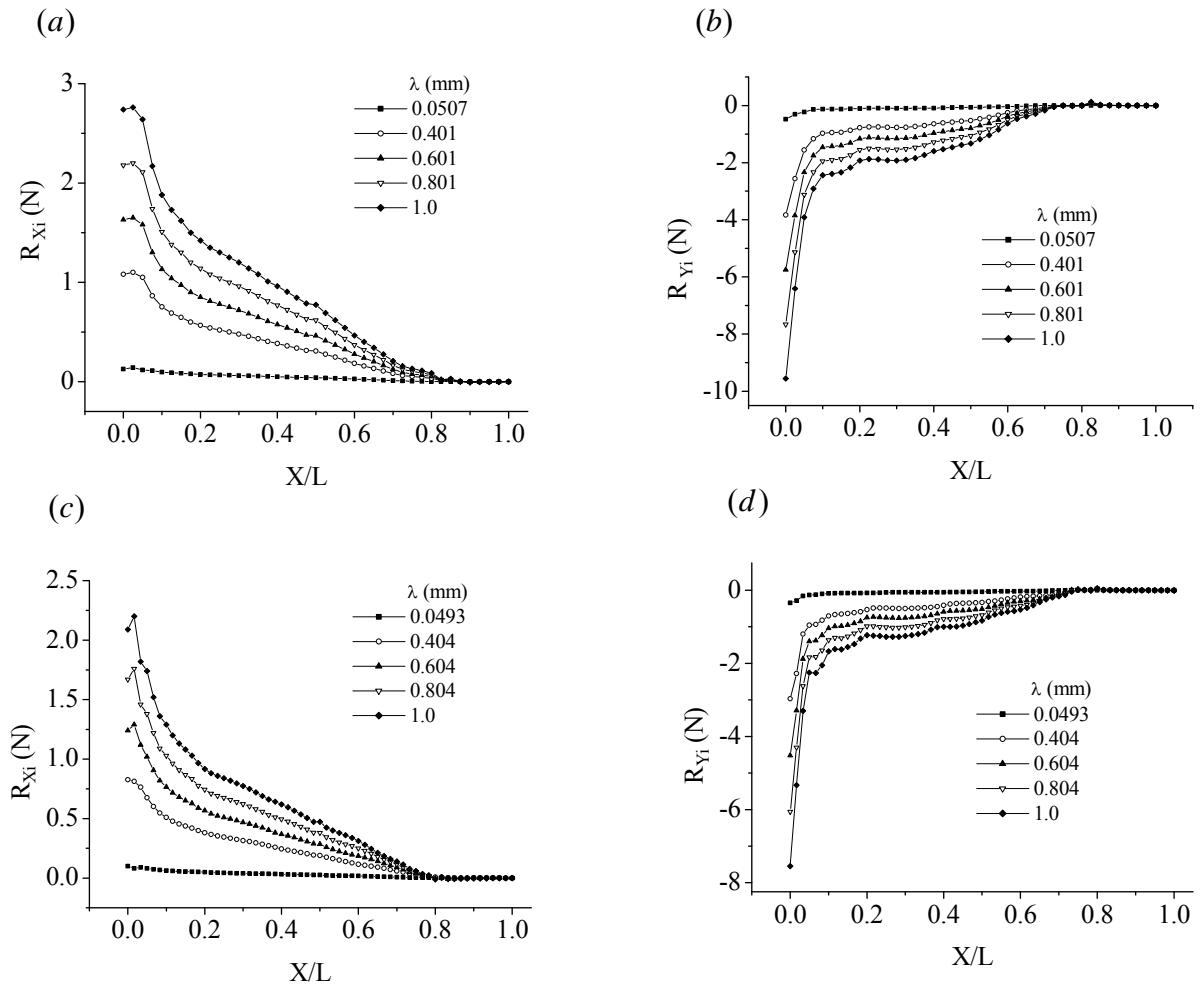


圖 2 (a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖 (b)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖

Mesh 40×40

(c)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖 (d)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖

Mesh 60×60

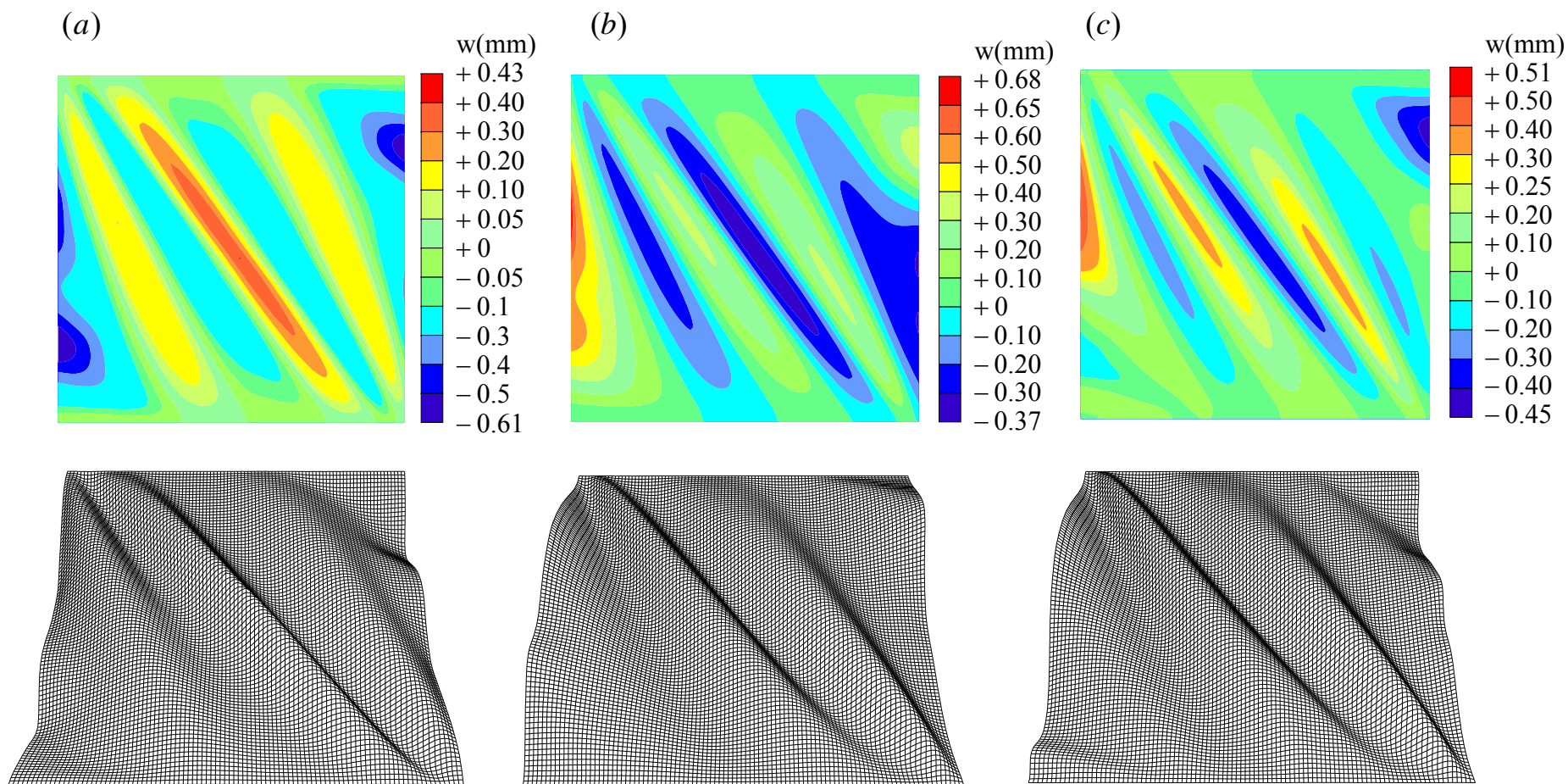


圖 3 膜結構變形圖，Mesh 40×40 , $\lambda = 0.0507(mm)$, (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.0493(mm)$,
(c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.0507(mm)$

計畫編號	NSC 97-2221-E-009 -079 -
計畫名稱	薄膜皺折之有限元素分析
出國人員姓名 服務機關及職稱	蕭國模 國立交通大學機械系 教授
會議時間地點	24-27 August 2009, Kuala Lumpur, Malaysia
會議名稱	Recent Advances in Nonlinear Mechanics
發表論文題目	CO-ROTATIONAL FORMULATION FOR GEOMETRICALLY NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-WALLED BEAMS

一 參加會議的經過

本人承國科會補助才能參加此會議，在此深表感謝。

本會議為非線性力學最近的進展會議（**Recent Advances in Nonlinear Mechanic, 24-27 August 2009, Kuala Lumpur, Malaysia**），於今年八月二十四日至二十七日在馬來西亞 Kuala Lumpur（吉隆坡）舉行。吉隆坡市中心從吉隆坡國際機場搭機場捷運要 30 分，吉隆坡是馬來西亞的首都。

本會議為一國際性的學術研討會，其主要的目的是要讓在力學三個主要領域—動力、流力、材料之重要的研究人員聚在一起，交換非線性力學之基礎研究及應用，本會議是由國際非線性力學期刊(*the International Journal of Nonlinear Mechanics*)所贊助。本研討會在振動學的研究上有很高的學術地位。

