

行政院原子能委員會
委託研究計畫研究報告

電漿火炬電源非線性且隨機控制的研究
A Study of Nonlinear and Stochastic Behavior in Plasma Torch

計畫編號：972001INER019

受委託機關(構)：國立交通大學 電機與控制工程學系

計畫主持人：廖德誠 教授

核研所參與人員：李恆毅、黃世文

聯絡電話：(03) 5712121 ext. 54363

E-mail address：ldc@cn.nctu.edu.tw

報告日期：中華民國 97 年 12 月 23 日

目 錄

目 錄.....	I
中文摘要.....	1
英文摘要.....	2
壹、計畫緣起與目的.....	3
一、計畫緣起.....	3
二、計畫目的.....	5
三、研究項目與進度.....	7
貳、研究方法與過程.....	8
參、主要發現與結論.....	13
一、直流電漿火炬動態模型之建立.....	13
(一) 雙對流理論.....	14
(二) 直流電漿火炬之數學模型.....	18
二、模擬及分析電漿火炬非線性之動態特性.....	33
三、協助建立井式電漿火炬混沌參數量測儀器之實驗平台.....	68
四、井式電漿火炬混沌參數之初步量測與資料分析.....	75
五、電漿火炬混沌現象成因之分析與探討.....	91
六、混沌信號判斷方法及控制對策.....	92
七、結論.....	93
肆、參考文獻.....	96

中文摘要

本計畫擬配合原能會核研所之研究，探討井式電漿火炬之非線性特性，並驗證理論分析成果之成效。在近年來已發表文獻中指出，大氣電弧電漿裝置之顫動現象可能為混沌動態行為。此研究結果指出，電漿火炬之顫動現象可能為混沌行為而非隨機行為，而這樣的動態行為是有可能被控制的。由過去的研究發現，混沌動態行為有可能是因為系統不穩定周期性行為所衍生的，如果這些不穩定周期性行為發生的成因能夠被探討並加以控制且使其穩定化後，將可消除電漿裝置的顫動現象以改善系統之性能。本計畫應用分叉理論及非線性控制理論針對井式電漿火炬之非線性特性加以探討，找出其造成系統混沌現象的成因，並探討混沌現象發生的可能條件。此外，本計劃也協助核研所之井式電漿火炬實驗平台的建立與量測資料分析以初步確認理論分析之成果。

Abstract

It is known that a DC power-driven plasma torch might exhibit random behavior which might affect the performance of the torch. A recent study shows that such a random behavior phenomenon might be a deterministic type chaotic behavior. One of the major goals of this project is to verify such a finding. In the project, we have cooperated with the researchers from the Institute of Nuclear Energy to work on the dynamical study of the well-type DC power plasma torch. First, an analytical model was derived from theoretical point of view. It was followed by the dynamical analysis of the derived system model via the help from general nonlinear system theory. Numerical studies of the plasma torch's behavior were also carried on by using the code Matlab and AUTO. Moreover, we have worked with the researchers from the Institute of Nuclear Energy to build up a test-bed for well-type DC power plasma torch for experimental study. A preliminary of sensor measurement, data collection and numerical analysis of the experimental data were also covered in the proposed tasks.

壹、計畫緣起與目的

隨著科技的日新月異，人類的生活因科技的進步而愈來愈便利。然而，科技產生的污染與廢棄物未因時代的進步而減少，反而造成許多無法處理的污染源與垃圾。目前，一般的廢棄物處理最常使用高溫燃燒與垃圾掩埋的方式，利用高溫燃燒將垃圾體積縮小以便於提高垃圾掩埋場的使用年限。但是高溫燃燒會產生有毒氣體與灰渣，且垃圾掩埋場會造成人民的抗爭與場地的限制，甚至可能造成土地二次污染。高溫電漿火炬的開發即是解決廢棄物處理的有效方法之一。因此，為了解決廢棄物處理問題，本計畫配合國家「電漿焚化熔融處理有害廢棄物產業化應用與發展」施政目標，探討高功率直流電漿火炬的動態行為且分析高溫電漿火炬目前尚須改善的問題，以提升國家環境保護技術，朝零廢棄物的目標發展。

一、計畫緣起

在地球上，物質大部分是呈現固態、液態和氣態。當物質為氣態時，電子在電場束縛下圍繞原子核旋轉，若氣體被加熱，其電子的熱運動動能就會增加。持續加熱至電子的熱運動動能超過原子核對它的束縛，電子就成為自由電子，這種過程稱之為電離。若氣體之電離度為 100% 時，即氣體被完全電離，則氣體就會游離成電漿。電漿依溫度與用途可分為熱電漿(Thermal Plasma)和冷電漿(Cold Plasma)，本計畫以熱電漿系統為研究重點。電漿火炬則為熱電漿源的一種；電漿火炬中心的溫度高達攝氏一萬度以上，其熱輻射可使熱傳效率優於傳統火焰，大

部分所有的物質，在這種高溫之下會裂解成簡單的原子，甚至難以破壞的碳氫化合物，包括多氯聯苯，也會被分解成簡單無害的氣體。因此，處理灰渣熔融，高濃度廢溶劑、低放射性廢棄物及低濃度有害廢氣時，電漿火炬也都可以有效的處理且安全固化焚化爐所產生之高污染灰渣。

近年來，工業上已廣泛的使用電漿裝置，例如：處理廢棄物、電漿噴塗、半導體製成等等。然而，不同用途的電漿裝置內部顫動（Fluctuation）現象會影響系統的使用效能與使用週期。雖然已有許多相關的研究文獻探討電漿火炬的顫動現象，但仍侷限於實驗觀察與分析，對於不同電漿裝置內部顫動現象的分析與了解仍有待深入探討。在過去的研究，分析與探討電漿火炬之動態行為仍以實驗量測為主，改善顫動現象的效果有限且必須花費相當多的設備成本才能量測到狀態之數據。因此，學者開始朝數學理論發展，建立電漿火炬之數學模型，希望藉由數學理論分析判斷與估測影響電漿火炬使用效率的原因。研究學者依據電漿火炬之物理特性開始建立系統之數學動態模型，透過能量守恆理論推導出 PDE (Partial Differential Equation) 形式之數學模型。然而，PDE 形式之數學模型並不易求解與分析，利用數值方法求解也必須仰賴高速電腦進行平行運算才能縮短計算時間與誤差。在 2000-2004 年，印度學者 Ghorui、Sahasrabudhe、Murthy, Das 和 Venkatramani 則引用三對流(Triple Convection)理論推導電漿火炬之數學模型，其目的是將在空間變化的系統狀態投影至時間變化的非線性三階振幅方程式。如此一來，即可引用發展成熟的系統分析理論探討電漿

火炬之動態行為且擬定電漿火炬之性能改善對策。另外，學者 Ghorui, Sahasrabudhe, Murthy, Das 和 Venkatramani 透過三階振幅方程式與實驗量測發現電漿裝置內部顫動現象可能是一種混沌動態行為 (Chaotic dynamical behavior)。學者提出顫動現象並非以往認知的隨機行為而是會呈現週期性變化的混沌現象，電漿裝置內部的顫動行為就有可能可被控制以改善其特性。但從非線性理論分析三階非線性振幅方程式之結果發現，仍有其他因素可能使電漿火炬進入混沌行為。因此，顫動現象之成因須再深入探討，並分析使電漿火炬發生顫動現象的各種可能發生之原因。這些研究結果將可提供更完善的理論依據以避免系統發生不可預期的結果。

二、計畫目的

近年來，電漿火炬已被廣泛的應用於各種不同的工業用途，例如電漿噴塗、線電弧噴塗、電漿化學蒸汽沈積 (CVD)、電漿粉末合成、有毒廢棄物分解、珠化處理、電漿熔融、電漿精鍊及奈米製成等。然而，受限於電漿火炬系統本身之硬體架構，系統仍有許多問題尚待解決且電漿火炬的動態分析仍以實驗量測為主，實驗流程往往需花費相當多的時間與成本。另外，高溫電漿火炬的內部動態為三度空間中的流體變化，其物理與化學反應相當複雜，且火炬的內部與外部溫度相當高(約可產生 5,000~20,000°C)，實驗數據不易量測。因此，透過實驗量測往往無法有效分析其行為特性。基於上述考量，近年來之相關研究文獻開始建立數學分析模型本以探討電漿火炬之動態特性。在數學理論方面，研究文獻建立偏微分方程式(Partial Differential

Equation, PDE)形式之數學分析模型以探討電弧電漿之動態行為。然而，PDE 之動態模型不易求解，數值分析往往需要透過高速電腦進行平行運算且邊界條件、程式撰寫及相關參數設定會影響準確度。

在 2000-2004 年，學者 Ghorui、Sahasrabudhe、Murthy、Das 和 Venkatramani 則是將 PDE 形式之動態方程式投影至常微分方程式(Ordinary Differential Equation, ODE)。研究學者將空間變化之系統狀態投影至時間變化之振幅方程式，動態行為之特性探討就可引用系統分析理論解釋電漿系統之顫動行為。其振幅方程式表示如下：

$$\ddot{F} + \Omega_2 \dot{F} + \Omega_1 \dot{F} + \Omega_0 F = -F^3$$

透過文獻之模擬分析與實驗驗證發現電弧電漿裝置弧根的顫動現象可能是一種混沌動態行為(Chaotic dynamical behavior)而非以往認知的隨機行為，則電漿之顫動行為可能可以經由控制來改善其特性。在模擬分析方面，學者 Ghorui、Sahasrabudhe、Murthy、Das 和 Venkatramani 則是藉由改變系統參數 Ω_0 發現當系統參數進入某一個範圍內會發生混沌現象。然而，從文獻建立的三階非線性振幅方程式發現混沌現象的發生可能不只 Ω_0 改變，即 Ω_1 與 Ω_2 的改變也可能使系統發生混沌行為。因此，造成混沌現象的參數範圍仍需再深入分析以找出使電漿系統發生顫動現象的原因。

本計畫之主要目的是建立可量測混沌參數之非線性混沌分析模型，並且分析其熱電漿火炬之動態特性。另外，協助架設井式電漿火炬參數量測之實驗平台，並且透過實驗初步量測火

炬之數據。引用系統分析理論初步分析量測之數據及分析電漿火炬之顫動現象。最後，提出混沌行為之判斷方法與控制對策以提供日後相關研究者之參考依據。

三、研究項目與進度

本計畫之研究工作主要在於分析直流電漿火炬之顫動現象，其研究項目如下所示：

1. 建立電漿火炬可量測混沌參數（包括電壓、電流、聲音、光線強度等）之非線性混沌分析模型。
2. 根據上述建立之模型，模擬及分析電漿火炬非線性之動態特性。
3. 協助準備及建立井式電漿火炬混沌參數量測儀器之實驗平台。
4. 井式電漿火炬混沌參數之初步量測與資料分析。
5. 電漿火炬混沌現象及成因之分析與探討。
6. 提出混沌信號判斷方法及控制策略。

貳、研究方法與過程

本計畫的主要目的是藉由數學理論分析直流電漿火炬顫動行為的成因，也探討直流電漿火炬可能發生的動態特性。在過去，電漿系統內部的顫動現象被認定為隨機的動態行為而無法估測其系統狀態。然而，近年有研究文獻提出電弧電漿裝置之顫動現象可能為混沌行為而非以往認知的隨機行為，則系統之顫動現象可能可以經由控制改善火炬的性能。本計畫利用非線性理論與分叉理論探討電漿火炬之顫動現象，分析可能使系統發生混沌現象之分叉參數的變化以及分叉參數的變化範圍。以下說明此計畫之研究方法與過程：

1. 建立電漿火炬可量測混沌參數之非線性混沌分析模型

為了能分析電漿火炬之動態行為，必須先建構電漿火炬之數學模型，以方便對直流電漿火炬系統之模擬及分析。然而，電漿火炬之動態會隨著空間和時間變動，經由電磁理論與守恆定理推導之數學模型為 PDE 形式。PDE 形式之動態方程式不易求解，且電漿火炬之 PDE 數學模型可能無法直接引用系統分析理論與控制理論。若透過數值方法求 PDE 之解，則必須依賴高速平行電腦計算且可能會造成計算時間過長與誤差過大，將 PDE 形式之數學方程式投影至 ODE 形式數學動態模型是必要的。因此，本計畫依據 P. H. Coullet 和 E. A. Spiegel 提出之 normal form 理論、雙對流理論以及系統物理特性，透過數學推導以建構系統分析模式。經由 normal form 理論與雙對流理論可以建構電漿火炬之非線性振幅方程式，模擬驗證電漿火炬之動態特性。

2. 依據建立之模型，模擬及分析電漿火炬非線性之動態特性

此部分主要是針對建立之數學分析模型探討直流電漿火炬之動態行為，探討系統之動態特性。實際系統在運作時，往往受限於本身的物理特性與硬體架構而無法完全理想化操作。當系統操作在極限邊緣時，系統之動態可能會因參數稍微變動而使系統由穩定狀態改變為不穩定或發生振盪週期。探討系統參數之變化與系統動態行為之間的關聯性可以避免系統改變穩定性。因此，本計畫應用非線性理論及分叉理論以推導系統之靜態與動態工作解及其成立之系統參數解析條件。另外，我們應用非線性系統模擬軟體，例如：Matlab 及 Auto，以驗證理論推導之成果及 non-local 系統靜態與動態特性。對系統的分叉現象分析，我們採用 Auto 這套數學軟體來繪製系統之分叉圖，分析系統可能發生的動態特性。另外，研究文獻提出電弧電漿裝置之顫動現象可能為混沌行為，但文獻中僅考慮單一參數變化之動態分析；本計畫則考慮系統可能發生混沌現象之原因，且找出改變系統穩定性的參數範圍。我們也探討學者 A. K. Das 沒有分析的系統參數以及模擬可能之動態特性；從分叉圖可以知道系統動態發生改變的範圍。接著，此部分選取分叉圖上每個區域之分叉參數繪製時間響應圖和相位圖，模擬系統之動態特性以及震盪週期之變化。

另外，為了探討發生混沌現象之成因，我們透過雙參數分叉理論探討二個參數同時發生變化之系統動態特性。我們也選取雙參數分叉圖上每個區域之分叉參數以及選取系統初始值繪製時間響應圖和相位圖，驗證系統之動態特性以及振盪週期之

變化。

3. 協助準備及建立井式電漿火炬混沌參數量測儀器之實驗平台

除了理論分析工作之外，在本計畫中，我們透過與原子能委員會核能研究所物理組同仁之合作，協助架構相關的實驗設備，並以實際系統之實驗量測數據來評估理論分析之成果。茲簡述如下：

- (1) 本計畫透過與原能會核研所物理組討論直流電漿火炬實驗平台之操作範圍與量測儀器之使用規格和限制，規劃直流電漿火炬的相關實驗平台。
- (2) 協助建立一適當的量測系統

在此部分之工作重點在於建立實驗平台，實驗設備包含直流電漿火炬平台以及量測系統，例如：架設紅外線測溫儀觀察火炬的溫度變化、架設電壓電流探棒、架構流量計量測直流電漿火炬內部的流量變化、架設麥克風接收直流電漿火炬的音波以及設計ADC將擷取資料存入電腦以提供日後分析。

量測儀器之架構方面，本計畫主要是針對電漿火炬之顫動現象探討，架設之重點放在電壓、電流、光和聲音之訊號量測，藉由實驗量測之數據以利於系統之模擬驗證。

- (3) 評估量測相關的周邊系統之操作特性以及確認各項儀器之使用規格，例如：最大氣體流量、磁場、音波量測、溫度量測之範圍、外加電流或外加電壓。確認量測平台之操作範圍以及儀器規格可以提高實驗數據之準確性，避免擷取到錯誤資料。

4. 井式電漿火炬混沌參數之初步量測與資料分析

此部分主要是經由實驗量測數據初步分析直流電漿火炬發生的顫動現象，找出影響直流電漿火炬產生顫動的主因，以便於日後研擬控制對策與設計。在實驗量測方面，本計畫擷取電壓、電流、光和聲音之實驗數據，透過時間響應和頻譜分析系統之動態特性。從實驗結果可以觀察到電壓、電流、光和聲音均有顫動行為的發生，頻譜分析也顯示系統會發生週期變化。

5. 電漿火炬混沌現象及成因之分析與探討

此部分之工作重點是經由數學理論分析可以評估直流電漿火炬可能發生混沌現象的成因。本計畫希望透過非線性理論和分叉理論探討系統可能發生混沌行為的分叉參數變化以及參數範圍。因此，我們建構系統分叉圖以估測造成混沌行為的可能原因，並模擬分析電漿火炬之時間響應圖和相位圖觀察系統的動態特性。另外，除了電漿火炬之混沌行為，本計畫探討系統可能產生的其他動態特性，例如：電漿火炬之動態行為從穩定狀態改變至振盪週期的特性分析，最後進入混沌現象到系統狀態發散之參數變化。

6. 提出混沌信號判斷方法及控制策略

已知高溫電漿火炬之物理特性相當複雜，系統狀態並不易量測且數據擷取受限於量測儀器之使用規格而無法精確量測實驗數據。然而，學者 A. K. Das 提出顫動現象可能為一混沌行為，那電漿火炬可能可以控制改善其性能。從數學理論分析結果可以預估混沌現象的系統參數範圍；當分叉參數值開始減少且選

取特定區域的系統初始值會導致系統由穩定狀態轉變為一倍週期之振盪行為，在由一倍週期依序轉換成二倍、四倍和八倍週期，最後進入混沌現象到系統狀態發散；由數學理論估測分叉參數之變化範圍，監控系統動態之變化以避免進入混沌行為。另外，混沌現象是一個奇特的動態行為，系統進入混沌行為時，狀態會呈現有界且不規格之週期變化；這種動態特性會造成無法預估系統之行為，即無法控制。因此，此部分之研究方法必須依據上述之數學理論分析發生混沌行為的參數範圍，設計監控系統與控制器補償系統狀態以避免產生不規則之週期變化。

參、主要發現與結論

本計畫之研究方法與過程主要是針對直流電漿火炬建立數學分析模型，並透過非線性理論與分叉理論分析直流電漿火炬之顫動現象。另外，本計畫也考慮可能使系統發生混沌現象的其他因素，探討發生混沌行為的各種可能性，並與學者 A. K. Das 之研究結果做比較。依據非線性系統分析之方法，搭配分叉理論可以發現其他參數也發生變化時，其他的系統參數仍會因變化而產生分叉現象，即系統可能發生混沌的動態行為。因此，本計畫之研究成果提供其他可能發生混沌行為之系統參數範圍與其他可能因素。

在實驗方面，我們依據核研所現有的直流電漿火炬系統協助建立實驗之量測硬體架構，且針對系統之數據量測提供相關意見與建議。另外，透過核研所物理組安排實驗並初步量測相關數據，本計畫引用系統分析理論初步分析量測數據與探討火炬之動態行為。最後，藉由理論探討與實驗初步量測分析之結果提出直流電漿火炬發生顫動現象的可能原因與初步研擬控制對策，以提供未來火炬效能改善之依據。以下將逐一說明本計畫之研究成果。

一、直流電漿火炬動態模型之建立

直流電漿火炬系統動態模型是經由能量守恆、金屬守恆、動量守恆、質量守恆以及 Maxwell 理論所建立，並搭配符合實際物理意義設定邊界條件。建立之數學模型是考慮在空間中變化，即數學分析模型是以偏微分的形式呈現。PDE 形式之動態模型不易求解且無法有效擬定改善對策。因此，本計畫依據 P. H.

Coulet 和 E. A. Spiegel 以及 A. K. Das 提出之理論推導以時間變化為基礎之非線性振幅方程式。另外，A. K. Das 提出的研究成果僅討論單參數變化造成混沌現在之參數範圍，而本計畫利用非線性理論與分叉理論分析直流電漿火炬數學模型，探討其他可能發生變化之系統參數與混沌動態行為之間的關聯性。最後，分析模擬之結果與 A. K. Das 提出之成果作比較。

(一) 雙對流理論

雙對流理論是 P. H. Coulet 和 E. A. Spiegel 於 1983 年所提出，其構想是建立以時間變化為基礎之動態方程式，以利於引用系統分析理論探討其動態特性。雙對流理論是將數學模型正規化，經由數學投影簡化成正規形式。因此，本計畫利用正規化理論將 PDE 形式之直流電漿火炬數學模型簡化為 ODE 形式之非線性振幅方程式。

首先，考慮一非線性方程式

$$\partial_t U = M_\lambda U + N_\lambda(U) \quad (1)$$

其中 t 表示時間、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ 表示 p 個參數的集合、 $U = (U_1, \dots, U_p)$ 則表示定義在實函數空間的系統狀態以及 M_λ 和 N_λ 分別表示線性和非線性操作子(Operator)且 $N_\lambda(U)$ 至少為二次式。當 M_λ 和 N_λ 包含空間微分，我們可以將邊界條件指定為

$$B_\lambda U + C_\lambda(U) = 0 \quad \text{on } \partial V \quad (2)$$

其中 V 表示物理空間(Physical Space)； B_λ 和 C_λ 分別表示線性與非線性操作子。假設 M_λ 的頻譜為離散的。為了簡化表示，

我們僅考慮在非退化之頻譜。首先，假設此問題為同次的 (Homogeneous)，則可以得到下列形式的解

$$U = e^{\eta t} \Phi_k \quad (3)$$

其中

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} \Omega_1^k W_1(x, k) \\ \Omega_2^k W_2(x, k) \\ \vdots \\ \Omega_N^k W_N(x, k) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ω_L^k 為常數且 W_L 為位置函數。當(1)為 ODE 時，則 $W_L = 1$ ， $L = 1, 2, \dots, N$ 。向量 k 表示用來描繪空間架構函數 W_L 的參數集合。對於每一個 k ，(1)和(2)可以簡化為特徵值問題

$$M_{\lambda} |_{k} \Phi_k = \eta \Phi_k \quad (5)$$

和

$$B_{\lambda} |_{k} \Phi_k = 0 \text{ on } \partial V \quad (6)$$

特徵方程式則可以為下列之形式

$$P_k^N(\eta; \lambda) \equiv \eta^N + a_{N-1}^k(\lambda) \eta^{N-1} + \dots + a_0^k(\lambda) = 0 \quad (7)$$

對於(7)的每一個根，我們可以找到振幅 Ω_i^k 以及相符合的正規形式 Φ_k 。因此，將(7)整理後可以得到

$$P(\eta; \lambda) \equiv \prod_k P_k^N(\eta; \lambda) = 0 \quad (8)$$

假設(8)有 l 個零根 ($\eta = 0$) 和 m 對虛根 ($\text{Re} \eta = 0$ 和 $\text{Im} \eta \neq 0$)，則(8)有

$$d = l + 2m \quad (9)$$

個 $\text{Re} \eta = 0$ 的根。這些 d 個根則稱為 critical。假設在 λ_0 附近的 Δ 區域內，系統存在有很小的 $|\text{Re} \eta|$ 及系統的其他根 ($\text{Re} \eta \leq \eta_0 < 0$) 也在 Δ 區域內，其中 η_0 為實常數；則 ODE 形式的(1)之解則可

能使 $\eta_0 \rightarrow -\infty$ 。在(8)中我們可以在 Δ 區域找到二種可能性的多項式：一種是 degree 為 d 且根為 critical 的多項式($\lambda = \lambda_0$)，此多項式稱為 critical polynomial；另外一個多項式則是根在 Δ 區域從虛軸遠離。因此，若考慮最簡單的例子： $l=1$ 和 $m=0$ ，critical polynomial 則為 $\eta + \mu_0^k(\lambda)$ ，在此情況會發生靜態分叉 (Stationary Bifurcation)；另外，當 $l=0$ 和 $m=1$ (即 $d=2$)，則會發生 Hopf bifurcation，其中 critical polynomial 為 $\eta^2 + \mu_1^k(\lambda)\eta + \omega^2(\lambda)$ 。考慮 $d=2$ 的情況下，定義 codimension 2 表面之條件

$$\mu_1^k(\lambda) = 0 \text{ 和 } \mu_0^k(\lambda) = 0 \quad (10)$$

考慮一般式，存在有 $n=l+m$ 個 critical 條件定義 codimension n 的表面，則將此表面稱為 polycritical surface。當我們可以將問題簡化為 ODE 時，求得的解(隨時間變化)會接近 polycritical surface。

接著，我們將依據 polycritical surface 簡化問題。假設(1)存在有 polycritical surface

$$P^c[\mu_i(\lambda); \omega_j(\lambda); \eta] = 0, \quad i=0,1,\dots,n-1, \quad j=0,1,\dots,m-1 \quad (11)$$

(11)有 l 個 $\eta=0$ 的根和 m 對 $\eta = \pm i\omega_j$ 的根。因此，系統的 polycritical surface 有 $d=l+2m$ 個 critical modes 且有 codimension $n=l+m$ 。假設有任意點 $\lambda = \lambda_0$ 存在於 polycritical surface，從(3)可得到 generalized critical modes ϕ_i ， $i=1,2,\dots,d$ ；modes 的集合構成了 generalized critical surface 的基底(basis)。這些集合從(3)提供了完整的 stable modes f_j 。因此， U 可以分成二部分：一個是 generalized critical space，另

外一個為 stable space。我們將 U 改寫成以下之式子：

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^d \alpha_i(t) \phi_i(x) + \sum_j \beta_j(t) f_j(x) \quad (12)$$

(1)則可以寫成

$$\dot{\alpha} = J\alpha + F(\alpha, \beta) \quad (13)$$

$$\dot{\beta} = L\beta + G(\alpha, \beta) \quad (14)$$

其中 J 和 L 為矩陣且 F 和 G 為非線性函數。非奇異矩陣 (nonsingular matrix) L 的所有特徵值均在負實部，而 J 有零實部且 J 為 Jordan form。接著，引進非線性轉換

$$\beta = b + B(\alpha), \quad \partial_\alpha B|_{\alpha=0} = 0 \quad (15)$$

將(15)帶入(14)，則可以得到

$$\left(\frac{d}{dt} - L \right) b = LB - (J\alpha) \partial_\alpha B - F(\alpha, b + B) \partial_\alpha B + G(\alpha, b + B) \quad (16)$$

若可以選擇 B 使得

$$(J\alpha \partial_\alpha - L)B = -F(\alpha, B) \partial_\alpha B + G(\alpha, B) \quad (17)$$

則 $b=0$ 定義為(13)和(14)的不變流形(invariant manifold)，且對於很小的 $|\alpha|$ ，此不變流形是線性穩定的。將

$$\beta = B(\alpha) \quad (18)$$

帶入(13)，則可以得到

$$\dot{\alpha} = J\alpha + F(\alpha, B(\alpha)) \quad (19)$$

因此，對於 $\mu \equiv (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}) = 0$ ，我們可以知道系統有 n 個振幅方程式(amplitude equations)存在使得(17)可以求解的，即可以利用 perturbation 理論求解。

當根離開 polycritical surface 時，(19)可以變形為

$$\dot{\alpha} = K_\mu \alpha + h_\mu(\alpha) \quad (20)$$

其中 K_μ 表示當 J 的所有 elements 在擾動以及 h_μ 則表示為非線性向量(vector-valued)函數，即 $K_0 = J$ ， K_μ 的特徵方程式為 critical polynomial P^C 。 P^C 有 d 個參數；一般來說， K_μ 有 d^2 個參數。我們要將 K_μ 放入正規形式且包含最少的參數。因此，可以利用以下非奇異之座標轉換得到上述結果：

$$A = C^{-1}\alpha C \quad (21)$$

另外， J 的變形則稱為 Jordan-Arnold form，符號定義為 J_μ 。將 K_μ 放入 Jordan-Arnold form，則(20)可以改寫為

$$\dot{A} = J_\mu A + g_\mu(A) \quad (22)$$

其中

$$J_0 = J \quad (23)$$

表示為另外一個非線性向量函數。因此，(22)即為振幅方程式的正規化形式。接下來，本計畫將依據此雙對流理論推導直流電漿火炬之數學動態模型。

(二) 直流電漿火炬之數學模型

直流電漿火炬之建立主要為了探討弧根之動態行為，建立能解釋顫動行為之數學動態模型。直流電漿火炬之動態行為是由熱守恆(conservation of heat)、金屬守恆(conservation of metal)、動量守恆(conservation of momentum)、質量守恆(conservation of mass)及 Maxwell's equation 所決定且依據電漿火炬之物裡特性找出電漿系統之 boundary conditions。以下將依據 P. H. Couillet 和 E. A. Spiegel 與 A. K. Das 之研究理論為基礎，建立直流電漿火炬之非線性方程式。建立電漿火炬，我們

有以下六個假設：

1. 弧根可近似為對稱的圓柱體
2. (u, v, w) 表示在 r 、 θ 和 z 方向之速度
3. $T(r, \theta, z, t)$ 和 $S(r, \theta, z, t)$ 分別表示產生顫動現象時的溫度和金屬揮發濃度及分別存在有靜態組合 $T_0(r, \theta, z)$ 和 $S_0(r, \theta, z)$
4. z 方向且高度為 d 的區域內存在溫度梯度 $\Delta T/d$ 和金屬濃度梯度 $\Delta S/d$
5. 在 r 方向存在均勻溫度
6. 對於圓柱形的電弧圓柱體的半徑 R 而言，系統操作在固定電流的電源供應且電流密度 J_0 趨近於常數

描述電漿火炬顫動現象的動態方程式分別可由下述之方程式共同決定：

(1) 熱守恆

$$\frac{\partial T}{\partial t} - w \frac{\Delta T}{d} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T \quad (24)$$

其中

T : fluctuating temperature component

$\kappa = k/\rho s$: 熱擴散率

$\vec{v} = u\hat{r} + v\hat{\theta} + w\hat{z}$: 速度

k : 熱傳導率

ρ : 密度

s : 比熱

(2) 金屬守恆

$$\frac{\partial S}{\partial t} - w \frac{\Delta S}{d} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = \kappa_s \nabla^2 S \quad (25)$$

其中

S : 金屬濃度

κ_s : 材料的傳導率

(3) 動量守恆

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \alpha T - \vec{g} \beta S + \frac{1}{\rho_0} \vec{J} \times \vec{B} \quad (26)$$

其中

壓力(p)造成的垂直應力

黏性(ν)造成的切線方向應力

流體和材料加入的擴張所造成的引力

電流密度(J)伴隨著磁場(B)的相互影響所造成的

Lorenz force

\vec{g} : 重力加速度

(4) 質量守恆

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (27)$$

(5) Maxwell's equation

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon} \quad (28)$$

其中

σ_c : 導電率

μ_0 : 介電係數

(6) 電流密度

$$\vec{J} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (29)$$

(7) 狀態方程式

$$\Delta\rho = \rho_0(-\alpha T + \beta S) \quad (30)$$

其中

α 和 β 則定義於(30)

E : 電場

k : 熱傳導率

ρ_c : 電荷密度

考慮 B 為圓柱型對稱。因此(28)可以寫成

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} = \eta_B \nabla^2 \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

若考慮接近弧根處為一微小圓柱，則可近似為 $\vec{B} = B_0(r) \hat{\theta}$ 和

$\vec{J} = J_0 \hat{z}$ 。方程式則可以改寫為

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \phi(B, v) - \mu_0 J_0 u + \eta_B \nabla^2 B \quad (31)$$

其中

$$\phi(B, v) = (B \cdot \nabla)v + u(B/r), \quad \eta_B = \frac{1}{\mu_0 \sigma_c}, \quad B = B_0$$

r : 圓柱的半徑

為了在簡化上述之動態方程式，取其旋度移除壓力項。引進 stream function ψ 使得

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \Gamma(\psi, \varphi) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \nabla^2 \psi, \quad J_0 = I/d^2, \quad B_0 = \mu_0 J_0 R/2$$

接著，利用表一 dimensionless quantities 的形式和表二的 nondimensional numbers 帶入上式，可以將方程式簡化。

表一、Form of dimensionless quantities

Dimensionless quantities	Form
Temperature	$T' = \frac{T}{\Delta T}$
Concentration gradient	$S' = \frac{S}{\Delta S}$
Spatial coordinates	$x' = \frac{x}{d}, y' = \frac{y}{d}, z' = \frac{z}{d}$ $r' = d \cdot r, \theta' = d \cdot \theta, z' = d \cdot z$
Velocity components	$u' = \frac{u}{\kappa/d}, v' = \frac{v}{\kappa/d}, w' = \frac{w}{\kappa/d}$
Time	$t' = \frac{t}{d^2/\kappa}$
Magnetic field	$B' = \frac{B}{B_0}$

表二、Nondimensional numbers

Rayleigh number	R_l	$R_l = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu}$
Absolute Rayleigh number	R_s	$R_s = \frac{g\alpha\Delta S d^3}{\kappa\nu}$
Prandtl Number	σ	$\sigma = \frac{\nu}{k}$
Magnetic Prandtl number	ξ	$\xi = \frac{\eta_B}{k}$
Lewis number	τ	$\tau = \frac{\kappa_s}{\kappa}$
Chandrasekhar number	Q	$Q = \frac{B_0^2 d^2}{\mu\rho_0\eta\nu}$

其中定義 $r = dr'$ 、 $\theta = d\theta'$ 、 $z = dz'$ 。在 nondimensionalization 之後，governing equation 的集合可以改寫如下：

$$\text{由(26)知：} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \bar{g} \alpha T - \bar{g} \beta S + \frac{1}{\rho_0} \bar{J} \times \bar{B}$$

$$(A1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \because \text{curl } v = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \eta \Rightarrow \frac{\kappa}{d^2} \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) = \eta$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\kappa}{d^2} \eta'$$

$$\therefore \text{curl} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \eta'}{\partial t'}$$

$$(A2) \quad \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \Rightarrow \text{取旋度, 则 } \text{curl}(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \eta$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\kappa^2}{d^4} \vec{v}' \cdot \nabla \eta' = -\frac{\kappa^2}{d^4} \Gamma(\psi, \eta')$$

$$(A3) \quad v \cdot \nabla^2 \vec{v} \Rightarrow \text{取旋度, 则}$$

$$\Rightarrow \text{curl}(v \cdot \nabla^2 \vec{v}) = \frac{\kappa^3}{d^4} v \cdot \nabla^2 \eta' = \frac{\kappa}{d^4} \cdot \kappa \sigma \cdot \nabla^2 \eta' = \frac{\kappa^2}{d^4} \sigma \cdot \nabla^2 \eta'$$

$$(A4) \quad \frac{1}{\rho_0} \vec{J} \times \vec{B}$$

$$(A5) \quad \vec{g} \alpha T = \Delta T g \alpha T'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{curl}(\Delta T g \alpha T') &= \Delta T g \alpha (-\partial_r T') = -\frac{\kappa^2}{d^4} \cdot \frac{\Delta T g \alpha d^3}{\kappa v} \frac{v}{\kappa} \cdot \partial_r T' \\ &= -\frac{\kappa^2}{d^4} R_l \sigma \cdot \partial_r T' \end{aligned}$$

$$(A6) \quad \vec{g} \beta S, \text{ 同(A5)可得}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{curl}(\Delta S g \beta S') &= \Delta S g \beta \partial_r S' = \frac{\kappa^2}{d^4} \cdot \frac{\Delta S g \beta d^3}{\kappa_s v} \frac{v}{\kappa} \cdot \frac{\kappa_s}{\kappa} \partial_r S' \\ &= \frac{\kappa^2}{d^4} R_s \sigma \tau \partial_r T' \end{aligned}$$

由(A1)-(A6)可知

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \eta'}{\partial t'} &= \frac{\kappa^2}{d^4} \Gamma(\psi, \eta') + \frac{\kappa^2}{d^4} \sigma \cdot \nabla^2 \eta' - \frac{\kappa^2}{d^4} R_l \sigma \cdot \partial_r T' \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{d^4} R_s \sigma \tau \partial_r T' - \frac{2\kappa^2}{R d^4} \sigma \xi Q \partial_z B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \eta'}{\partial t'} = \Gamma(\psi, \eta') + \sigma \nabla^2 \eta' - R_l \sigma \partial_r T' + R_s \sigma \tau \partial_r S' - \frac{2}{R} \sigma \xi Q \partial_z B' \quad (32)$$

$$\text{由(24)知：} \frac{\partial T}{\partial t} - w \frac{\Delta T}{d} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T$$

$$(B1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{d^2/k} \cdot \frac{\partial T'}{\partial t'}$$

$$(B2) \quad w \cdot \frac{\Delta T}{d} = \frac{\kappa}{d} \cdot w' \cdot \frac{\Delta T}{d} = \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\kappa \Delta T}{d^2} (-\partial_r \psi)$$

$$(B3) \quad \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \vec{v}' \cdot \nabla T' = -\frac{\kappa \Delta T}{d^2} \Gamma(\psi, T')$$

$$\because \vec{v} = u\hat{r} + v\hat{\theta} + w\hat{z} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\kappa}{d} (u'\hat{r} + v'\hat{\theta} + w'\hat{z}) = \frac{\kappa}{d} \vec{v}'$$

$$\because \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla T = \frac{\Delta T}{d} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{\partial T'}{\partial y'} + \frac{\partial T'}{\partial z'} \right) = \frac{\Delta T}{d} \nabla T'$$

$$\therefore \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \vec{v}' \cdot \nabla T' = -\frac{\kappa \Delta T}{d^2} \Gamma(\psi, T')$$

$$(B4) \quad \kappa \nabla^2 T = \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \cdot \nabla^2 T'$$

$$\because \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T = \frac{\Delta T}{d^2} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right) = \frac{\Delta T}{d^2} \nabla^2 T'$$

因此，從(B1)-(B4)可知

$$\begin{aligned} \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \cdot \frac{\partial T'}{\partial t'} &= \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \cdot \Gamma(\psi, T') - \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \cdot \partial_r \psi + \frac{\kappa \Delta T}{d^2} \cdot \nabla^2 T' \\ \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial t'} &= \Gamma(\psi, T') - \partial_r \psi + \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (33)$$

由(25)知，同理可得

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \Gamma(\psi, S') - \partial_r \psi + \tau \nabla^2 S' \quad (34)$$

其中 $\kappa_s = \tau \cdot \kappa$ 。

$$\text{由(31)知：} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \phi(B, v) - \mu_0 J_0 u + \eta_B \nabla^2 B$$

$$(C1) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{B_0}{d^2/\kappa} \frac{\partial B'}{\partial t'}$$

$$(C2) \quad \phi(B, v) = (B \cdot \nabla)v + u \left(\frac{B}{r} \right) = \frac{B_0 \kappa}{d^2} (B' \cdot \nabla)v' + \frac{\kappa B_0}{d} \left(\frac{B'}{r} \right)$$

$$(C3) \quad \mu_0 J_0 u = \frac{2\kappa B_0}{dR} u'$$

$$\because B_0 = \frac{\mu_0 J_0 R}{2} \Rightarrow \mu_0 J_0 = \frac{2B_0}{R}$$

$$(C4) \quad \eta_B \nabla^2 B = \frac{\kappa B_0 \xi}{d^2} \nabla^2 B'$$

從(C1)-(C4)可知：

$$\frac{\kappa B_0}{d^2} \frac{\partial B'}{\partial t'} = \frac{B_0 \kappa}{d^2} (B' \cdot \nabla)v' + \frac{\kappa B_0}{d} \left(\frac{B'}{r} \right) - \frac{2\kappa B_0}{dR} u' + \frac{\kappa B_0 \xi}{d^2} \nabla^2 B'$$

假設 $r' = d \cdot r$ 且 $\xi = \kappa/\eta_B$ ，則

$$\frac{\partial B'}{\partial t'} = \phi(v', B') - 2dR^{-1} \partial_z \psi + \xi \nabla^2 B' \quad (35)$$

接下來，我們將利用正規化形式推導直流電漿火炬之振幅方程式。首先，將(32)-(35)改寫為下列形式

$$\partial_t LY = M_\lambda Y + N(Y) \quad (36)$$

其中 L 為非奇異非線性操作子， M 表示為相依操作參數之線性操作子 N 則表示完全非線性操作子。因此，我們可以得到下列之關係式

$$Y = \begin{pmatrix} \psi \\ T \\ S \\ B \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N(Y) = \begin{pmatrix} \Gamma(\psi, \eta') \\ \Gamma(\psi, T') \\ \Gamma(\psi, S') \\ \phi(v', B') \end{pmatrix}$$

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \sigma \nabla^4 & -R_l \sigma \partial_r & R_s \sigma \tau \partial_r & -2R^{-1} \sigma \xi Q \partial_z \\ -\partial_r & \nabla^2 & 0 & 0 \\ -\partial_r & 0 & \tau \nabla^2 & 0 \\ -2dR^{-1} \partial_z & 0 & 0 & \xi \nabla^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

其中動態的控制參數為 $\lambda = (R_l, R_s, Q, \sigma, \tau, \xi)$ 。取(36)之線性部分，則可以得到

$$\partial_t LY = M_\lambda Y \quad (38)$$

依據雙對流之正規化形式之理論，(38)解的形式假設如下：

$$Y = Y_{mn} * \Lambda_{mn} e^{st} \quad (39)$$

其中 Y_{mn} 為 4 個常數組成的向量。接著，定義運算符號“*”：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$$

且

$$\Lambda_{mn} = \begin{pmatrix} \sin(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } m = 0, 1, 2, \dots \text{ 和 } n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

接著，將(40)帶入(39)，則

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ T' \\ S' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ T'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ S'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ B'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \end{pmatrix} \quad (41)$$

將上式帶入(38)的左式，則

$$\begin{aligned}
\partial_t L \begin{pmatrix} \Psi' \\ T' \\ S' \\ B' \end{pmatrix} &= \partial_t \begin{pmatrix} \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ T'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ S'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ B'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \end{pmatrix} \\
&= \partial_t \begin{pmatrix} \Psi'_{mn} \nabla^2 \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ T'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ S'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ B'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \end{pmatrix} \\
&= \partial_t \begin{pmatrix} (-m^2 a^2 - n^2 \pi^2) \Psi'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ T'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ S'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ B'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \end{pmatrix} \\
&= \partial_t \left\{ \begin{pmatrix} -m^2 a^2 - n^2 \pi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Psi'_{mn} \\ T'_{mn} \\ S'_{mn} \\ B'_{mn} \end{pmatrix} \right\} e^{st} \\
&= \partial_t L_{mn} Y
\end{aligned}$$

將(41)帶入(38)的右式

$$\begin{aligned}
&M_\lambda Y \\
&= \begin{pmatrix} \sigma \nabla^4 & -R_l \sigma \partial_r & R_s \sigma \tau \partial_r & -2R^{-1} \sigma \xi Q \partial_z \\ -\partial_r & \nabla^2 & 0 & 0 \\ -\partial_r & 0 & \tau \nabla^2 & 0 \\ -2dR^{-1} \partial_z & 0 & 0 & \xi \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ T'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ S'_{mn} \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \\ B'_{mn} \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) e^{st} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(m^2 a^2 + n^2 \pi^2)^2 & maR_l \sigma & -maR_s \sigma \tau & 2n\pi R^{-1} \sigma \xi Q \\ -ma & -(m^2 a^2 + n^2 \pi^2) & 0 & 0 \\ -ma & 0 & -\tau(m^2 a^2 + n^2 \pi^2) & 0 \\ -2dR^{-1} n\pi & 0 & 0 & -\xi(m^2 a^2 + n^2 \pi^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$* \begin{pmatrix} \sin(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \cos(m \cdot a \cdot r) \sin(n \cdot \pi \cdot z) \\ \sin(m \cdot a \cdot r) \cos(n \cdot \pi \cdot z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi'_{mn} \\ T'_{mn} \\ S'_{mn} \\ B'_{mn} \end{pmatrix} e^{st}$$

$$= (M_{mn} * A_{mn} e^{st}) Y_{mn}$$

其中

$$M_{mn} = \begin{pmatrix} \sigma q_{mn}^4 & ma\sigma R_l & -ma\sigma\tau R_s & 2n\pi\xi\sigma QR^{-1} \\ -ma & -q_{mn}^2 & 0 & 0 \\ -ma & 0 & -\tau q_{mn}^2 & 0 \\ -2n\pi dR^{-1} & 0 & 0 & -\xi q_{mn}^2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$L_{mn} = \begin{pmatrix} -q_{mn}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$q_{mn}^2 = m^2 a^2 + n^2 \pi^2 \quad (44)$$

對應給定的特徵值，我們可以得到特徵方程式

$$\det(M_{mn} - L_{mn}s) = 0 \quad (45)$$

將(42)和(43)帶入(45)，則

$$\det \left[\begin{pmatrix} \sigma q_{mn}^4 + s q_{mn}^2 & ma\sigma R_l & -ma\sigma\tau R_s & 2n\pi\xi\sigma QR^{-1} \\ -ma & -q_{mn}^2 - s & 0 & 0 \\ -ma & 0 & -\tau q_{mn}^2 - s & 0 \\ -2n\pi dR^{-1} & 0 & 0 & -\xi q_{mn}^2 - s \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & q_{mn}^2 s^4 + (1 + \sigma + \tau + \xi) q_{mn}^4 s^3 + [(\sigma + \tau + \xi + \sigma\tau + \sigma\xi + \tau\xi) q_{mn}^6 - m^2 a^2 \sigma R_l \\ & + m^2 a^2 \sigma\tau R_s - 4n^2 \pi^2 \xi \sigma d QR^{-2}] s^2 + \{(\sigma\tau + \sigma\xi + \tau\sigma\xi + \tau\xi) q_{mn}^8 \\ & + [-(m^2 a^2 \sigma R_l)(\xi + \tau) + m^2 a^2 \sigma\tau R_s (1 + \xi) - 4n^2 \pi^2 \xi \sigma d QR^{-2} (1 + \tau)] q_{mn}^2\} s \\ & + \sigma\tau\xi q_{mn}^{10} + m^2 a^2 \sigma\xi\tau(-R_l + R_s) q_{mn}^4 - 4n^2 \pi^2 \xi \sigma\tau d QR^{-2} q_{mn}^4 = 0 \end{aligned}$$

因此，我們可以得到特徵方程式

$$s^4 + \Pi_3 s^3 + \Pi_2 s^2 + \Pi_1 s + \Pi_0 = 0 \quad (46)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= [q_{mn}^6 + m^2 a^2 (R_s - R_l) - 4n^2 \pi^2 dQR^{-2}] \sigma \xi \tau q_{mn}^2 \\ \Pi_1 &= (\sigma \tau + \sigma \xi + \tau \xi + \tau \xi \sigma) q_{mn}^6 + [\tau R_s (1 + \xi) - R_l (\xi + \tau)] m^2 a^2 \sigma \\ &\quad + \tau R_s (1 + \xi) - 4n^2 \pi^2 \xi \sigma QdR^{-2} (1 + \tau) \\ \Pi_2 &= (\sigma + \tau + \xi + \sigma \tau + \sigma \xi + \tau \xi) q_{mn}^4 \\ &\quad + [(\tau R_s - R_l) m^2 a^2 - 4n^2 \pi^2 \xi dQR^{-2}] \sigma q_{mn}^{-2} \\ \Pi_3 &= (1 + \sigma + \tau + \xi) q_{mn}^2 \end{aligned}$$

假設 $s = i\omega$ 且 ω 為實數，則代入(46)可以得到

$$\omega^4 - i\omega^3 \Pi_3 - \omega^2 \Pi_2 + i\omega \Pi_1 + \Pi_0 = 0 \quad (47)$$

因此，從(47)可以觀察到可能的解

$$(i) \quad \Pi_0 = 0 \text{ 和 } \omega = 0$$

$$(ii) \quad \omega^2 = \Pi_1 / \Pi_3 \text{ 和 } \Pi_1^2 - \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_0 \Pi_3^2 = 0, \text{ 其中 } \Pi_1 \geq 0$$

從雙對流理論可以知道滿足 polycritical surface 的條件為

$$\Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = 0 \quad (48)$$

將條件(48)代入(46)則可以得到 critical 多項式：

$$P_c(s) \equiv s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 \quad (49)$$

其中

$$c_0 = \frac{\Pi_0}{\Pi_3}, \quad c_1 = \frac{\Pi_1}{\Pi_3} - \frac{\Pi_0}{\Pi_3^2}, \quad c_2 = \frac{\Pi_2}{\Pi_3} - \frac{\Pi_0}{\Pi_3^2} + \frac{\Pi_0}{\Pi_3^3} \quad (50)$$

polycritical surface 的條件則為 $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ 。因此，若 $n = m = 1$

時，可以得到

$$R_{lo} = \frac{q^6 (\sigma + \tau + \xi)}{a^2 \sigma (\tau - 1) (\xi - 1)}, \quad R_{so} = \frac{q^6 \tau^2 (1 + \sigma + \xi)}{a \sigma (\tau - 1) (\xi - \tau)}$$

$$Q_0 = \frac{q^6(1+\sigma+\tau)\xi^2}{c\sigma(\xi-1)(\xi-\tau)} \quad (51)$$

在 critical 表面之任意點，正規化模式在 $s=0$ 表面上滿足 $M_c \phi^* \Lambda_{mn} = 0$ 其中 ϕ 表示四個常數組成之向量。由於在 critical 表面時， $\det(M_c) = 0$ 。因此可以得到 null space 之基底

$$\phi = \left[1 \quad -\frac{a}{q^2} \quad -\frac{a}{q^2\tau} \quad -\frac{2d\pi}{q^2\xi R} \right]^T \quad (52)$$