本會議為一個小型的國際會議，在吉隆坡郊區，介於吉隆坡市中心及吉隆坡國際機場的 **Hotel Equatorial Bangi-Putrajaya** 舉行，共有來自二十多個國家的研究人員一百多人人參加，有 58 篇論文發表，其中台灣僅本人參加，參加人的名牌上稱呼我國為台灣。本會議並邀請非線性力界的大師做專題演講，計有

"Rate-and-state friction models with applications to earthquake mechanics", J.R. Willis, University of Cambridge, UK

"Intermittancy of the self-excited vibrations of a submerged cantilever pipe aspirating water", A.V.Metrikine, TU Delft, The Netherlands

"Wave propagation modelling in composite plates", W.M. Ostachowicz, Polish Academy of Sciences, Poland

"Resonant manipulation of particles in nanosystems", T. Hikiyara, Kyoto, Japan

"Dynamics of dice games", T. Kapitaniak, TU Lodz, Poland

"Deformation and limit state of solids with stress state dependent plastic properties", E. Lomakin , Russian Academy Sciences, Moscow, Russia

"Nonlinear dynamics in science and engineering: A personal view", M.Wiercigroch, University of Aberdeen, UK

"Modelling experimental nonlinear dynamics and chaotic bifurcation scenarios with applications to suspended cables", G. Rega, University of Rome 'La Sapienza', Italy

世界級大師的演講使本人獲益良多。本人在會議中發表論文一篇，名稱為「*Co-rotational formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of thin-walled beams*」，本人的論文用共旋轉推導法探討了薄壁梁之幾何非線性動態行為，考慮了側向、扭轉及軸向振動的耦合現象，本人的研究提出一個簡單有效的方法分析薄壁梁之幾何非線性動態行為。

二 與會心得與建議

本會議雖然不大，但一切都安排的井井有條，招待上相當用心，但 **Hotel Equatorial Bangi-
Putrajaya** 的地點不好，附近沒有大眾交通工具到達，交通不便，為其缺點。

三 攜回資料

本人攜回會議論文集一本，極具參考價值。

CO-ROTATIONAL FORMULATION FOR GEOMETRICALLY NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-WALLED BEAMS

Kuo Mo Hsiao, Hong Hu Chen & Chih Ling Huang

Department of Mechanical Engineering, National Chiao Tung University of Engineering, 1001 TaHsueh Road, Hsinchu, 300, Taiwan. kmhsiao@mail.nctu.edu.tw

ABSTRACT

A co-rotational total Lagrangian finite element formulation for the geometrically nonlinear dynamic analysis of thin-walled beam with large rotations but small strain is presented. The element developed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The element nodes are chosen to be located at the centroid of the end cross sections of the beam element and the centroid axis is chosen to be the reference axis. The kinematics of the beam element is described in the current element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. The element nodal forces are conventional forces, moments and bimoments. The element nodal forces are systematically derived by consistent second order linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle in the current element coordinates. Numerical examples are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

Finite Element Formulation

The kinematics of the beam element presented in [1] and the co-rotational finite element formulation proposed in [2] are adapted here. In order to describe the system, we define three sets of right handed rectangular Cartesian coordinate systems:

1. A fixed global set of coordinates, X_i^G ($i = 1, 2, 3$) (see Fig. 1); the nodal coordinates, displacements, rotations, velocities, and accelerations, and the equations of motions of the system are defined in this coordinates.
2. Element cross section coordinates, x_i^S ($i = 1, 2, 3$) (see Fig. 1); a set of element cross section coordinates rigidly tied to the centroid of the cross section is associated with each cross section of the beam element.
3. Element coordinates, x_i ($i = 1, 2, 3$) (see Fig. 1); a set of element coordinates is associated with each element, which is constructed at the current configuration of the beam element. Note that this coordinate system is just a local coordinate system not a moving coordinate system. The deformations, element nodal forces, stiffness matrix, and mass matrix of the elements are defined in terms of these coordinates.

In this study only the doubly symmetric cross section is considered. The position vector of an arbitrary point Q in the undeformed and deformed configurations may be expressed as [1]:

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

$$\mathbf{r} = x_p(x,t)\mathbf{e}_1 + v(x,t)\mathbf{e}_2 + w(x,t)\mathbf{e}_3 + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \tag{2}$$

where $x_p(x,t)$, $v(x,t)$, and $w(x,t)$ are the x_1 , x_2 and x_3 coordinates of point P , respectively, in the deformed configuration, $\theta_{1,x} = \theta_{1,x}(x,t)$ is the twist rate of the deformed centroid axis, $\omega = \omega(y,z)$ is the Saint Venant warping function for a prismatic beam of the same cross section, and \mathbf{e}_i and \mathbf{e}_i^S ($i = 1, 2, 3$) denote the unit vectors associated with the x_i and x_i^S axes, respectively. Here, $v(x,t)$, $w(x,t)$, and $\theta_1(x,t)$, are assumed to be the Hermitian polynomials of x .