其餘的二個向量則可以由以下式子求得

$$M_c \psi = L_c \phi \quad \text{和} \quad M_c \chi = L_c \psi \quad (53)$$

最後可以得到線性的動態方程式(38)。因此，由雙對流理論可知系統可以分成二部分：一是 generalized critical space，另一則是 stable modes。我們可以將 Y 寫成下面之方程式

$$Y = [A(t)\phi + B(t)\psi + C(t)\chi]^* \Lambda_{mn} + \tilde{S}(r, z, t) \quad (54)$$

在上式中， \tilde{S} 表示 stable modes；定義符號 $\Phi = [\phi \ \psi \ \chi]$ 為 null space 的基底且 $A = [A(t) \ B(t) \ C(t)]$ 。從(52)和(53)可以得到

$$M_c \Phi_i = \sum_{j=1}^3 \Omega_{ji} L_c \Phi_j \quad (55)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

因此，我們可以得到

$$\dot{A} = \Omega A \quad (57)$$

由於(57)是描繪系統在 critical 表面上之動態行為，我們在接下來的部分將探討系統在 critical 表面附近時的動態行為特性。

定義符號： λ 表示為接近 critical 表面的參數值； $\Phi_\lambda = [\phi_\lambda \ \psi_\lambda \ \chi_\lambda]$

為 critical 表面附近的基底向量空間；振幅方程式則為 $\dot{A} = K_\lambda A$ ； $Y = [A(t)\phi_\lambda + B(t)\psi_\lambda + C(t)\chi_\lambda]^* \Lambda_{11} + \tilde{S}_\lambda$ 。同理，依據雙對流理論，我們可以得到

$$K_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

因此，靠近 polycritical 的線性振幅方程式 $\dot{A} = K_\lambda A$ 可以得到以下之數學模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (59)$$

將(59)整理後可得

$$\ddot{A} + c_2 \dot{A} + c_1 A + c_0 A = 0 \quad (60)$$

另外，我們接下來要考慮系統之非線性部分，將(60)擴充為非線性振幅方程式。考慮非線性則(60)可以改寫為

$$\ddot{A} + c_2 \dot{A} + c_1 A + c_0 A = g(A) \quad (61)$$

其中 $g(A)$ 表示非線性項。最後，依據(32)-(35)可得到

$$g(-A) = -g(A) \quad (62)$$

從(62)可知，系統存在有最低階數之非線性項 $O(A^3)$ 。另外， $g(A)$ 可依據 perturbation 理論表示為系統的狀態 (A, B, C) 之線性組合，即

$$\begin{aligned} g(A) = & t_1 A^3 + t_2 A^2 B + t_3 A B^2 + t_4 B^3 + t_5 A^2 C + t_6 A B C + t_7 B^2 C \\ & + t_8 A C^2 + t_9 B C^2 + t_{10} C^3 \end{aligned} \quad (63)$$

其中 t_i 's 為不同的常數係數。另外， $t_1 A^3$ 為(63)的 dominant term，則我們可以將三階非線性振幅方程式近似為

$$\ddot{A} + c_2 \dot{A} + c_1 \dot{A} + c_0 A = t_1 A^3 \quad (64)$$

對於直流電漿火炬之行為特性可知， t_1 等於 1 和 -1，則(64)為

$$\ddot{A} + c_2 \dot{A} + c_1 \dot{A} + c_0 A = \pm A^3 \quad (65)$$

為了簡化分析，引進新的時間比率 $s = \varepsilon t$ 和振幅 $A = \varepsilon^{3/2} F$ 且選擇 $\varepsilon = c_2$ ，則(65)可以改寫為

$$\ddot{F} + \Omega_2 \dot{F} + \Omega_1 \dot{F} + \Omega_0 F = \pm F^3 \quad (66)$$

其中

$$\Omega_0 = \frac{c_0}{c_2^2}, \quad \Omega_1 = \frac{c_1}{c_2^3}, \quad \Omega_2 = 1$$

且定義新的符號以簡化非線性振幅方程式的系統參數

$$\hat{\delta} = q^2 (1 + \tau + \sigma + \xi)$$

$$\hat{\delta}_1 = q^2 (q^6 - a^2 m^2 R_l + a^2 m^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} n^2 Q) \sigma \tau \xi$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_2 = & -a^2 \sigma (\tau + \xi) m^2 R_l + a^2 \sigma \tau (1 + \xi) m^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} \sigma \xi (1 + \tau) n^2 Q \\ & + (\sigma \tau + \sigma \xi + \tau \xi + \sigma \tau \xi) q^6 \end{aligned}$$

$$\hat{\delta}_3 = -q^2 (q^6 - a^2 R_l + a^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} n^2 Q) \sigma \tau \xi$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_4 = & -a^2 \sigma q^{-2} m^2 R_l + a^2 \sigma \tau q^{-2} m^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} \sigma \xi q^{-2} n^2 Q \\ & + (\sigma + \tau + \xi + \sigma \tau + \sigma \xi + \tau \xi) q^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_5 = & -a^2 \sigma (\tau + \xi) m^2 R_l + a^2 \sigma \tau (1 + \xi) m^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} \sigma \xi (1 + \tau) n^2 Q \\ & + (\sigma \tau + \sigma \xi + \tau \xi + \sigma \tau \xi) q^6 \end{aligned}$$

$$\hat{\delta}_6 = q^2 (q^6 - a^2 m^2 R_l + a^2 m^2 R_s - 4d\pi^2 R^{-2} n^2 Q) \sigma \tau \xi$$

則得到以下的系統參數

$$c_0 = \frac{\hat{\delta}_1}{\hat{\delta}}$$

$$c_1 = \frac{\hat{\delta}_2}{\hat{\delta}} - \frac{\hat{\delta}_3}{\hat{\delta}^2}$$

$$c_2 = \frac{\hat{\delta}_4}{\hat{\delta}} - \frac{\hat{\delta}_5}{\hat{\delta}^2} + \frac{\hat{\delta}_6}{\hat{\delta}^3}$$

最後，我們可以推導出系統參數(Ω_0 、 Ω_1 和 Ω_2)

$$\Omega_0 = \frac{\hat{\delta}_1 \cdot \hat{\delta}^5}{(\hat{\delta}_4 \cdot \hat{\delta}^2 - \hat{\delta}_5 \cdot \hat{\delta} + \hat{\delta}_6)^2}$$

$$\Omega_1 = \frac{\hat{\delta}_2 \cdot \hat{\delta}^8 - \hat{\delta}_3 \cdot \hat{\delta}^7}{(\hat{\delta}_4 \cdot \hat{\delta}^2 - \hat{\delta}_5 \cdot \hat{\delta} + \hat{\delta}_6)^3}$$

$$\Omega_2 = 1$$

因此，最後我們可以利用非線性理論與分叉理論分析三階非線性振幅方程式(66)以及探討系統的動態行為。

二、模擬及分析電漿火炬非線性之動態特性

此部分之重點為分析電漿火炬之分叉特性，探討其顫動現象的發生原因。從學者 A. K. Das 之研究發現電漿系統之顫動現象為一混沌行為，並非以往認知的隨機行為。然而，A. K. Das 的研究僅考慮單一系統參數發生變化時之系統動態，文獻討論此系統參數發生變化時的混沌現象且探討系統從穩定到發生混沌行為的參數範圍。經由分叉理論分析電漿系統之分叉特性發現影響電漿的因素可能不僅 A. K. Das 考慮之單一參數，其他參數也可能影響系統使系統進入混沌現象甚至狀態發散。因此，本計畫之模擬分析將以前述建立之電漿火炬動態模型為基礎，探討電漿系統的所有動態範圍，分析系統的所有參數之範圍。另外，電漿系統之系統參數可能同時發生變化，系統可能會進入固定振盪週期之參數範圍。在接下來的部分，我們將分析系統參數之間的關聯性，探討可能發生顫動現象之因素。透過非

線性理論和分叉理論探討分叉參數變化之範圍，找出混沌現象的範圍。另外，我們也探討電漿火炬之其他可能發生的動態特性，找出系統可能發生的動態行為。

在 A. K. Das 的研究中，學者僅將(66)之 Ω_0 設定為系統參數，其他則設定為常數，即 $\Omega_1 = 50$ 及 $\Omega_2 = 1$ 。在模擬分析時，本計畫則是將 Ω_0 、 Ω_1 和 Ω_2 設定為系統參數，模擬分析 Ω_0 、 Ω_1 和 Ω_2 發生變化時的關聯性以及探討系統參數影響顫動現象之成因。本計畫採用數值分析軟體 AUTO 模擬系統之分叉特性且利用 Matlab 模擬系統的時間響應以及相位圖。我們分 3 種可能性探討系統之動態行為：(i)僅 Ω_0 改變時之動態特性；(ii)考慮 Ω_0 或 Ω_1 改變時之動態特性；(iii)考慮 Ω_0 或 Ω_2 發生改變時之動態特性。以下將深入探討這三種情況之分叉特性。

Case 1: 僅改變 Ω_0 ， Ω_1 和 Ω_2 固定

在此例子中，固定 $\Omega_1 = 50$ 和 $\Omega_2 = 1$ ，將 Ω_0 設定為系統參數。因此，設 $x_1 = F$ 、 $x_2 = \dot{F}$ 和 $x_3 = \ddot{F}$ ，(66)可以改寫成狀態空間形式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 \end{aligned} \tag{67}$$

其中 $\Omega_0 = \mu$ 為分叉參數。在本計畫中之模擬圖，實線代表穩定的平衡點軌跡或穩定的 limit cycle，虛線則表示不穩定的平衡點，模擬圖符號表示為

HB : Hopf bifurcation

SB : Stationary bifurcation

PD : Period doubling

圖 1 為直流電漿火炬之分叉圖，表三列出系統之分叉點。從圖 1 可以知道電漿火炬在 $\mu = 0$ 會發生 pitchfork bifurcation 且在 $0 < \mu < 50$ 時系統是漸進穩定的。當 $\mu > 50$ ，則系統是不穩定的；當 μ 持續減小且通過原點時，系統由一個平衡點分叉為三個平衡點。另外，在 $\mu = -25$ 以及 $\mu = 50$ 出現 Hopf bifurcation，即表示系統之 Jacobian matrix 的特徵值會落在虛軸上，系統會出現週期解並產生振盪之動態行為。接著，當 μ 從 $\mu > 50$ 持續減小且穿過 $\mu = 50$ 時，系統之平衡點從 unstable focus 變成 stable focus，且產生一個 limit cycle。當 μ 減少並跨過 $\mu = 0$ 時，系統由一個穩定的平衡點軌跡分叉為二個穩定的平衡點軌跡和一個不穩定的平衡點軌跡，即發生 supercritical pitchfork bifurcation。因此，系統的穩定性將取決於系統狀態之初始值。當 $\mu < 0$ 且初始值在原點附近時，系統會被不穩定的平衡點吸引而造成不穩定。當 μ 減少至 $\mu = -25$ ，系統會發生二個 Hopf bifurcation(即 HB2 和 HB3)；這二個 HB 會分叉為一條穩定的 limit cycle 和一條不穩定的 limit cycle。當 μ 減少至 $\mu = -108.823$ 和 $\mu = -108.777$ 時，穩定的 limit cycle 軌跡則變成不穩定的 limit cycle 軌跡，此分叉現象表示系統會發生週期變化；因此，從模擬結果可知在 $\mu = -108.823$ 和 $\mu = -108.777$ 會發生 period doubling。從圖 1 可以知道，選擇 HB2 到 PD1(或 HB3 到 PD2) 之 limit cycle 軌跡附近的初始值與分叉參數，系統之動態為一倍週期的振盪行為；若選取 PD1 或 PD2 附近之 μ 與初始值，

則系統會發生二倍週期之振盪。當 μ 持續減少時，系統將發生週期性變化且進入混沌現象之區域。系統之行為開始出現週期性變化，則無法預估其動態行為；如此一來，我們就無法預期系統可能會發生之行為特性，導致無法應用系統分析理論與控制設計改善系統之穩定與使用性能；甚至 μ 仍持續變化減小，系統之狀態可能會發散而使系統發生不可預期的危險。從圖 1 可以了解分叉參數與系統狀態行為之間的關係；接下來，我們透過時間響應與相位圖探討直流電漿火炬隨時間之動態行為。

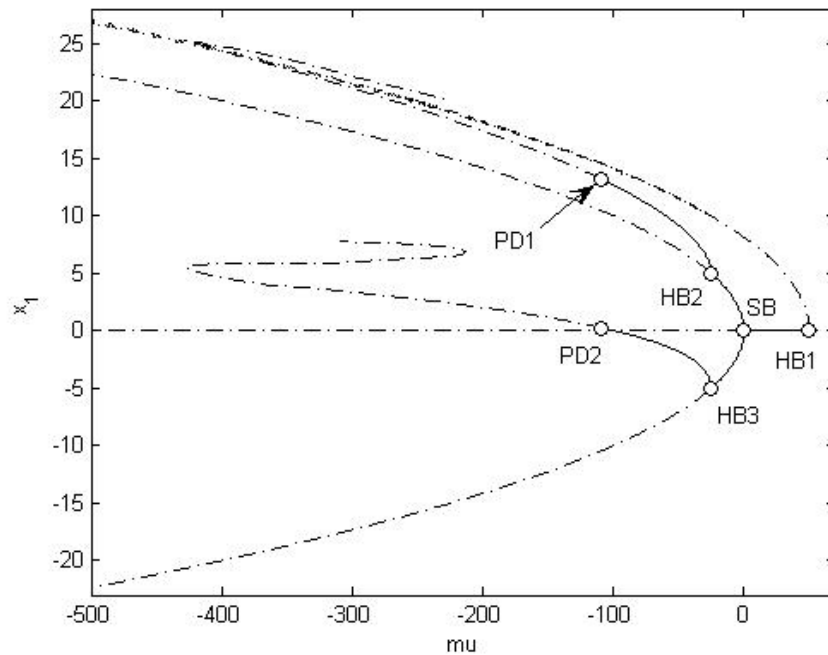


圖 1. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ v.s. x_1)

表三、Location of bifurcation points

	(x_1, x_2, x_3)	μ
SB	(0, 0, 0)	0

HB1	(0, 0, 0)	50
HB2	(5, 0, 0)	-25
HB3	(-5, 0, 0)	-25
PD1	(13.15, 43.9, 330.8)	-108.823
PD2	(0.25, 49.52, 343.67)	-108.777

我們在分叉圖上選取分叉點附近的分叉參數與初始值，從時間響應觀察系統之時域動態以及其相位圖。圖 2(a)為選取 $\mu = 3$ 且初始值設為 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (1, 0, 0)$ ；圖 2(b)為選擇 $\mu = 3$ 和初始值設為 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (-1, 0, 0)$ 。圖 3(a)(b)則是選取 $\mu = -5$ 且初始值分別選取 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (4, 0, 0)$ 和 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (-4, 0, 0)$ ；圖 4(a)(b)則是選取 $\mu = -5$ 且初始值分別選取 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (2, 0, 0)$ 和 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (-2, 0, 0)$ 。從圖 2 和圖 3 之時間響應圖與相位圖可以發現當 $0 < \mu < 50$ 及初始值選取在穩定平衡點附近時，系統狀態被穩定平衡點吸引而使系統狀態趨近於 0。另外，圖 3 選取 $-25 < \mu < 0$ 及初始值介於穩定平衡點軌跡與不穩定的 limit cycle 之間的值，模擬圖顯示此區域之系統狀態被穩定的平衡點吸引。同理，圖 4 則在 $-25 < \mu < 0$ 的範圍選取介於二條穩定的平衡點軌跡之間的初始值，從時間響應圖與相位圖可以知道這個區域之初始值會被穩定的平衡點吸引，最後系統狀態趨近於穩定。另外，我們將分析系統之動態分叉，即當 μ 持續變化至發生 Hopf bifurcation 時之行為特性，探討系統之振盪行為。接下來，我們分析分叉圖搭配時間響應圖和相位圖，解釋高溫直流電漿火炬之振盪週期以及週期變化。

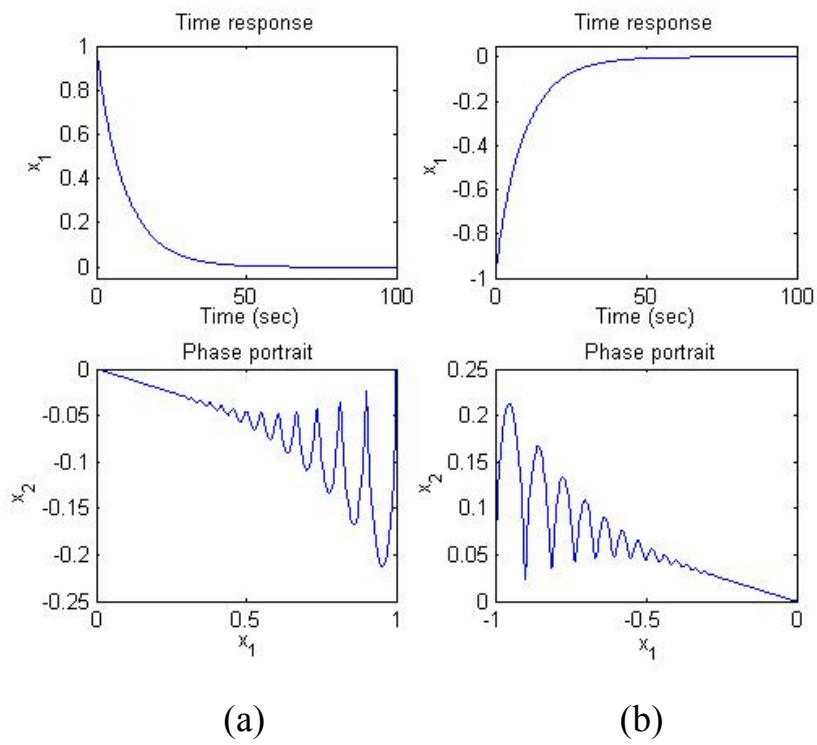


圖 2. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

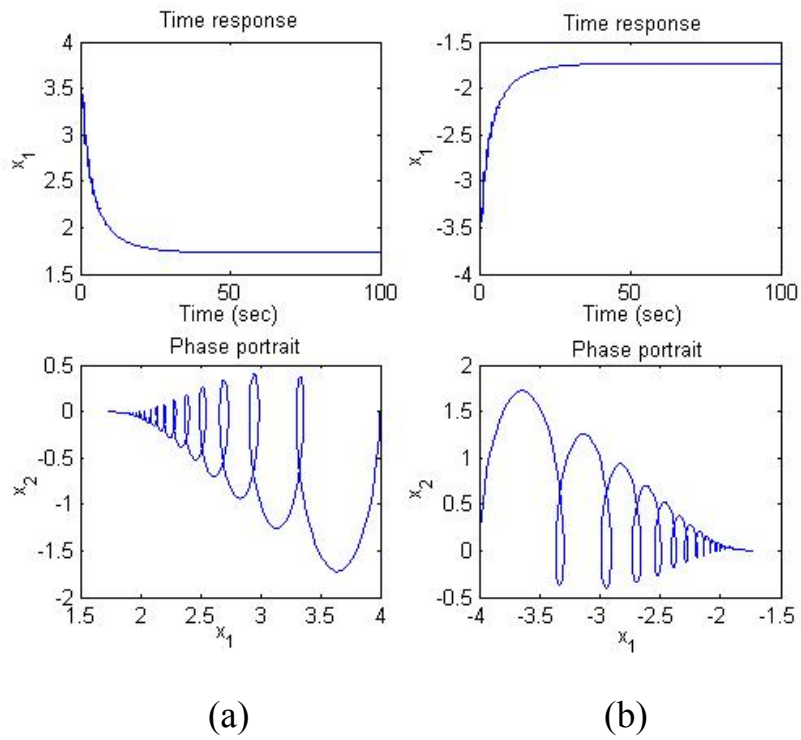


圖 3. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

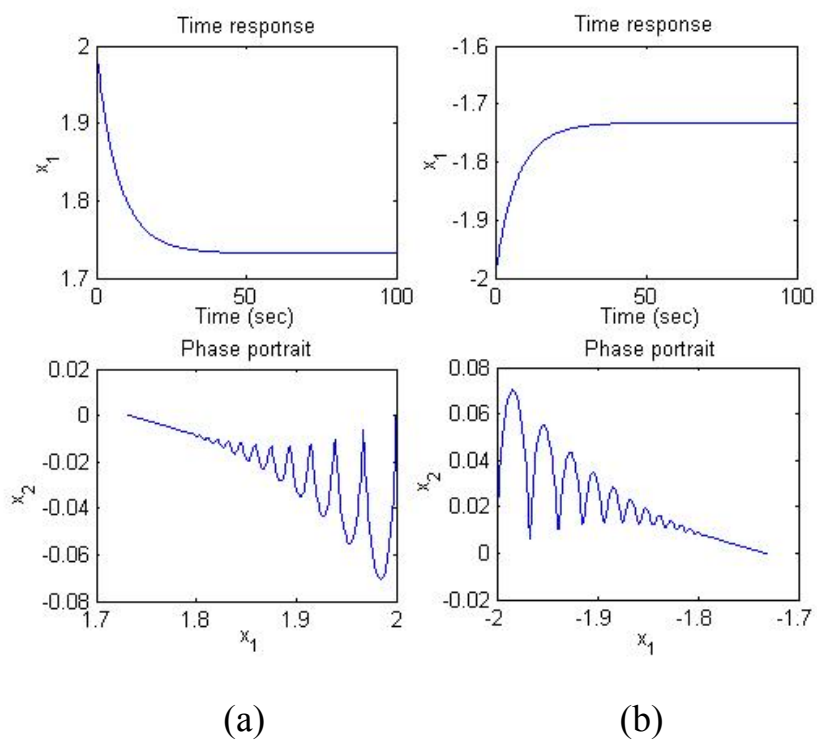


圖 4. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

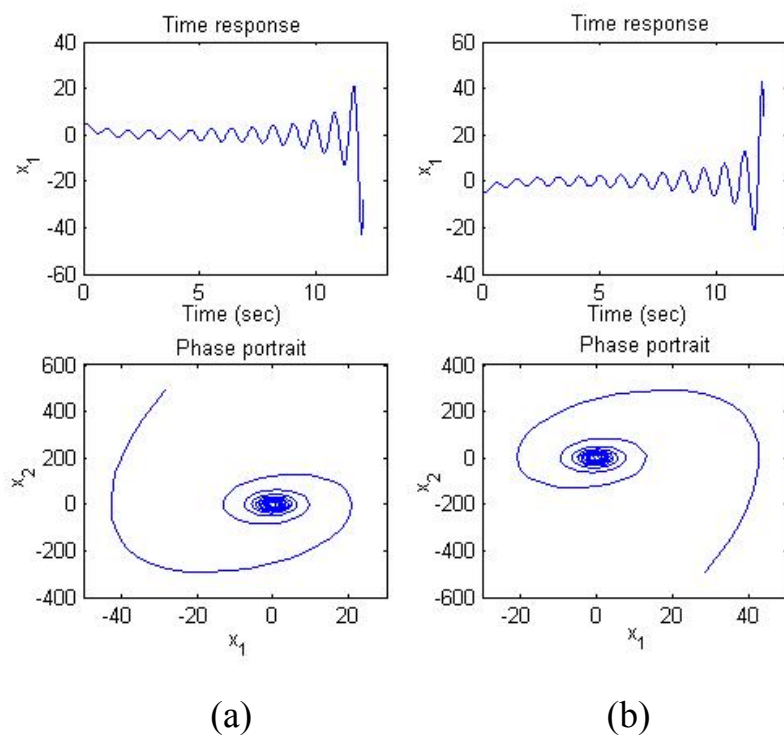


圖 5. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

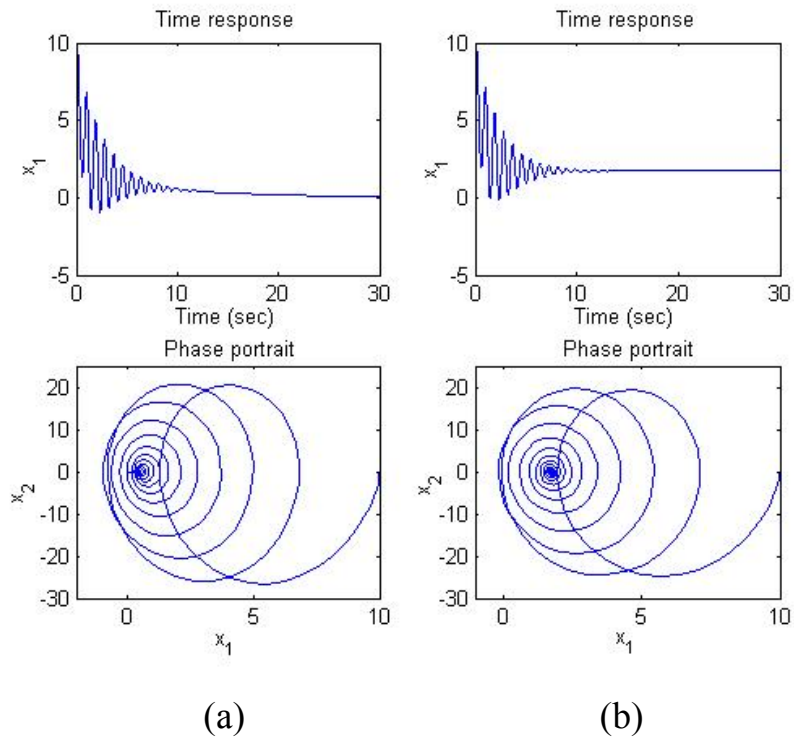


圖 6. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

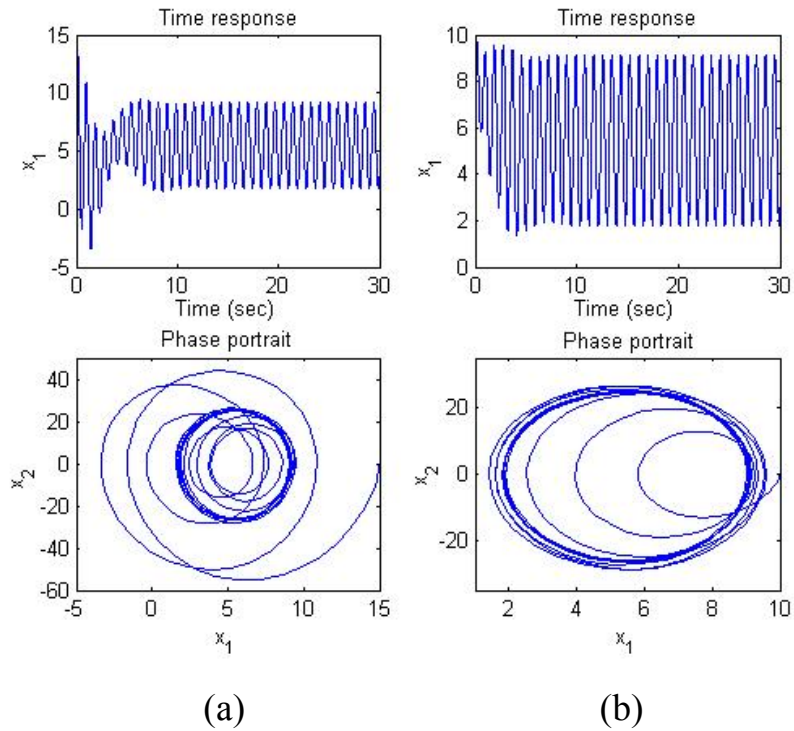


圖 7. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

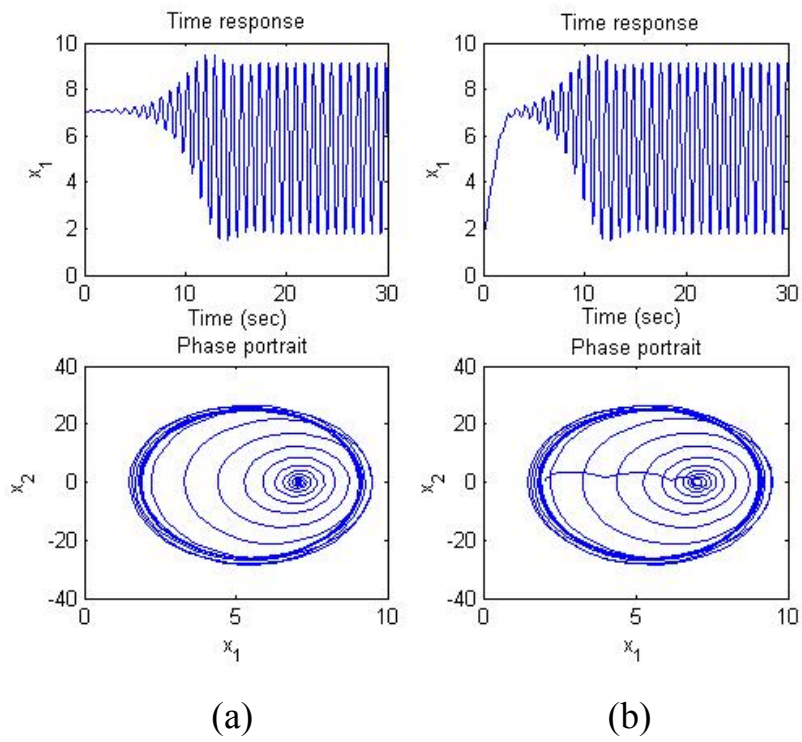


圖 8. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

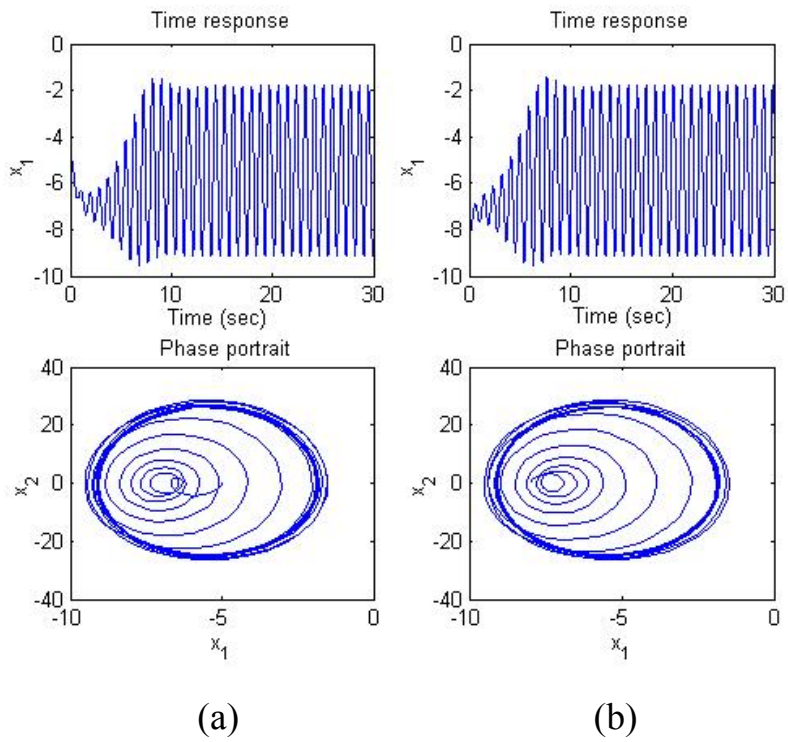


圖 9. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

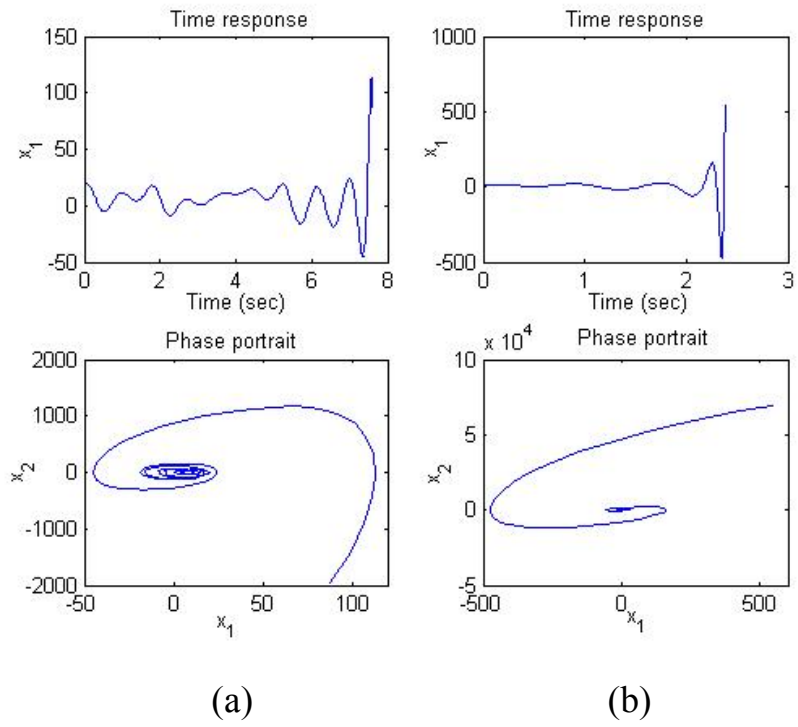


圖 10. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

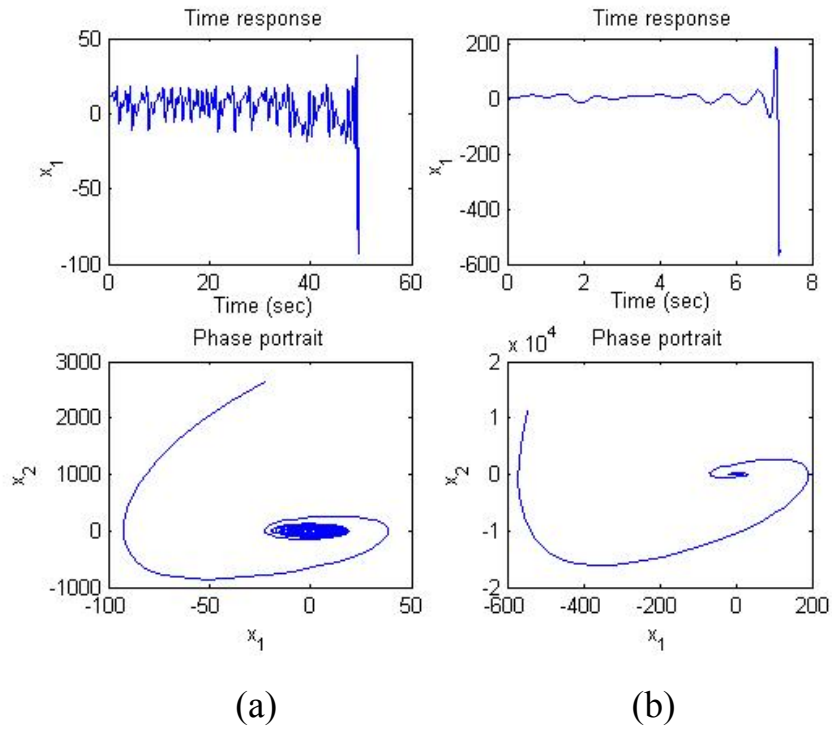


圖 11. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

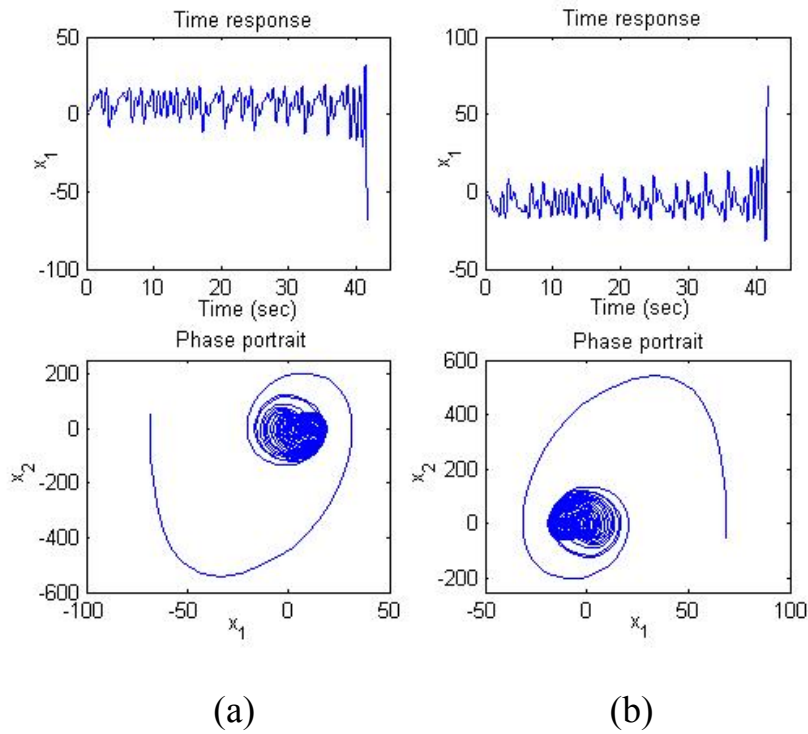


圖 12. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

圖 5(a)(b)選取 $\mu = 60$ 且初始值(x_{10}, x_{20}, x_{30})分別設為(5,0,0)和(-5,0,0)，搭配圖 1 之分叉圖可以發現在此區域內之平衡點為不穩定的。圖 6(a)(b)選取初始值(x_{10}, x_{20}, x_{30})=(10,0,0)且 μ 分別為 5 和-3；圖 6 之時間響應圖和相位圖表示在此區域內之系統狀態被穩定的平衡點吸引，系統將趨近於穩定。圖 7(a)(b)~圖 9(a)(b)則選取 $\mu = -50$ 及初始值(x_{10}, x_{20}, x_{30})分別選取(15,0,0)和(10,0,0)、(7,0,0)和(2,0,0)及(-5,0,0)和(-8,0,0)。從圖 7~圖 9 之時間響應與相位圖的模擬結果說明了這些區域會發生 Hopf bifurcation，系統會產生振盪之週期解，其模擬之行為特性符合圖 1 分叉圖之分析結果。另外，從圖 1 可以知道當 $\mu < -108.8$ 時，系統的振盪週期會發生變化甚至進入混沌行為之區域。我們將逐步探討從 Hopf bifurcation 延伸軌跡的動態特性，解釋

系統從穩定狀態開始產生固定週期的振盪行為之參數變化，最後進入非固定週期之混沌行為到系統狀態發散。我們在圖 7~圖 9 之時間響應圖與相位圖說明系統之振盪週期變化以及混沌現象。圖 10(a)(b)~圖 12(a)(b)則選取相同的 $\mu = -50$ 和不同的初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (20, 0, 0)$ 和 $(17, 0, 0)$ 、 $(13, 0, 0)$ 和 $(5, 0, 0)$ 以及 $(1, 0, 0)$ 和 $(-1, 0, 0)$ 。圖 10~圖 12 表示這些區域的分叉參數和初始值會使系統發散，系統會因初始值的不同而造成動態行為由振盪行為轉變成發散。

圖 13(a)(b)~圖 16(a)(b)使用相同的初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5, 0, 0)$ 且分別選取不同的 μ 值，即 $\mu = -20$ 、 -80 、 -115 、 -120 、 -122.15 、 -130 、 -144 和 -146 。從圖 13~圖 16 可以看出， $\mu = -20$ 為穩定的；當 $\mu = -80$ 時，則發生一倍週期的振盪行為；當 $\mu = -115$ 時，則發生二倍週期的振盪行為；而當 $\mu = -120$ 和 -122.15 時，則分別發生四倍週期和八倍週期的振盪行為；當 $\mu = -130$ 和 -144 時，系統之振盪行為產生不規則之週期變化，即表示系統之狀態發生混沌現象；最後，當 $\mu = -146$ 時，系統之動態行為是不穩定的。因此，透過模擬圖之分析結果發現，系統會隨著 μ 值變化而使系統發生週期變化甚至是混沌行為。在此 case 1 中，我們僅考慮 Ω_0 發生變化時之系統可能發生的動態行為。此分析結果包含學者 A. K. Das 探討之參數範圍；另外，case 1 也探討比文獻更廣的參數變化範圍，說明系統狀態發生不穩定的參數區域，此結果將可以避免系統發生不可預期的危險。

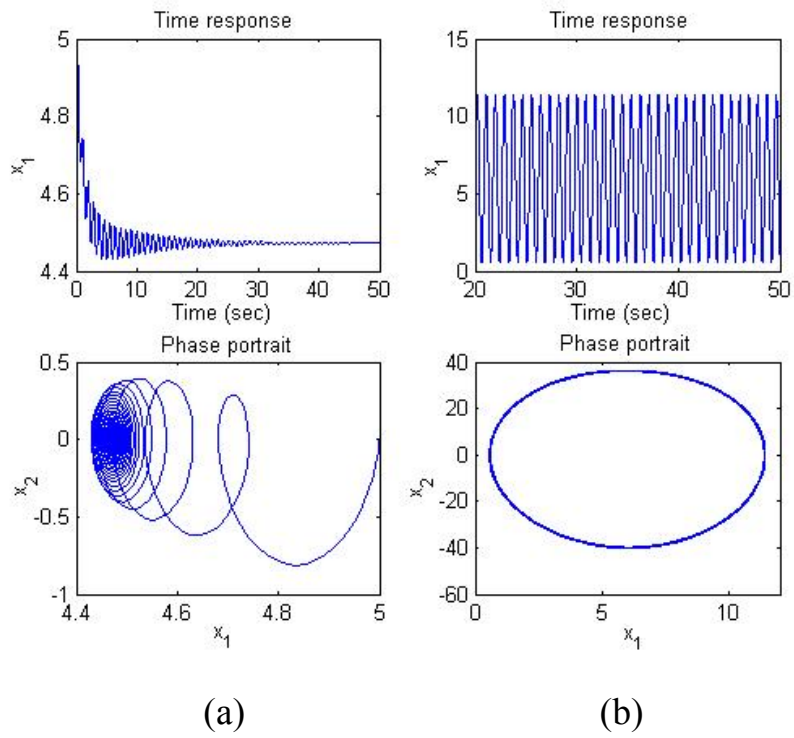


圖 13. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

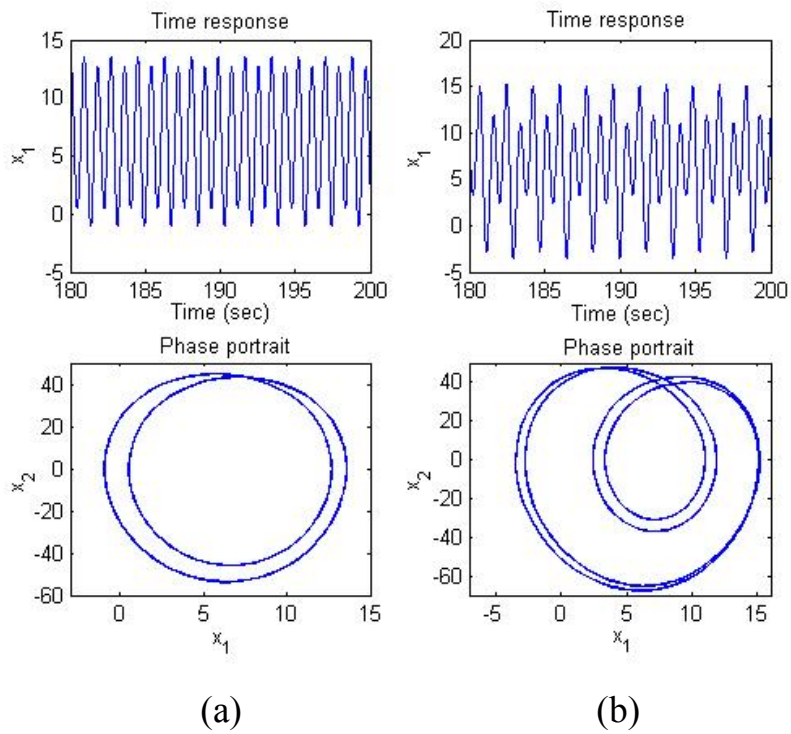


圖 14. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

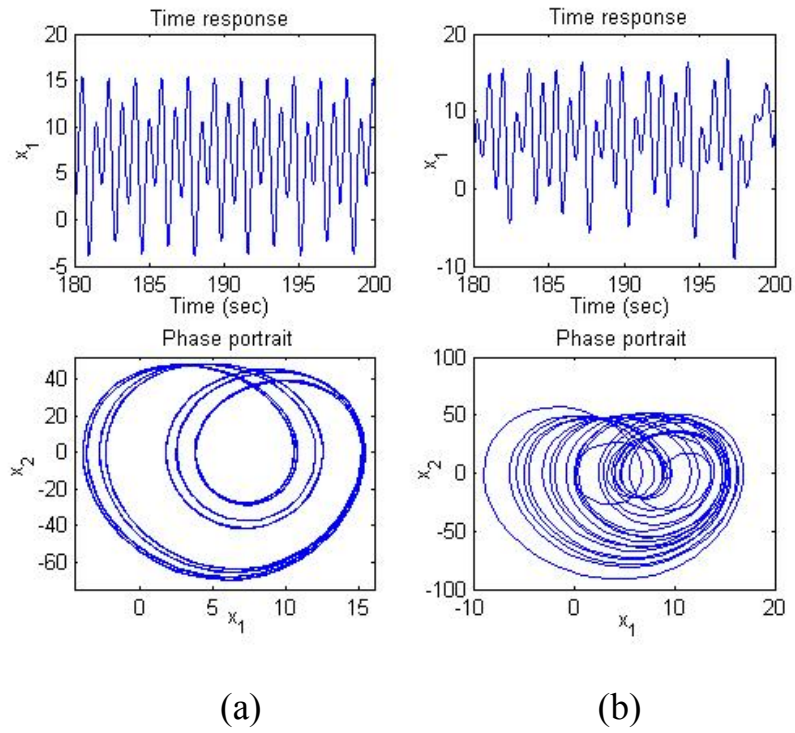


圖 15. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

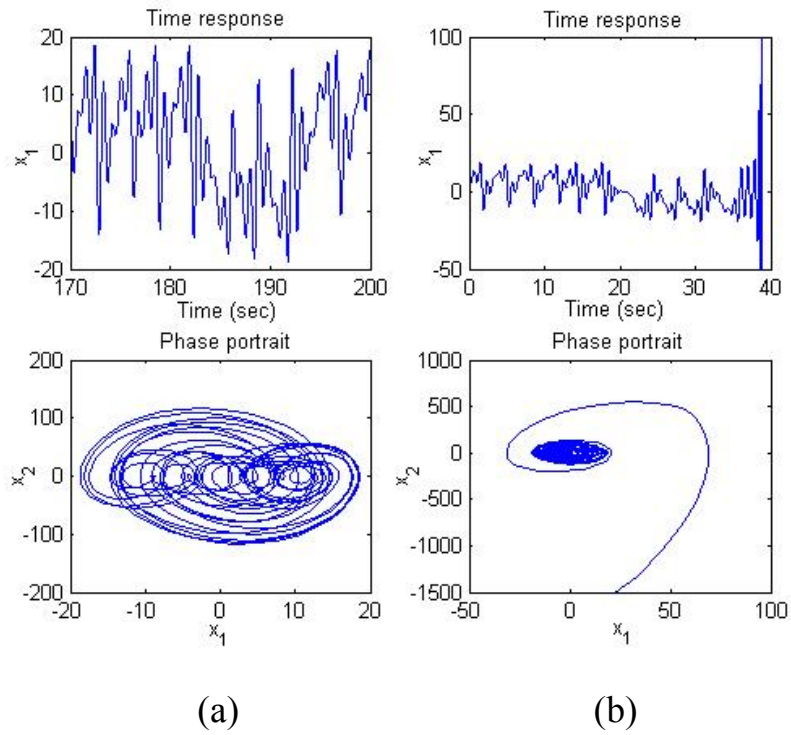


圖 16. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

Case 2：改變 Ω_0 或 Ω_1 ， Ω_2 固定

在 case 2 中，我們探討學者 A. K. Das 沒有分析的參數以及參數變化範圍。從以下之模擬分析可以知道混沌現象發生的其他可能的原因，參數 Ω_1 之變化也可能使系統產生週期性變化。混沌現象的發生原因並非唯一，其他因素也可能使系統產生混沌行為。因此，我們利用分叉理論之雙參數變化探討圖 1 中的 Hopf bifurcation (即 HB1、HB2 和 HB3)，從圖 1 的 HB1、HB2 和 HB3 開始模擬雙參數，即 Ω_0 和 Ω_1 發生變化的週期解。

首先，固定 $\Omega_2 = 1$ ，將 Ω_0 和 Ω_1 設定為系統參數。系統之狀態空間形式為

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - \mu_1 x_2 - x_3 - x_1^3\end{aligned}\tag{68}$$