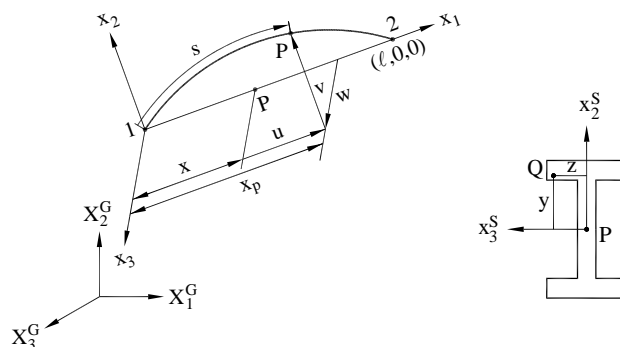


Figure1. Coordinate systems

The element nodal parameters are chosen to be u_{ij} , three components of the translation vectors \mathbf{u}_j , ϕ_{ij} , three components of the rotation vectors ϕ_j , and β_j , the twist rate of the centroid axis at node j ($j = 1, 2$). Here, the values of ϕ_j are reset to zero at current configuration. Thus, $\delta\phi_{ij}$ represents infinitesimal rotations about the x_i axes [3], and the generalized nodal forces corresponding to $\delta\phi_{ij}$ are the conventional moments about the x_i axes. The generalized nodal forces corresponding to δu_{ij} are forces in the x_i directions. The generalized nodal forces corresponding to $\delta\beta_j$ are bimoment. The element nodal force vector is obtained from the virtual work principle and the d'Alembert principle in the current element coordinates. The virtual work principle requires that

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \rho \delta \mathbf{r}^t \ddot{\mathbf{r}}) dV = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\}, \quad \mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_\theta^D + \mathbf{f}_\theta^I = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\theta}_1^*, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\theta}_2^*, \delta \boldsymbol{\beta}\}, \quad \delta \mathbf{q} = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\phi}_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\phi}_2, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,x} - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,y}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,z} \quad (7)$$

where \mathbf{f}^D and \mathbf{f}^I are element deformation nodal force vector and inertia nodal force vector corresponding to $\delta \mathbf{q}$, respectively. $\delta \boldsymbol{\theta}_j^* = \{\delta \theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$, $\delta \varepsilon_{1i}$ ($i = 1, 2, 3$) are the variation of ε_{1i} in Eq. (7) corresponding to $\delta \mathbf{q}_\theta$.

Note that because $\delta \varepsilon_{1i}$ are function of $\delta \mathbf{q}_\theta$, δW_{int} may be expressed by $\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta$. \mathbf{f}_θ^D and \mathbf{f}_θ^I are generalized deformation nodal force vector and inertia nodal force vector corresponding to $\delta \mathbf{q}_\theta$. σ_{1i} ($i = 1, 2, 3$) are the second Piola-Kirchhoff stress. ρ is the density, $\delta \mathbf{r}$ and $\ddot{\mathbf{r}}$ are the variation and the second time derivative of \mathbf{r} in Eq. (2), respectively. Note that $\ddot{\mathbf{r}}$ is the absolute acceleration. In conjunction with the co-rotational formulation, only the terms up to the second order of nodal parameters are retained in element nodal forces.

The relation between $\delta \mathbf{q}$ and $\delta \mathbf{q}_\theta$, and the relation between \mathbf{f} and \mathbf{f}_θ may be expressed as [3]

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad \text{and} \quad \mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (8)$$

The element stiffness matrix and mass matrix may be expressed as

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{and} \quad \mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \quad (9)$$

The nonlinear equations of motion may be expressed by

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^D - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (10)$$

where \mathbf{F}^R is the unbalanced force among the inertia nodal force \mathbf{F}^I , deformation nodal force \mathbf{F}^D , and the external nodal force \mathbf{P} . \mathbf{F}^I and \mathbf{F}^D are assembled from the element nodal force vectors, which are calculated using Eqs. (4), (8) first in the current element coordinates and then transformed from element coordinate system to global coordinate system before assemblage using standard procedure.

Numerical studies

An incremental iterative method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson method [2] is employed here. The example considered is a simply supported W14×43 beam [1] subjected to an eccentric axial step loading.

References

- [1] Lin, W.Y. and Hsiao, K.M. 2001 Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190**, pp. 6023-6052.
- [2] Hsiao, K.M., Lin, J.Y. and Lin, W.Y. 1999 A Consistent Co-Rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **169**, pp. 1-18.
- [3] Hsiao, K.M. 1992 A Co-rotational Total Lagrangian Formulation for Three Dimensional Beam Element, *AIAA Journal* **30**, pp. 797-804.