其中 $\Omega_0 = \mu$ 和 $\Omega_1 = \mu_1$ 為分叉參數。以下探討二種發生的可能性。

(A) 固定 μ ，改變 μ_1 之情況

我們分別將圖 1 的 HB1、HB2 和 HB3 值設為週期解初始值且固定 μ 以及改變 μ_1 ，模擬分析從 HB1、HB2 和 HB3 出發之 x_1 與 μ_1 週期解。表四為固定 μ 和改變 μ_1 情況下之分叉點。圖 17~圖 19 是從 HB1、HB2 和 HB3 開始模擬之分叉圖(即 μ_1 v.s. x_1)。從圖 17 可以觀察到 HB1 延伸之軌跡為不穩定的 limit cycle，此動態為固定週期之振盪行為。圖 18 則是從 HB2 延伸之 μ_1 v.s. x_1 分叉圖；從圖可以發現延伸之 Hopf bifurcation 軌

跡會出現 period doubling，系統之振盪週期由一倍轉變為二倍週期。由此可知，系統之動態行為開始產生週期變化。在圖 18 的 PD3 會分叉一條穩定的 limit cycle 和一條不穩定的 limit cycle；穩定的 limit cycle 之軌跡則出現 PD4，之後又轉變為不穩定的 limit cycle。從分叉理論可知系統之振盪週期會隨著 μ_1 變化而發生改變。最後，系統發生不可預期的振盪週期，即系統產生混沌動態行為。由此可知， μ_1 的變化仍可能使系統發生混沌現象。另外，圖 19 表示從 HB3 開始模擬分析之 μ_1 v.s. x_1 分叉圖；圖 19 與圖 18 類似，在 HB3 延伸之軌跡也會出現 period doubling (即 PD5)，PD5 分叉出一條穩定的 limit cycle 和一條不穩定的 limit cycle。穩定的 limit cycle 則會出現 PD6，且轉變為不穩定的 limit cycle。因此，系統的振盪週期由原來的一倍週期轉變為二倍週期；當 μ_1 持續變小時，系統會產生週期性且出現不規則週期變化，系統發生混沌動態行為；最後，當 μ_1 仍持續減少時，系統狀態會發散而轉變成不穩定且可能使系統狀態發生不可預期的危險。以下，我們透過時間響應圖與相位圖分析圖 18 和圖 19 之動態行為，藉由時域與相位圖探討系統週期變化之動態特性。

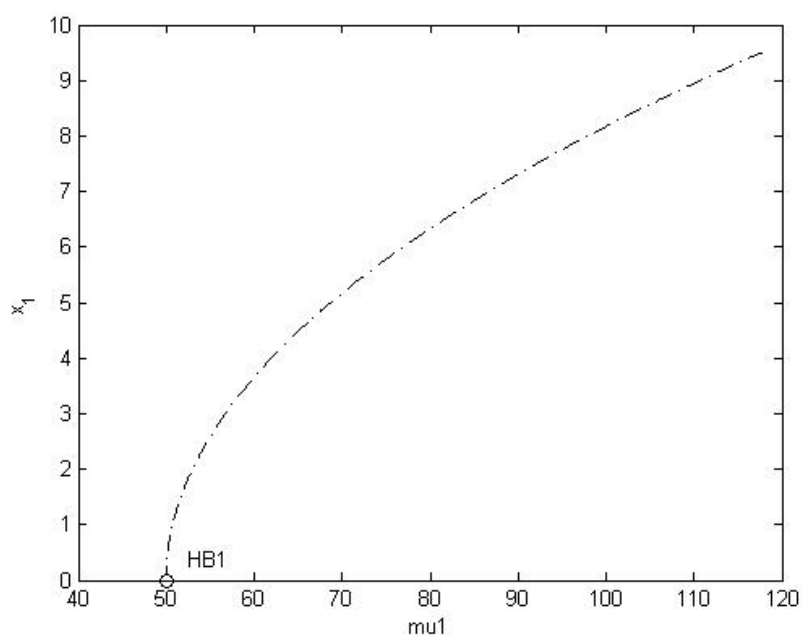


圖 17. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ_1 v.s. x_1)

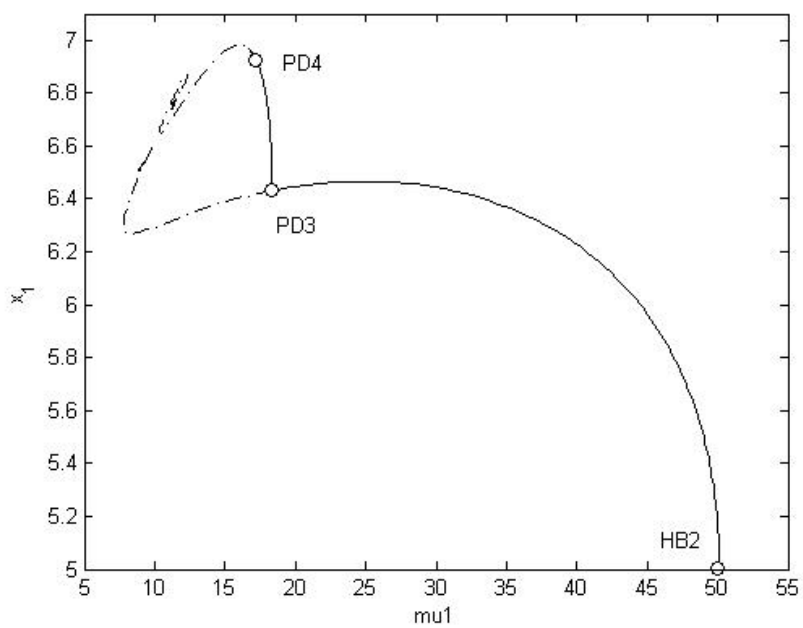


圖 18. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ_1 v.s. x_1)

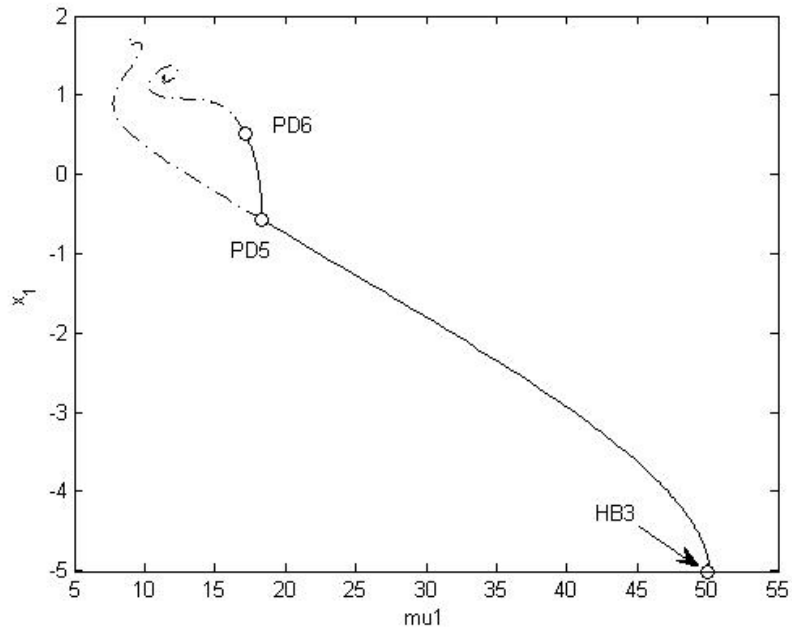


圖 19. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ_1 v.s. x_1)

表四、Location of bifurcation points

	(x_1, x_2, x_3)	μ_1
PD3	(6.43, 11.6, 53.1)	18.198
PD4	(6.65, 6.508, 35.44)	17.174
PD5	(-0.578, 13.27, 55.429)	18.3398
PD6	(0.50496, 15.994, 61.156)	17.174

為了觀察系統之週期變化與時域之動態行為，我們依據圖 18 選取不同的 μ_1 以及固定的初始值 (x_{10}, x_{20}, x_{30}) ，觀察時間響應圖和相位圖。在模擬時，圖 20(a)(b)~圖 22(a)(b)均使用相同的初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5, 0, 0)$ 及分別選取 $\mu_1 = 25$ 、17.6、17.2、17.1、13 和 12.35。圖 20(a)選取之 μ_1 值介於 HB2 和 PD3 之間，從模擬圖驗證在這個區域內之動態為一倍週期的振盪。圖 18(b)

則選取 PD3 附近的點，模擬圖顯示為二倍週期之振盪，模擬結果與分叉圖一致。圖 21(a)(b)分別表示四倍振盪週期和八倍振盪週期；從模擬圖可以發現當 μ_1 只要稍微變動，則造成系統之振盪週期快速改變。圖 22(a)(b)分別表示混沌行為與不穩定之狀態；當系統進入混沌行為，可能會因參數稍微變動而使系統發生不穩定。

另外，我們也探討圖 19 的週期變化特性。依據圖 19 之分叉圖，我們選取固定的初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (-0.9, 0, 0)$ 及不同的 μ_1 ， $\mu_1 = 30, 18, 17, 15.92, 12.2$ 和 12.1 ；模擬結果分別表示於圖 23(a)(b)~圖 25(a)(b)。從圖 23(a)之模擬結果可以知道，在此區域之動態為一倍週期之動態特性，符合 Hopf bifurcation 之分叉理論。圖 23(b)則選取穿過 PD5 的 μ_1 值，在 period doubling 附近之區域會發生二倍的振盪週期，振盪週期由一倍週期變成二倍週期。圖 24(a)表示 μ_1 持續減少時，系統之振盪週期會從二倍週期變成四倍週期；圖 24(b)則顯示 μ_1 稍微變動時，系統之振盪週期會由四倍週期改變為六倍週期。因此，從圖 24 可知， μ_1 可能因稍微變動而使系統之振盪發生週期性變化，從二倍週期轉換成六倍週期。另外，圖 25(a)顯示系統發生混沌行為，產生不規則的振盪週期；圖 25(b)表示系統狀態發散。接著，依據圖 25(a)(b)之模擬結果，若 μ_1 發生輕微的擾動則會造成系統不穩定。因此，從分叉理論與分叉圖可以預估系統狀態可能發生變化的原因。

從前述之模擬結果可知，直流電漿火炬混沌行為的發生不單是 μ 的變化造成的， μ_1 的變化仍會使系統產生混沌現象。在

此 case 中，我們探討圖 1 的三個 Hopf bifurcation(即 HB1、HB2 和 HB3)為初始值，固定 μ 且改變 μ_1 之分叉現象，分析 μ_1 變動時的各種動態行為。由時間響應圖與相位圖可以發現，當 μ_1 出現 period doubling 時， μ_1 可能只要有稍微的改變則會造成振盪週期由一倍週期快速變成八倍週期甚至是狀態發散；這種週期變化的現象有可能會使直流電漿火炬發生無法預期的危險。另外，經由模擬分析結果可以發現，系統的混沌行為不僅是 μ 變動造成的，也有可能是 μ_1 的變動所造成的影響。我們藉由模擬分析結果可以清楚知道學者 A. K. Das 沒有探討的範圍及 μ_1 的變動對整體系統影響的程度。

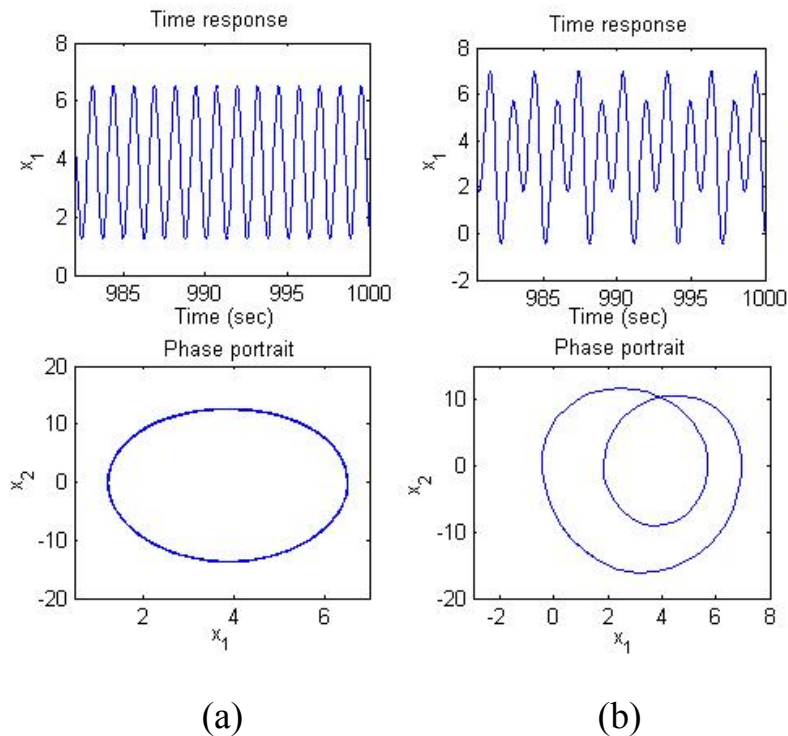


圖 20. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

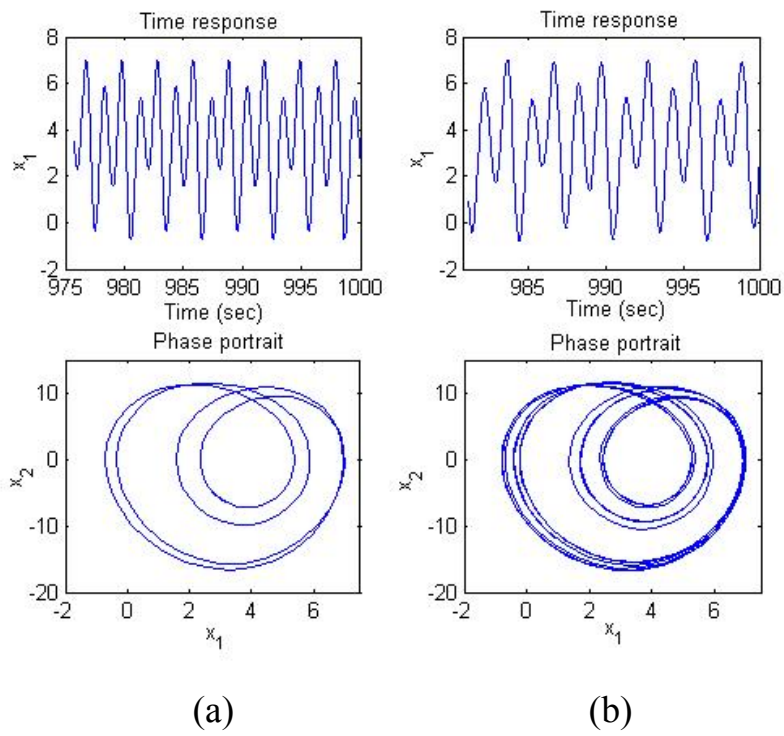


圖 21. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

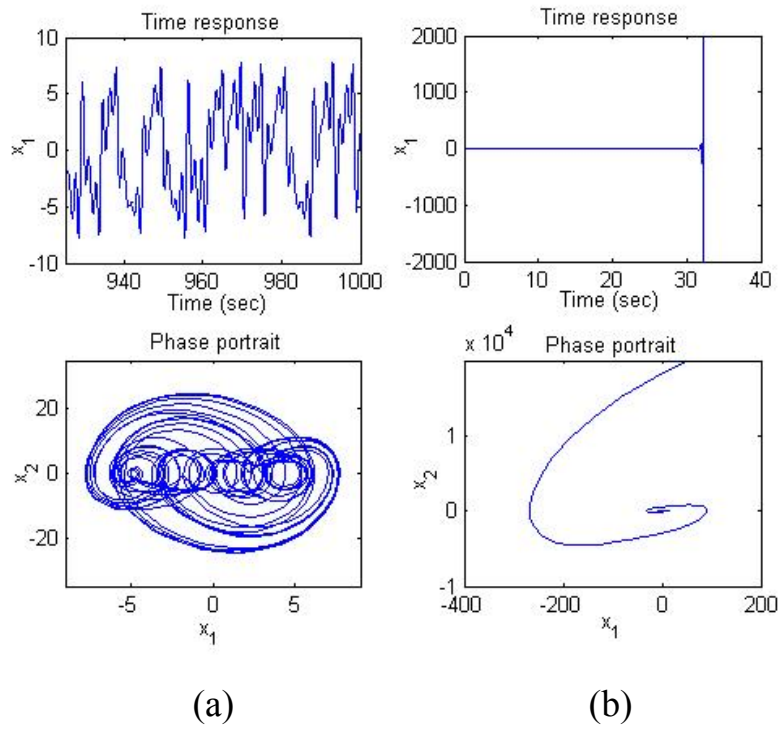


圖 22. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

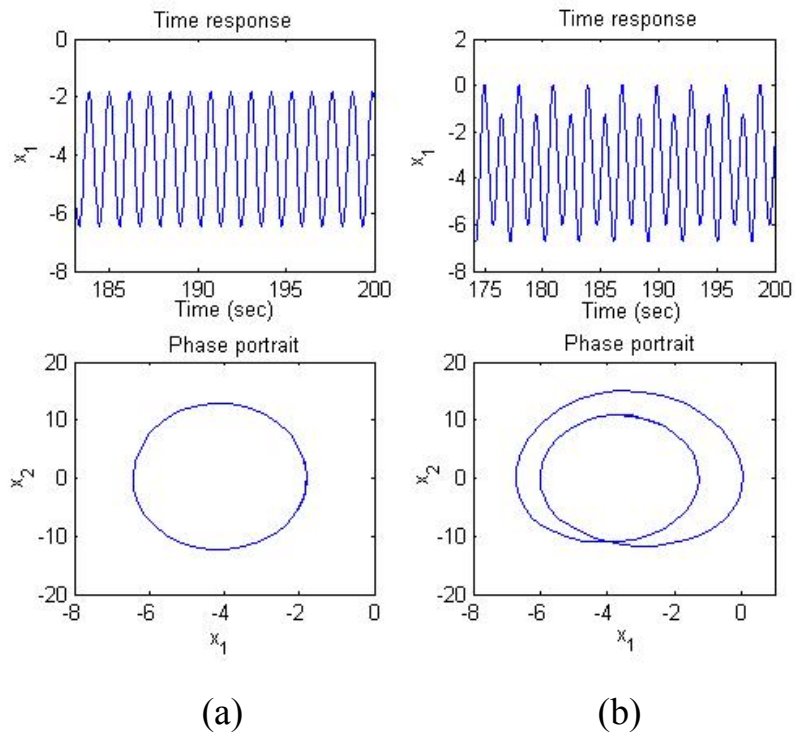


圖 23. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

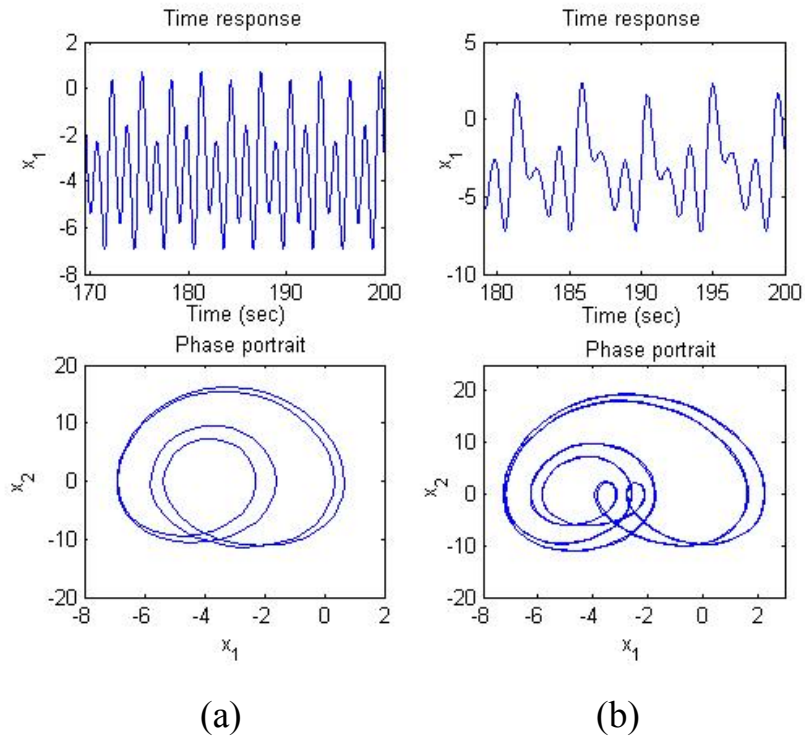


圖 24. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

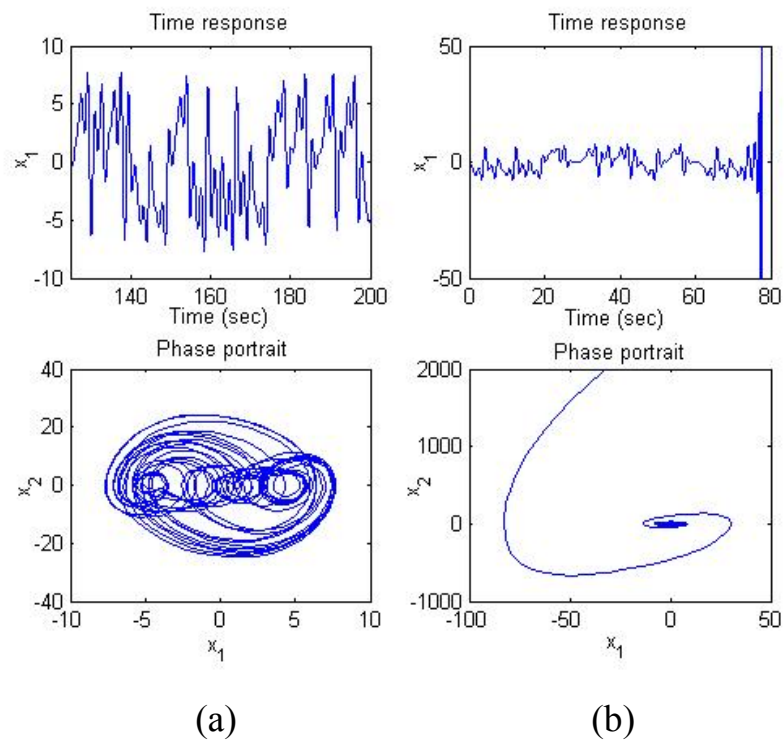


圖 25. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

(B) 同時改變 μ 和 μ_1 之情況

從上述之單參數分叉圖可以清楚的知道系統在單一參數發生變化時之分叉特性。單參數之分叉特性分析模擬驗證參數變化與系統狀態之關係圖(即 μ v.s. x_1 或 μ_1 v.s. x_1 之分叉圖)。接著，在此部分我們探討直流電漿火炬的二個參數同時發生變化之分叉現象，找出 μ 和 μ_1 之間的分叉特性。此部分模擬分析的主要目的是探討雙參數(two parameter)變化的分叉特性，模擬分析 μ 和 μ_1 同時發生變化之週期解。雙參數分叉理論是針對二個參數同時發生改變的分叉關係圖，經由雙參數分析可以了解 μ 、 μ_1 與系統狀態之間的影响程度以及其他分叉現象發生的可能性。

數值模擬分析仍是以圖 1 的 Hopf bifurcation (HB2 和 HB3)

為初始值，探討 μ 和 μ_1 同時變化的系統動態行為，其中以 HB2 為初始值之雙參數模擬結果與 HB3 為初始值相同。圖 26 表示 μ v.s. μ_1 之雙參數分叉圖。從圖 26 之模擬結果可以發現 Hopf bifurcation 軌跡將分叉圖分為右上和左下二部分；若 μ 和 μ_1 的值落在右上的區域內，則系統是穩定的；若 μ 和 μ_1 的值落在左下區域內則系統會產生一倍週期的振盪行為。因此，從模擬結果可知，Hopf bifurcation 軌跡為週期解的分界；右上區域為穩定的靜態解，即表示為穩定的區域；左下區域則是會發生 Hopf bifurcation，即系統會有週期解，所以產生一倍週期的振盪行為。因此，從雙參數之分叉圖可以找出系統的穩定區域以及發生振盪週期的雙參數範圍。以下，我們從圖 26 選取六個不同的參數值與固定系統之初始值 (x_{10}, x_{20}, x_{30}) ，模擬系統之時間響應與相位圖，觀察與驗證雙參數分叉圖之行為特性。

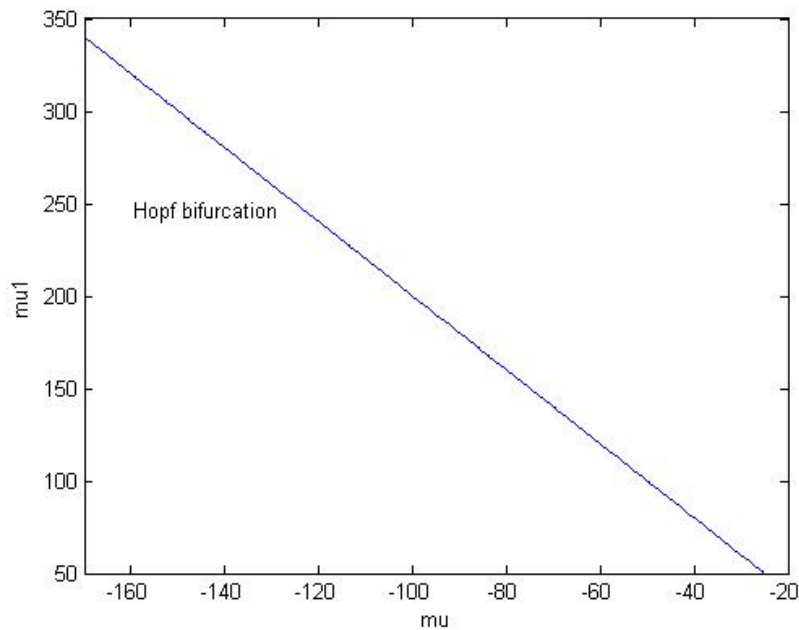


圖 26. 雙參數分叉圖 (μ v.s. μ_1)

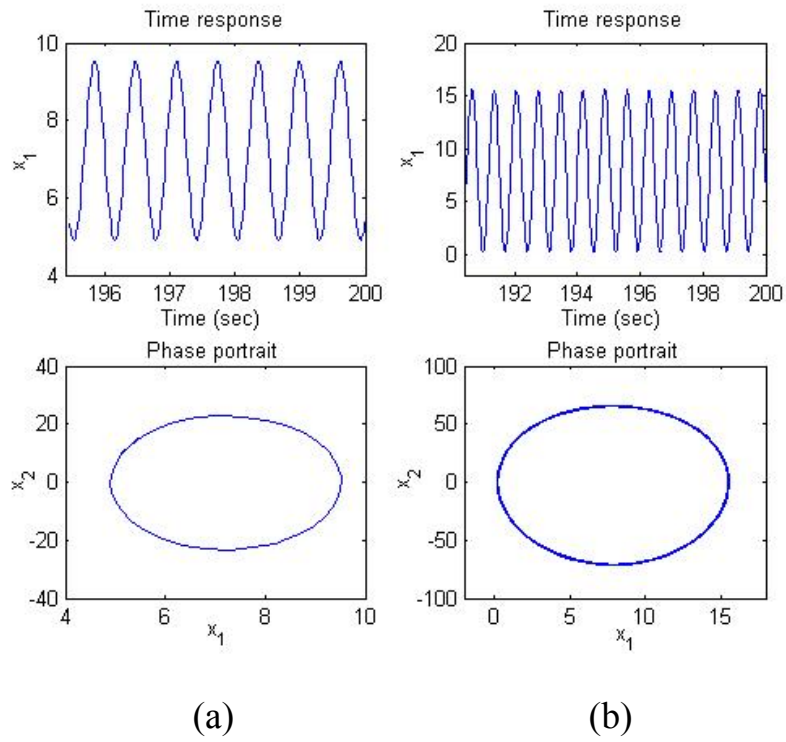


圖 27. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

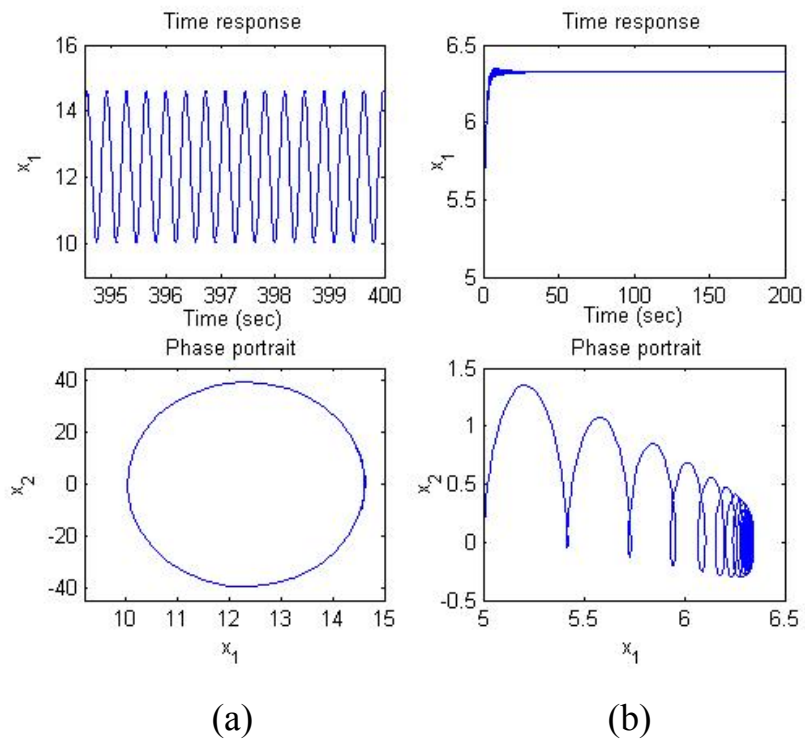


圖 28. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

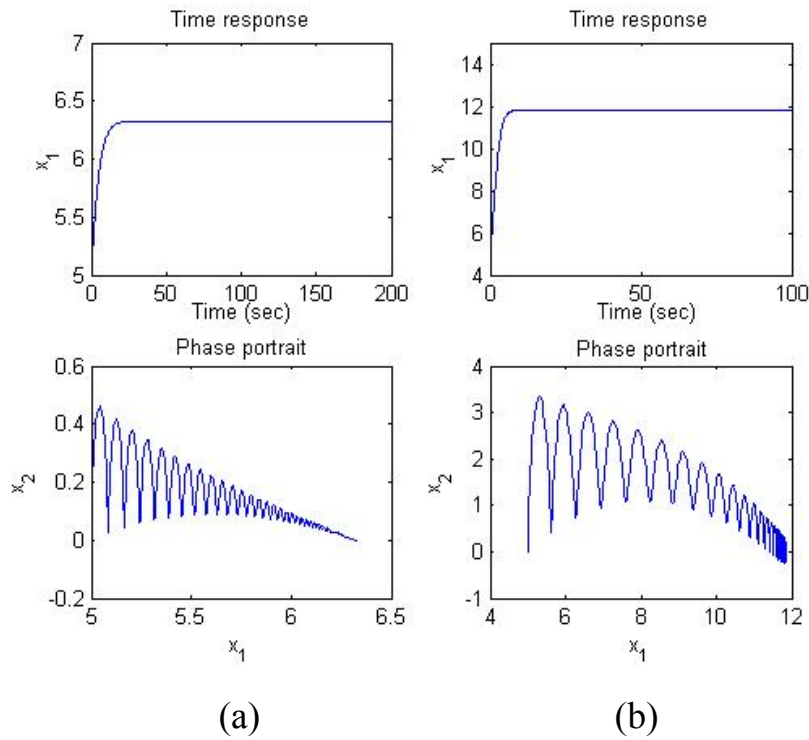


圖 29. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

圖 27(a)(b)~圖 29(a)(b)分別選取 $(\mu, \mu_1) = (-60, 100)$ 、 $(-150, 80)$ 、 $(-160, 300)$ 、 $(-40, 100)$ 、 $(-40, 310)$ 和 $(-140, 330)$ 以及相同的初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5, 0, 0)$ 。圖 27(a)(b)和圖 28(a)選取圖 26 的左下區域之 μ 和 μ_1 值；由時間響應圖和相位驗證此區域之參數使系統發生一倍週期的振盪行為。圖 28(b)和圖 29(a)(b)則是選取圖 26 的右上區域之雙參數值，此區域之雙參數變化使系統產生穩定狀態。因此，時間響應圖和相位圖模擬結果驗證雙參數變化之範圍，解釋雙參數的改變影響系統之動態變化特性。

Case 3：改變 Ω_0 或 Ω_2 ， Ω_1 固定

在 case 3 中，我們也探討另一個文獻沒有分析的參數以及

參數變化範圍。為了探討分叉參數變化與系統狀態之關聯性，我們仍透過分叉理論探討圖 1 中的 HB1、HB2 和 HB3 為初始值之參數變化，即 Ω_0 和 Ω_2 可能發生的系統動態特性。

首先，固定 $\Omega_1 = 50$ ，將 Ω_0 和 Ω_2 設定為系統參數。系統之狀態空間形式為

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - \mu_2 x_3 - x_1^3\end{aligned}\tag{69}$$

其中 $\Omega_0 = \mu$ 和 $\Omega_2 = \mu_2$ 為分叉參數。以下將探討二種發生的可能性。

(A) 固定 μ ，改變 μ_2 之情況

在此情況下，我們分別以圖 1 的 HB1、HB2 和 HB3 值設為初始值且固定 μ 以及改變 μ_2 ，分析從 HB1、HB2 和 HB3 出發之 x_1 與 μ_2 之動態特性。圖 30 和圖 31 為固定 μ 和改變 μ_2 之分叉圖。圖 30 是以 HB1 為初始值之 μ_2 v.s. x_1 分叉圖；模擬結果發現從 HB1 會出現一條不穩定的 limit cycle。圖 31 則是從 HB2 和 HB3 延伸之 μ_2 v.s. x_1 分叉圖；模擬圖顯示不管從 HB2 或 HB3 開始模擬計算，最後 HB2 和 HB3 延伸之軌跡會因 μ_2 變化而互相連結。然而，在 Hopf bifurcation 延伸的軌跡卻發生二個特殊的分叉點，即 torus bifurcation (TB)。以下說明分叉理論之 torus bifurcation。

首先，為了說明 torus bifurcation 之數學理論，我們先探討”Neimark-Sacker bifurcation”之分叉現象。Neimark-Sacker

bifurcation 主要是發生在固定點(fixed point)重複映射(iterated map)在動態系統的封閉不變曲線上之情況。此情況下，固定點會因一對複數根隨著單位模數(unit modulus)變化而改變穩定性。此類的分叉現象可以是 supercritical 或 subcritical，這樣的現象會分別導致產生穩定或不穩定的封閉不變曲線。當分叉現象發生在 limit cycle 的 Poincare map 裡，則此分叉會產生不變二維的環形曲線。因此，我們可以得到以下的定義

定義：考慮一個映射關係

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (70)$$

相依於 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ，其中 f 為平滑的(smooth)。假設對所有足夠小的 $|\alpha|$ ，系統存在有固定點 $x^0(\alpha)$ ；更進一步假定動態系統的 Jacobian matrix $A(\alpha) = f_x(x^0(\alpha), \alpha)$ 有一對複數特徵值

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)} \quad (71)$$

且當 $\alpha = 0$ 時，即 $r(0) = 1$ 和 $0 < \theta(0) < \pi$ ，則根會在單位圓內。另外，當 α 變動而穿過 $\alpha = 0$ ，則固定點發生穩定性改變且單位封閉不變曲線發生分叉現象。

有了上述的 Neimark-Sacker bifurcation 之理論說明，以下我們探討 torus bifurcation 之動態特性。假設 Neimark-Sacker bifurcation 發生在 limit cycle 的 Poincare map 上，則 limit cycle 相對應的固定點有一對特徵值 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ 。當系統改變穩定性，則一個唯一的二維不變環形曲線會從循環軌跡中分叉。這種 Poincare 區域的環形曲線之分叉點會與符合封閉不變曲線。因

此，torus bifurcation 通常被稱為 secondary Hopf bifurcation。

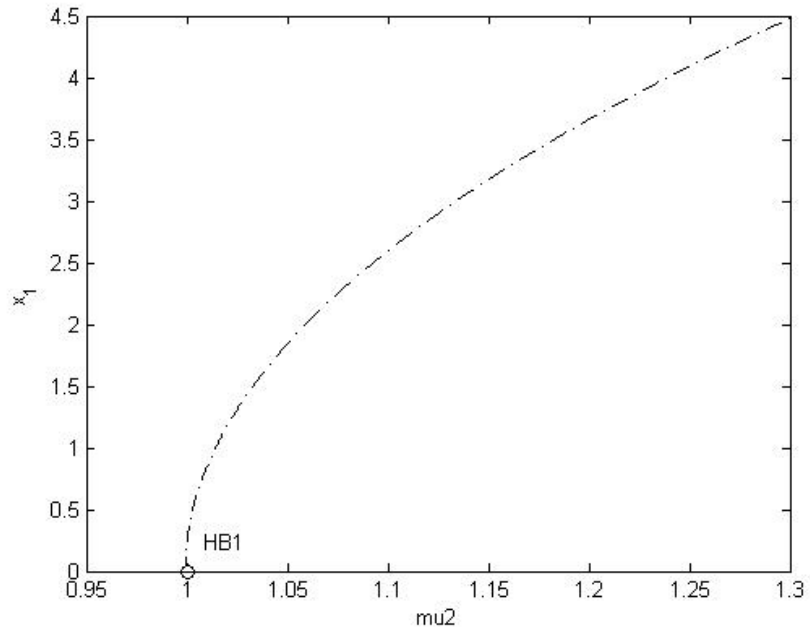


圖 30. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ_2 v.s. x_1)

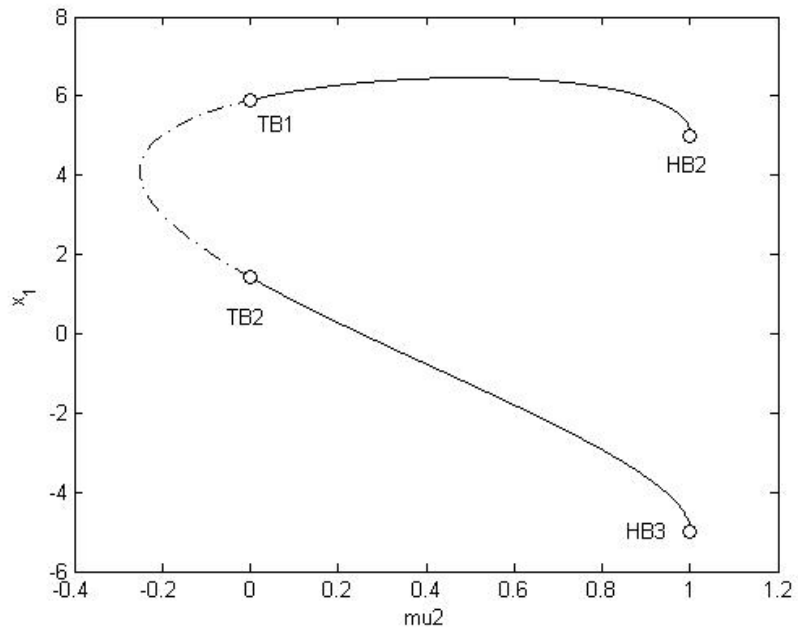


圖 31. 直流電漿火炬之分叉圖 (μ_2 v.s. x_1)

表五、Location of bifurcation points

	(x_1, x_2, x_3)	μ_2
TB1	(1.41677, 26.14, 182.9)	0
TB2	(5.89, 255.54, 204.3)	0

從上述之 torus bifurcation 理論可知，圖 31 出現二個 TB (即 TB1 和 TB2) 表示系統動態會發生環形曲線之行為，其中表五為 TB1 和 TB2 的值。以下，我們透過時間響應與相位圖探討圖 31 之動態特性。圖 32(a)(b) ~ 圖 34(a)(b) 之模擬結果表示在圖 31 選取六個不同的區域，我們經由時間響應和相位圖驗證圖 31 顯示的動態行為。圖 32(a)(b) 分別選取初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5, 0, 0)$ 和 $(-1, 0, 0)$ 以及相同的 $\mu_2 = 0.2$ ；模擬圖顯示此區域會產生一倍週期之振盪行為，符合分叉圖之模擬結果。接著，模擬分析以 HB2 和 HB3 為初始值之 μ_2 v.s. x_1 分叉圖可知道延伸之軌跡仍為一條穩定的 limit cycle；因此，圖 32(a)(b) 驗證在 μ 固定與改變 μ_2 的情況下會發生一倍週期之振盪。另外，圖 33(a)(b) 分別選取初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5.5, 0, 0)$ 和 $(0.1, 0, 0)$ 與相同的 $\mu_2 = 0$ ；此區域刻意選取 torus bifurcation 附近的參數值，分析 torus bifurcation 附近的動態特性。從時間響應圖可以發現系統產生奇特的振盪週期，且相位圖顯示環形曲線。因此，torus bifurcation 會造成系統從原來的一倍週期改變為奇異的振盪現象。從圖 31 也發現系統從 HB2(或 HB3) 延伸之軌跡沒有出現 period doubling，即沒有出現規則性的週期

變化，直接出現奇特的振盪行為。圖 34(a)(b)則是選取初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (4, 0, 0)$ 和 $(1, 0, 0)$ 且相同的 $\mu_2 = -0.1$ ；從模擬圖可以知道 TB1 和 TB2 分叉的軌跡為不穩定的動態行為。由此可知，雖然此 case 不會發生週期不規則變化的混沌現象，但是仍會出現奇特的振盪行為。若將模擬時間拉長，則可觀察到系統之動態發生一類似固定週期的波形，而放大每個波形則會發現每個波形裡面又會疑似小波的奇異現象。

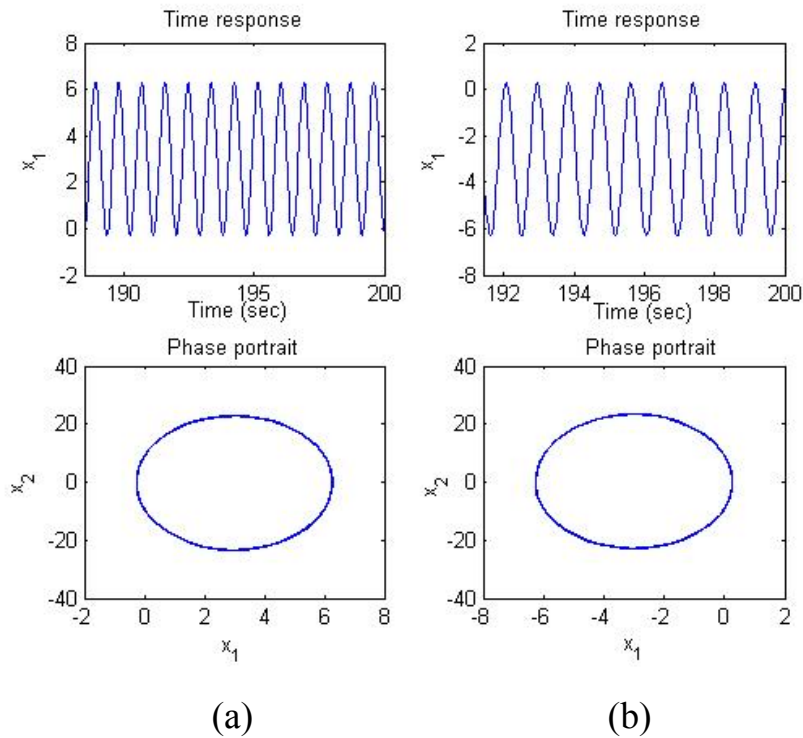


圖 32. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

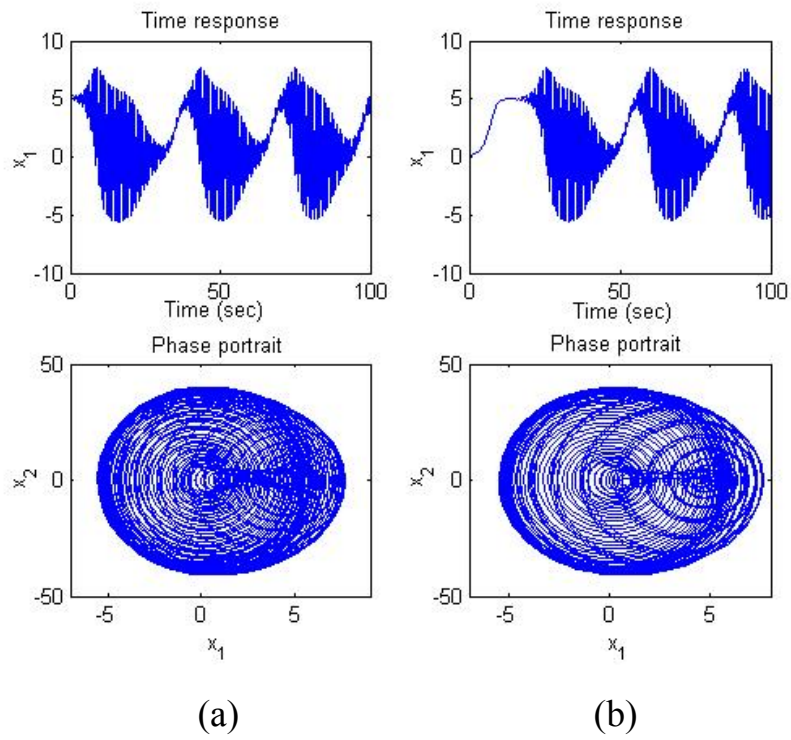


圖 33. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

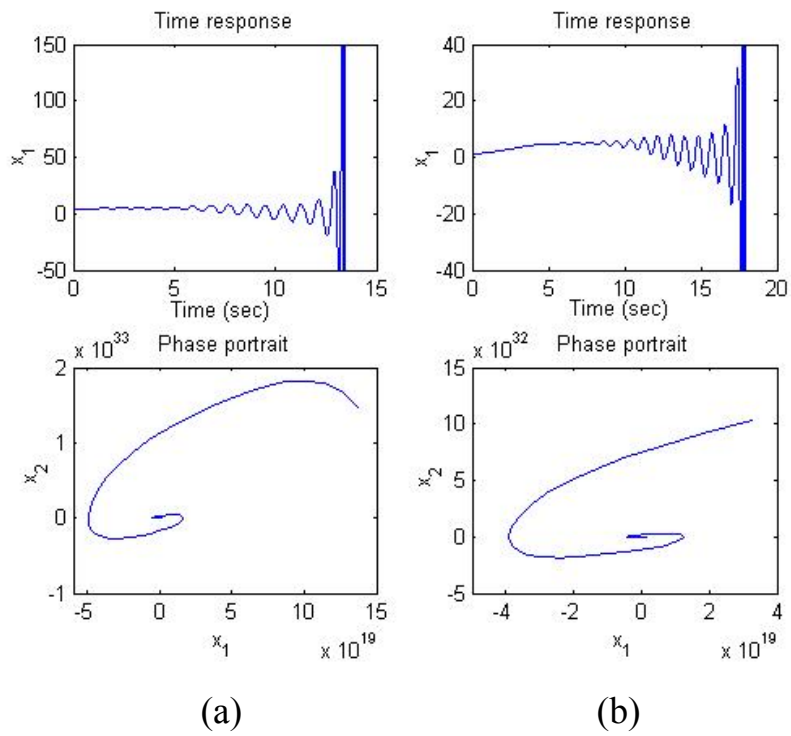


圖 34. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

(B) 同時改變 μ 和 μ_2 之情況

依據上述模擬結果之單參數分叉圖可以知道系統在單一參數發生變化時之分叉特性。接著，此部分我們探討直流電漿火炬的雙參數同時發生變化之分叉現象，找出 μ 和 μ_2 之間的分叉特性。雙參數分叉理論是針對二個參數同時發生改變的分叉關係圖，藉由雙參數分析可以了解分叉參數與系統狀態之間的影響程度以及其他分叉發生的可能性。因此，此部分的分析模擬主要是探討雙分叉參數 μ 和 μ_2 之間的關聯性，找出系統發生週期解的區域以便於了解發生振盪週期的原因。

圖 35 為 μ v.s. μ_2 之雙參數分叉圖。從圖 35 之雙參數分叉圖可以發現，Hopf bifurcation 軌跡把分叉圖分割成右上區域和左下區域；右上區域是穩定區域，左下區域會出現一倍週期之振盪行為。由此可知，系統因分叉參數 μ 和 μ_2 的變化而使動態行為由穩定狀態改變為一倍週期之振盪特性。以下，我們在圖 35 中選取六個不同的區域模擬分析時間響應和相位圖，觀察系統動態在時域上的變化。

圖 36(a)(b)~圖 38(a)(b)為選取六個不同的分叉參數值以及固定初始值 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (5, 0, 0)$ 。圖 36(a)(b)選取相同的 $\mu = -40$ 和分別選取不同的 $\mu_2 = 1.2$ 和 2.5 ；從模擬圖可以知，圖 36(a)選取左下之區域，系統發生一倍週期的振盪行為，而圖 36(b)則選取右上區域，系統狀態為穩定的。圖 37(a)選取 $\mu = -40$ 和 $\mu_2 = 3.8$ ；圖 37(b)選取 $\mu = -90$ 和 $\mu_2 = 1.2$ 。圖 38(a)(b)分別選取 $\mu = -90$ 和 $\mu_2 = 3.5$ 以及 $\mu = -90$ 和 $\mu_2 = 3.9$ 。從圖 36(a)(b)~圖 38(a)(b)之模擬結果驗證圖 35 之雙參數分叉圖。

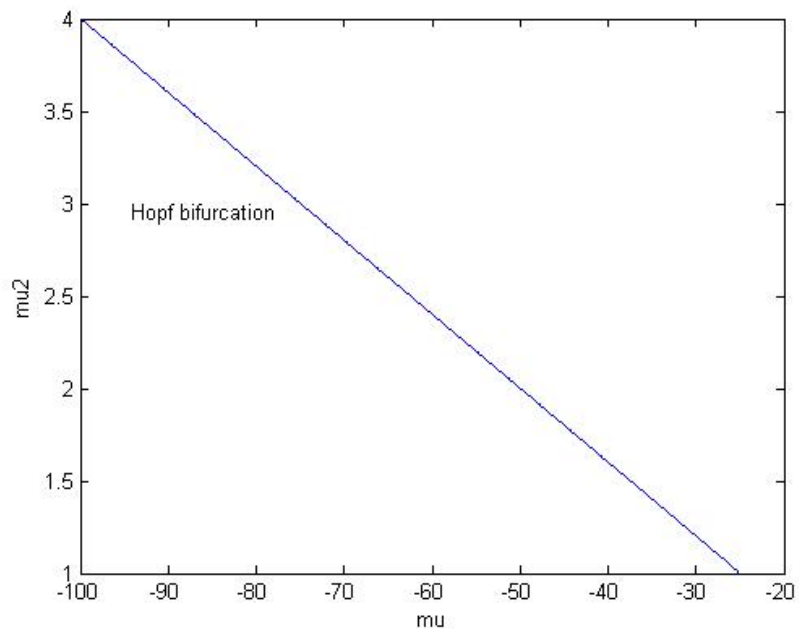


圖 35. 雙參數分叉圖 (μ v.s. μ_2)

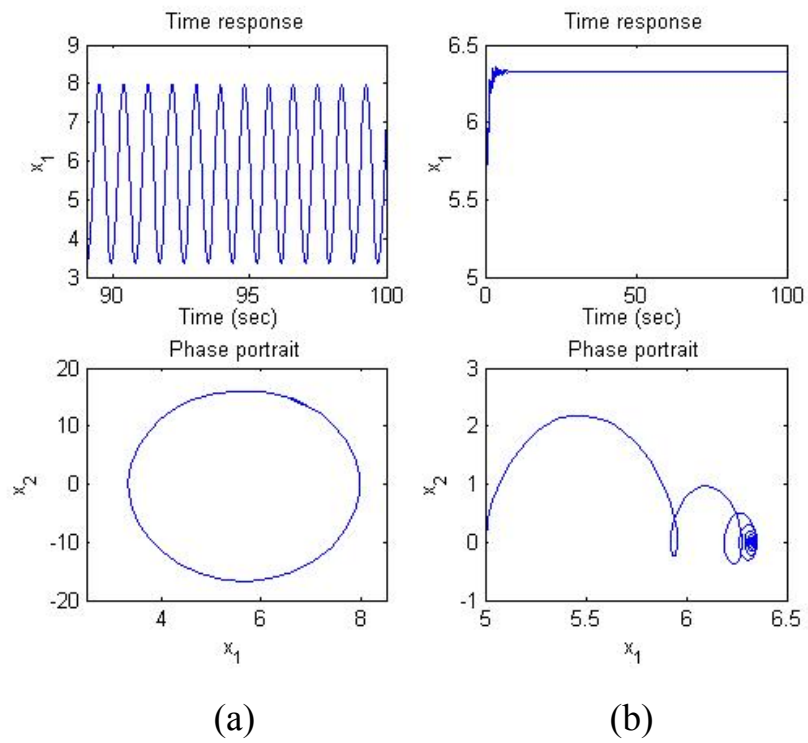


圖 36. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

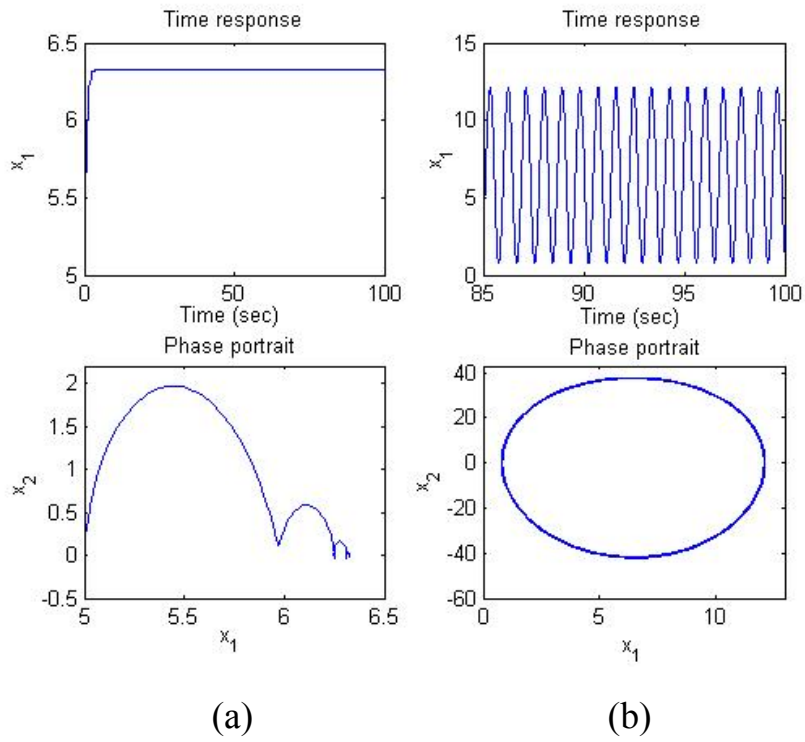


圖 37. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

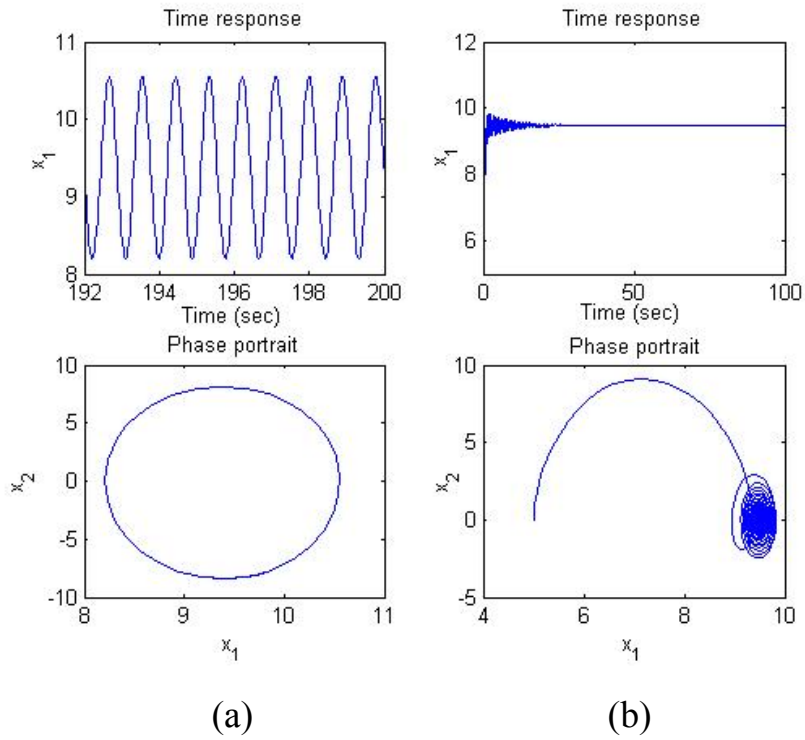


圖 38. 時間響應(x_1 v.s. t)和相位圖(x_1 v.s. x_2)

本計畫透過非線性理論與分叉理論找出直流電漿火炬可能發生的各種動態特性，也探討分叉參數的改變與系統動態行為之間的關聯性。藉由單參數分叉圖和雙參數分叉圖搭配時間響應圖與相位圖可以有效的分析系統可能發生的振盪週期及週期變化。另外，我們探討學者 A. K. Das 尚未討論的參數範圍，學者 A. K. Das 僅討論單參數 Ω_0 變化導致發生混沌行為的特性分析。本計畫則是考慮所有可能發生變化的參數，探討直流電漿火炬的動態特性。模擬結果驗證混沌現象不單是 Ω_0 變化才會發生， Ω_1 的變化也會造成系統進入混沌行為。因此，本計畫之模擬結果提供更廣的參數變化範圍以及系統可能發生的其他動態行為。

三、協助建立井式電漿火炬混沌參數量測儀器之實驗平台

從前述之電漿火炬數學分析與模擬發現系統之顫動行為可能是一混沌現象而非以往所認知的隨機行為。然而，影響實際系統之外在因素相當廣泛與複雜，我們必須透過實際系統之實驗觀察火炬之動態特性以確認數學分析模型之參數值以及系統狀態的可能操作範圍。為了觀察實際系統之顫動行為，參與本計畫之相關人員與核研所物理組研究員討論實驗量測設備之規劃，並且參與實驗過程與數據之量測。透過數次參觀直流電漿火炬之測試與數據量測的流程以及核研所物理組人員的解說，本計畫協助硬體架構之建立與提供實驗量測之建議，以下詳細說明協助實驗設備之規劃與相關數據量測之意見以提供相關實驗人員之參考。

1. 協助建立直流電漿火炬之量測平台

高溫直流電漿火炬往往受限於物理與化學特性而導致實驗之量測儀器不易架設，實驗數據也因硬體設備之操作範圍的限制而無法精確擷取精確數據。另外，電漿火炬之溫度可達上萬度，目前市面上之儀器均無法承受這麼高的溫度，實驗設備之架設必須依據物理特性以及儀器之使用規格，量測儀器之操作範圍以及使用限制是影響實驗數據之關鍵。表六整理實驗設備之使用規格。目前，核研所的電漿火炬實驗室已架構自動化遠端操作平台，如圖 39~圖 42；圖 39~圖 42 為實驗主控畫面，經由主控室開啟、監控與擷取數據，可以避免火炬與實驗人員近距離接觸而保護人員安全。

在量測儀器方面，核研所採購 high-speed photodetector、high voltage differential probe、AC/DC current probe、NI dynamic signal acquisition and generation、photo diode 等等，硬體架構之示意圖如圖 43 所示。本計畫之內容主要是針對可能發生顫動現象的訊號量測；因此，本計畫之實驗數據是擷取聲音、溫度、電壓和電流之量測數據，並且協助進行量測儀器之架設。由於科技的進步，電壓和電流的量測技術已趨成熟，所以電壓和電流的實驗數據可以擷取到精確的值；但是直流電漿火炬之工作溫度則受限於物理特性，紅外線測溫儀不易量測火炬內部的溫度。因此，photo diode 只能架設在火焰之出口位置，觀察噴出之火焰溫度。以下，我們針對本計畫的實驗所需之量測數據提供相關之實驗規劃與建議。

表六、直流電漿火炬之量測儀器規格

	ITEM	Model	Response	
1	RTD	Pt100	Less than 2s	Cooling water
2	Mass flow meter	Brooks 5853i	Less than 3s	Air flow
3	Alexandrite spectropyrometer		1 s-1s	Temperature of torch exist
4	CMOS Camera	Phantom V9.1	>1,000 picture/s Exposure time>2 s	
5	LDV	miniLDV	40MHz	
6	Acquisition card	NI4462	204.8 KS/s	Sampling Rate
7	Photo Diode	DET10A/M	1ns (max)	Rise time Range: 200-1100 nm
8	Current Probe	PR1530	20kHz	
9	Differential Probe	P5210	100MHz	
10	Microphone	ECM-999	20kHz	

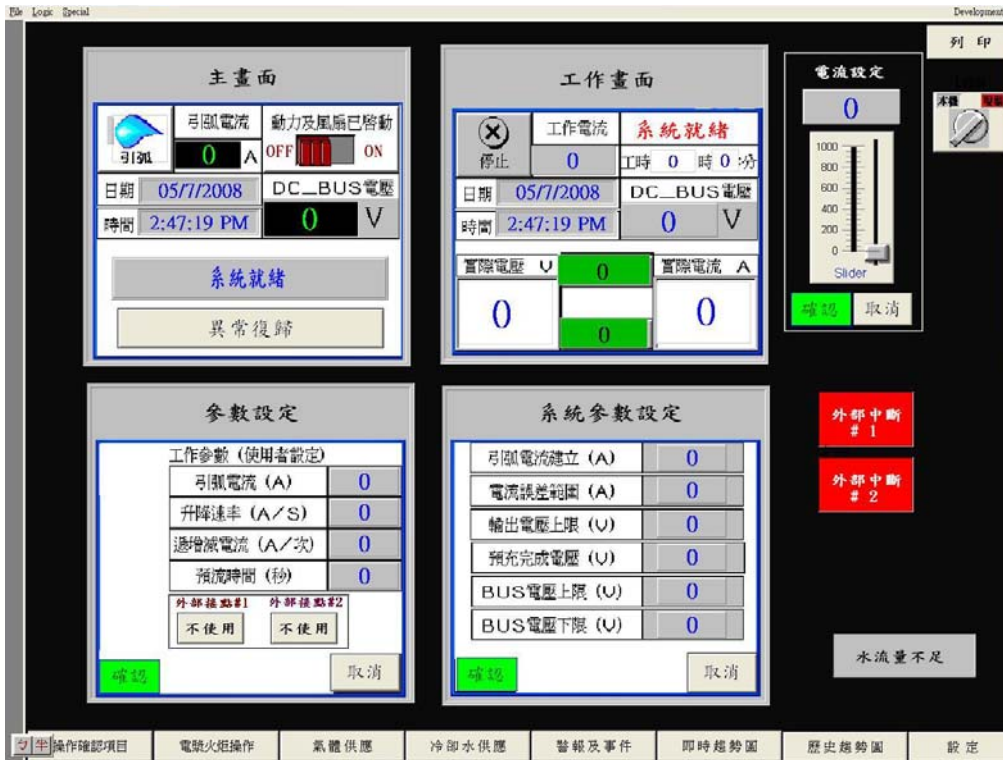


圖 39. 直流電漿火炬之軟體工作畫面

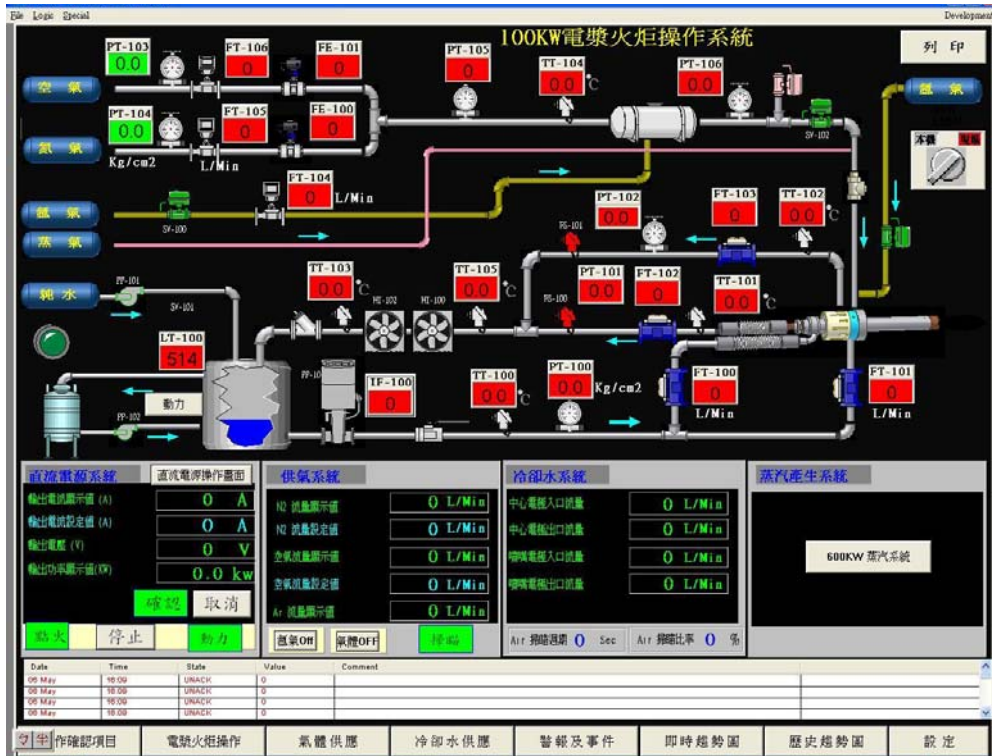


圖 40. 直流電漿火炬之軟體工作畫面

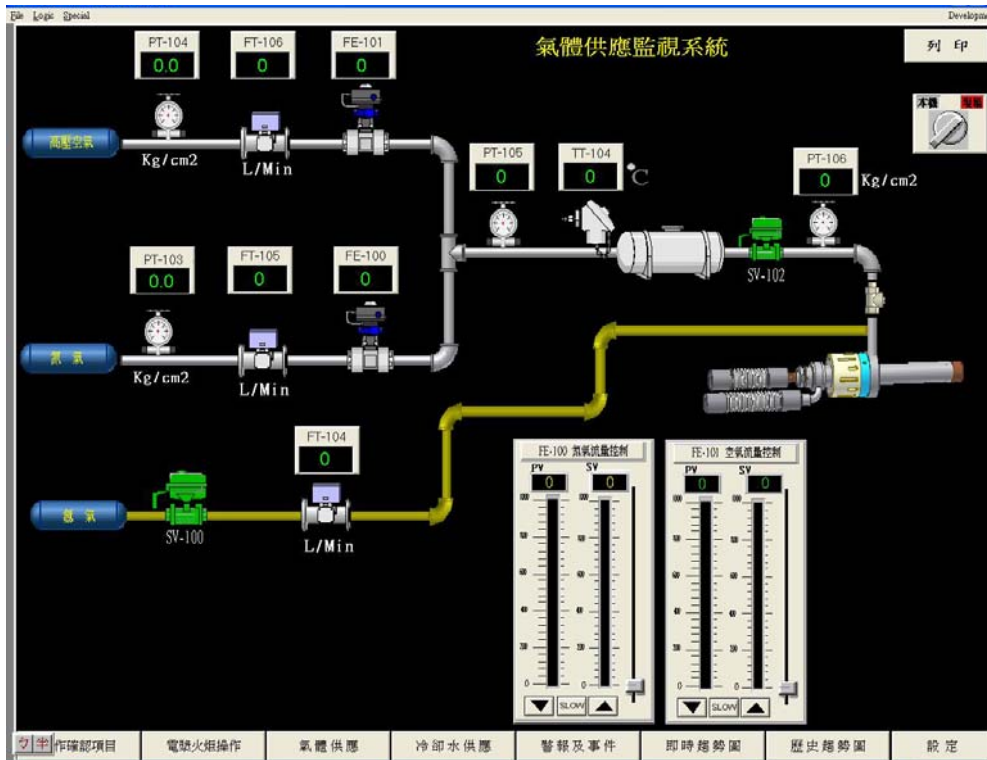


圖 41. 直流電漿火炬之軟體工作畫面

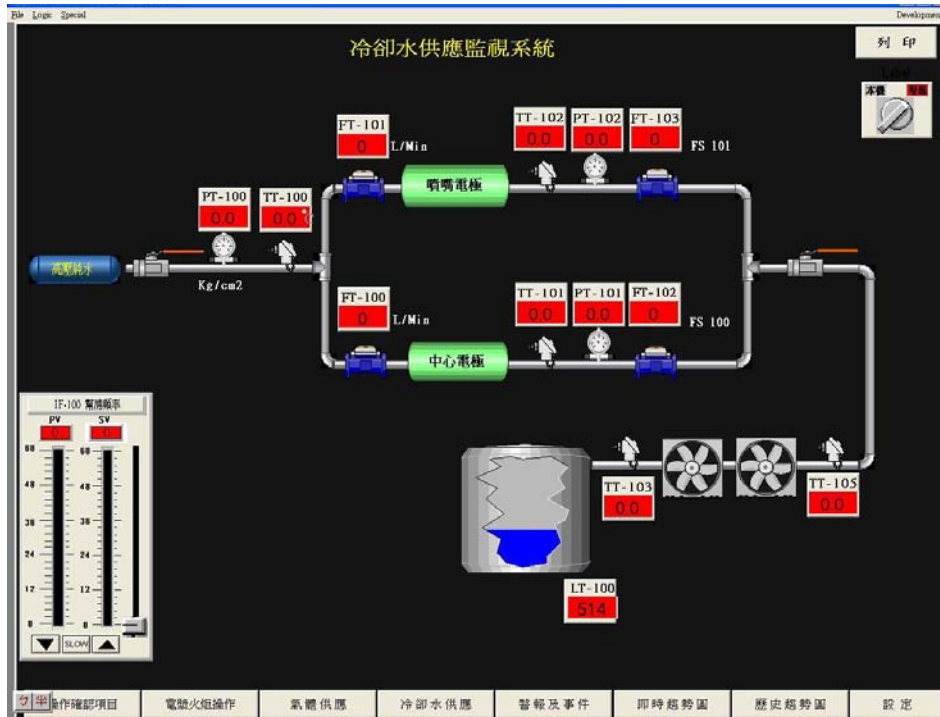


圖 42. 直流電漿火炬之軟體工作畫面

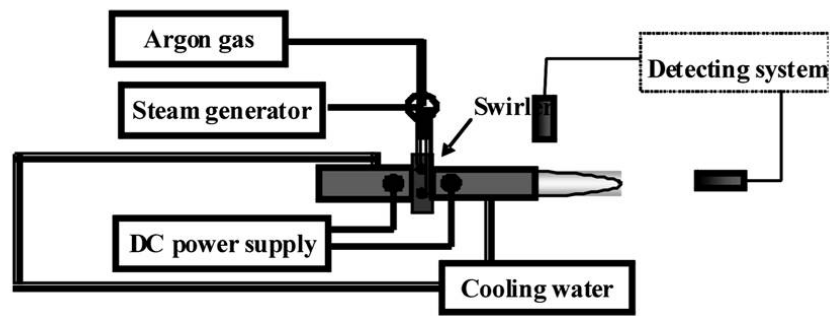


圖 43. 直流電漿火炬系統之示意圖

2. 實驗參數量測之規劃與意見

在參數量測之規劃方面，核研所物理組之實驗研究員已有針對直流電漿系統規劃實驗流程以及儀器之架設。本計畫的實驗主要目的是探討電漿火炬之顫動現象，我們希望透過實際實驗擷取顫動行為的量測數據，以便於作進一步的資料分析。因此，除了核研所人員已架構之硬體設備，我們希望針對本計畫之實驗需求而改變量測位置。

圖 44 為火炬內部之示意圖。電漿火炬內部之溫度相當高，一般的量測儀器無法放入電漿火炬內部量測溫度數據。我們只能測量火炬出口溫度，即將紅外線測溫儀架設在火炬噴出口位置。然而，從高速攝影機之拍攝結果發現，電漿火炬之火焰是呈現類似不規則噴出狀態，且火焰會產生抖動特性。若用單一 photo diode 量測火焰一個點的溫度，則可能會無法確實量測到真實的溫度，如圖 45。從圖 45 可發現，火炬的火焰溫度並不均勻，若單用一個 photo diode 可能會因積分效應而無法完整擷取火炬的動態特性。因此，本計畫建議可以在圖 44 之火炬出口端架設一個環形 photo diode，如圖 46 所示；透過環形的 photo diode 可以

量測整個火焰的溫度變化。

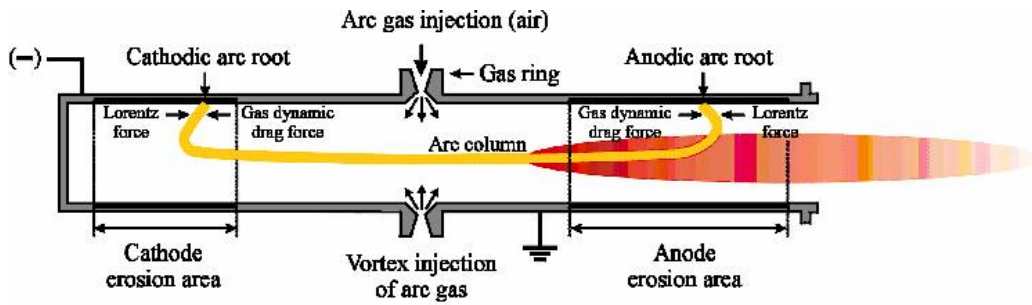


圖 44. 直流電漿火炬系統之內部構造圖

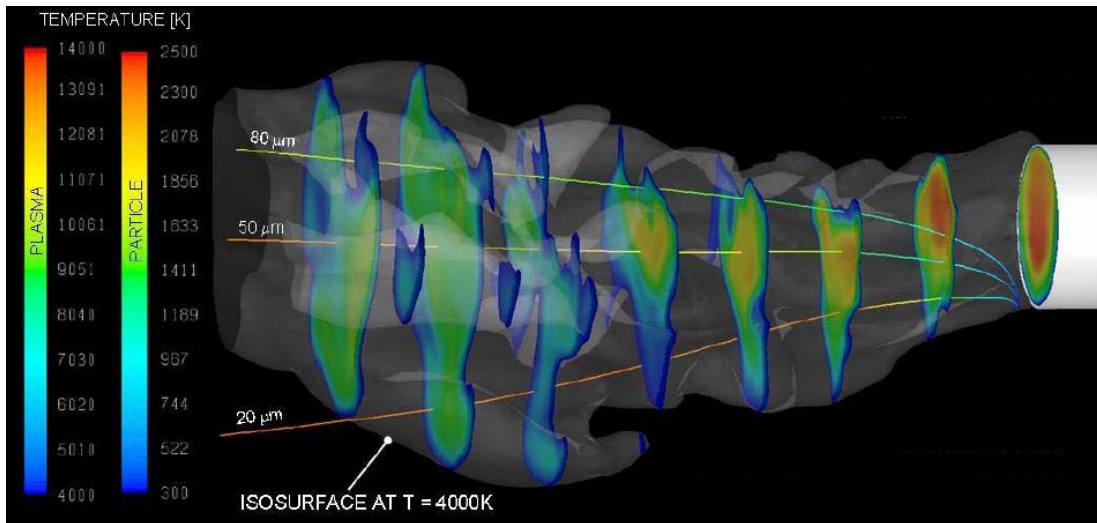


圖 45. 電漿火炬之火焰溫度示意圖

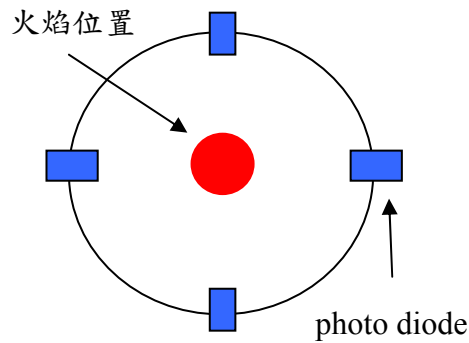


圖 46. photo diode 之架設示意圖

四、井式電漿火炬混沌參數之初步量測與資料分析

本計畫透過核研所實驗量測與物理組人員的協助擷取電漿火炬之實驗數據。實驗過程中，我們針對可能發生顫動現象之系統狀態，量測其實驗數據並初步分析顫動特性。這次實驗是採用核研所物理組提供型號為 INER-ST100-154-350-18 之 40KW 小型直流電漿火炬做測試，實驗目的是量測電壓、電流、光和聲音的訊號。表七為實驗流程之相關參數值。實驗之控制軟體是採用 NI 開發之資料擷取系統，每 1 秒擷取二萬個資料。以下，我們依據核研所提供之實驗數據初步分析與探討電漿火炬之顫動行為，其中量測之數據分析圖是以 1 秒為一張圖，即表示每張圖是以二萬個取樣點作資料分析。

表七、直流電漿火炬實驗之參數值

電流 I	電壓 V	Flow rate	Time	T_i	T_o	P_i
80	500	21.1%	10:36	48.9	50.6	3kg
80	510	21.2%	10:59	60.3	62.0	3kg
80	525	21.2%	11:10	65.6	67.4	3kg
80	510	21.2%	11:17	68.8	70.5	3kg

註：本次實驗由 AM 10:19 開始實驗，AM 11:17 結束。於 AM 10:33 V 、 I 、acoustic 和 photo amplifier power on。 T_i 和 T_o 分別表示冷卻水之入口溫度與出口溫度； P_i 表示壓力。

1. 量測資料初步分析

此部分的實驗數據分析是對數據做定性分析，探討系統的動態特性，並不考慮量化的因素。首先，我們擷取電壓、電流、

光和聲音的量測資料分析系統電壓、電流、光和聲音的訊號之時域圖和頻譜圖。圖 47(a)-(d)分別為時間 10:34 中的二萬個取樣點之電壓、電流、光和聲音量測值；為了觀察電壓之曲線變化，我們縮小圖 47(a)-(d)橫軸之刻度，觀察 2000 個取樣點之動態行為，如圖 48(a)-(d)。圖 49(a)-(d)分別表示圖 47(a)-(d)的頻譜；圖 50(a)-(d)則是縮小圖 49(a)-(d)之橫軸刻度的頻譜圖，目的是為了能清楚觀察頻率約 6000Hz 附近的振幅訊號。同理，我們擷取接下來二秒模擬數據也同樣地分別以二萬個取樣點作分析，探討其動態行為和其頻譜。為了清楚觀察細部的變化，我們也調整橫軸刻度，其數據分析圖與頻譜分別表示於圖 51(a)-(d)~圖 58(a)-(d)。

從這些模擬圖可知，量測之四種訊號均呈現不規則之振盪行為，即為直流電漿火炬發生顫動現象。我們將量測數據經由 FFT(Fast Fourier Transform)轉換，分析擷取之訊號的頻譜。從頻譜之分析結果也發現系統會產生各種不同的頻率。然而，比較四種量測訊號之頻譜發現除了用紅外線測溫儀擷取之訊號外，電壓、電流和聲音的頻譜會在約 6000Hz 產生二個特別的振幅訊號。另外，執行電漿火炬實驗之前未量測外在背景雜訊之干擾，量測之數據包含外在背景雜訊與原直流電漿火炬之訊號。此部分之數據分析圖尚未將外在雜訊過濾，依經驗推測，頻譜上的這些週期訊號有可能是外在雜訊造成。在未來仍需要與核研所物理組人員合作做進一步之實驗以確認此推論之正確性。

接著，我們選取電漿火炬運轉一段時間後之量測數據，觀察電漿火炬之動態行為以確認是否已達到穩態。如圖 59~圖 70

所示為選取時間 11:15 之實驗數據，其模擬方式與上述方法相同。此部分是想觀察電漿火炬在長時間運轉後之動態行為，藉以了解電漿火炬是否以達到穩態。從數據分析圖之結果發現經由長時間運轉後之時間響應圖與頻譜與圖 47~圖 58 類似，由此推論，系統應已接近穩態。然而，若仔細比對圖 59~圖 70 之數據分析圖和頻譜圖，在頻率約 6000Hz 之頻譜略有差異。此現象可能是因為直流電漿火炬因長時間運轉，內部電極之金屬可能受到弧根高溫影響而有熔解狀態，造成頻率有些微改變。在未來我們將規劃較多之實驗量測，以觀察電漿火炬在長時間運轉下之動態特性。並藉由這些量測以確認上述推論是否合宜及完整了解電漿火炬之顫動現象與系統狀態之關聯性。

綜合上述之初步實驗數據分析，我們可以觀察到電漿火炬具有兩種基本行為表現。一為穩定之週期性現象，此一部份可從頻譜分析發現約在 6000Hz 附近有二個較大振幅之訊號。依據以往之研究經驗，該二個訊號有可能是由電漿火炬的電流供應器之 PWM(Pulse Width Modulation)輸出與氣流之進氣口氣旋產生調變(modulation)所造成。就了解，該電漿火炬的電流供應器之 PWM 頻率約為 6000Hz。而氣流之進氣口產生氣旋之頻率不高。由文獻獲知，一般類似氣旋之旋轉失速現象往往出現在 10Hz 左右，而麥克風的最低可量測頻率約 10Hz ~20Hz。此旋流的量測之數據可能需要再深入實驗量測與分析。未來可能需要藉由電漿火炬之物理特性與硬體架構的方向深入討論，目前僅有電壓、電流、光和聲音等四種實驗訊號，尚無法完整分析這二個頻率的發生。在未來之實驗規劃，我們仍將與核研所人員合作，

架設並量測其它的實驗數據，例如：氣流、火焰影像(high-speed photodetector)、環形 photo diode 溫度量測及外在背景雜訊等以確認上述之推論。另一由頻譜觀察到的主要現象為極小振幅之多頻率訊號，該等訊號有可能為環境背景雜訊所造成，非系統之氣流顫動現象。此一部份之推論仍有待未來進一步實驗之檢驗。

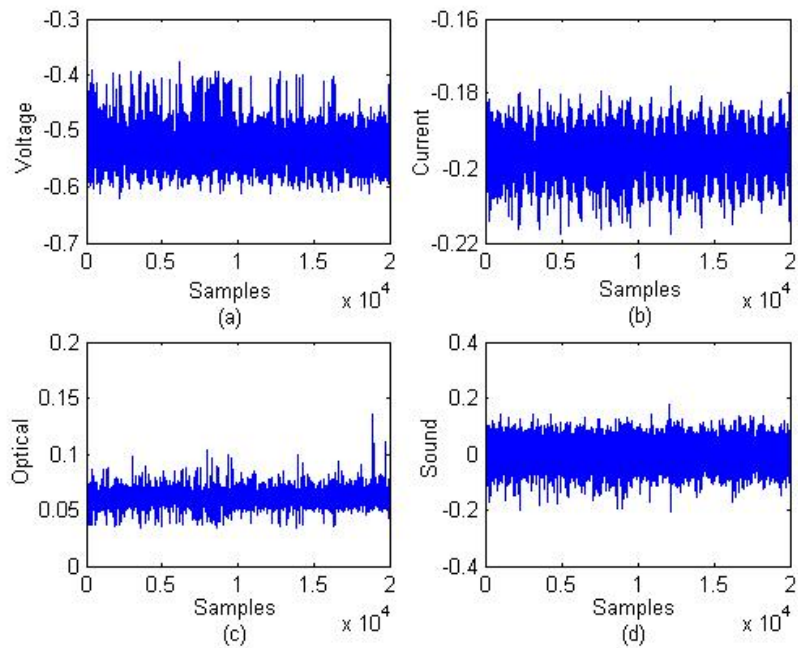


圖 47. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

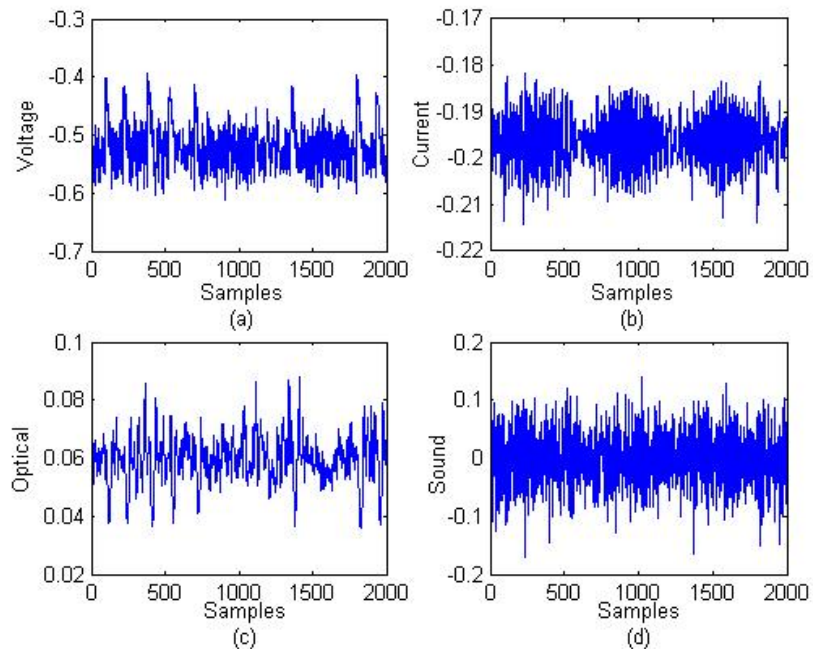


圖 48. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

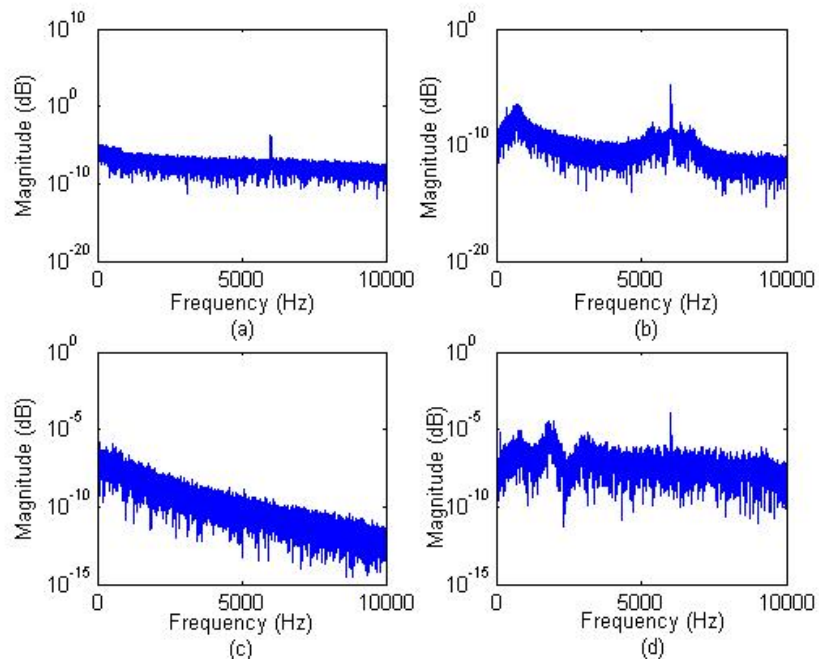


圖 49. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

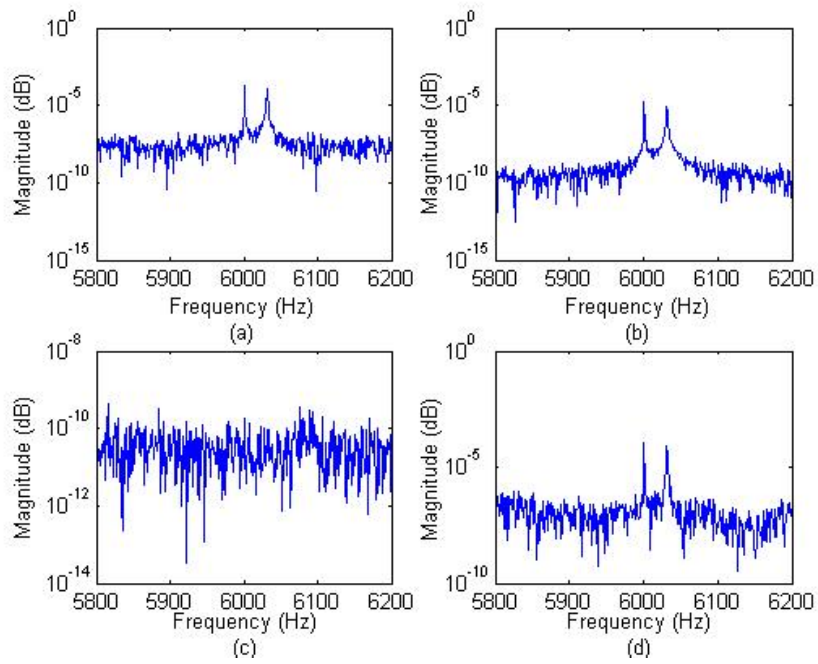


圖 50. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

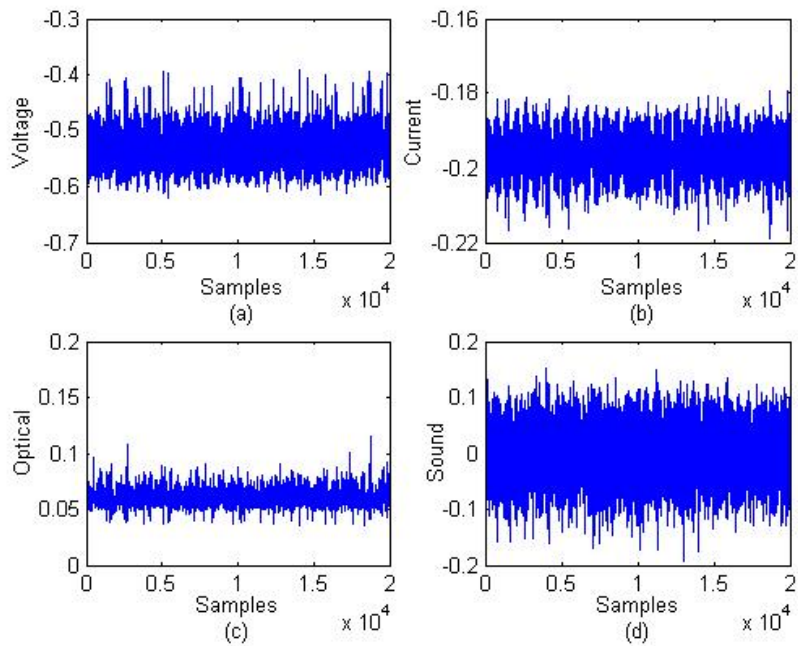


圖 51. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

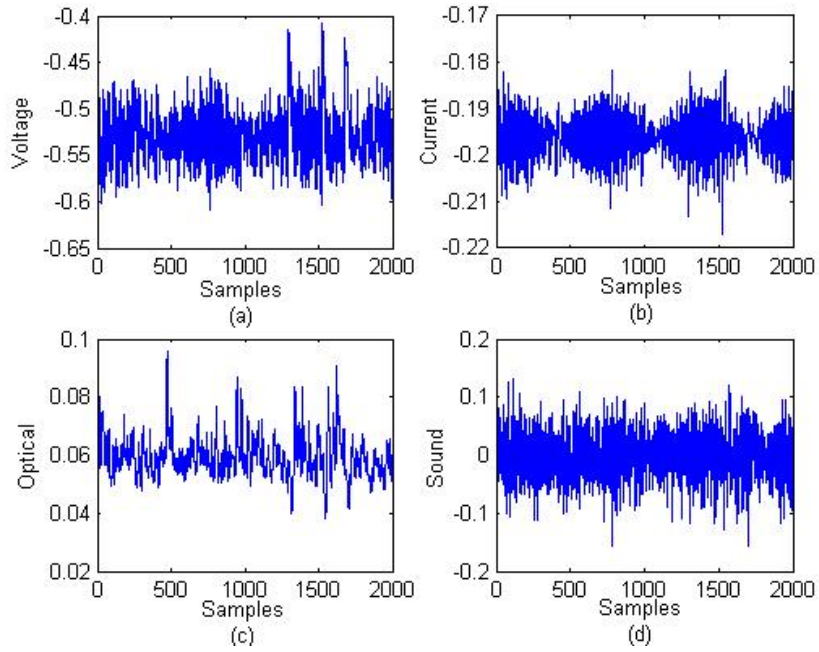


圖 52. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

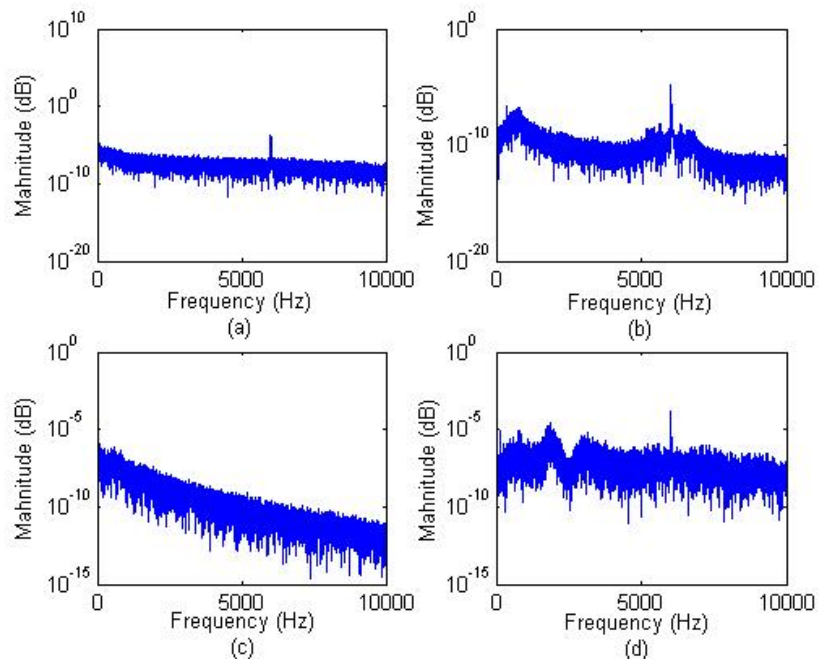


圖 53. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

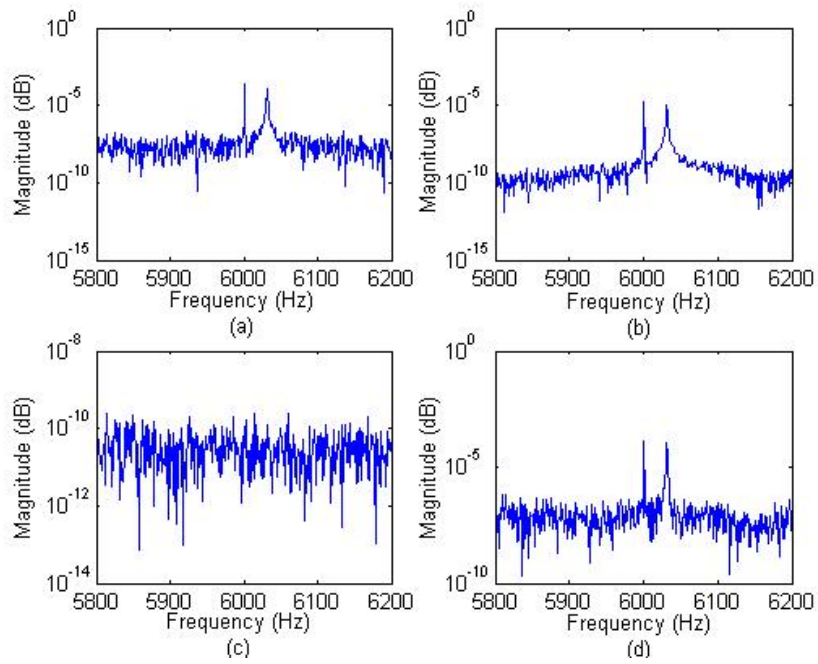


圖 54. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

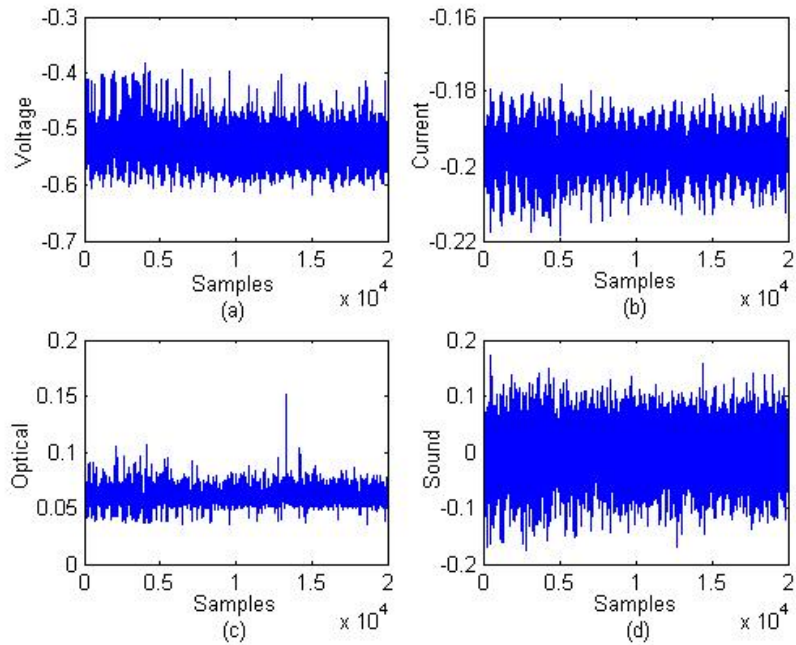


圖 55. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

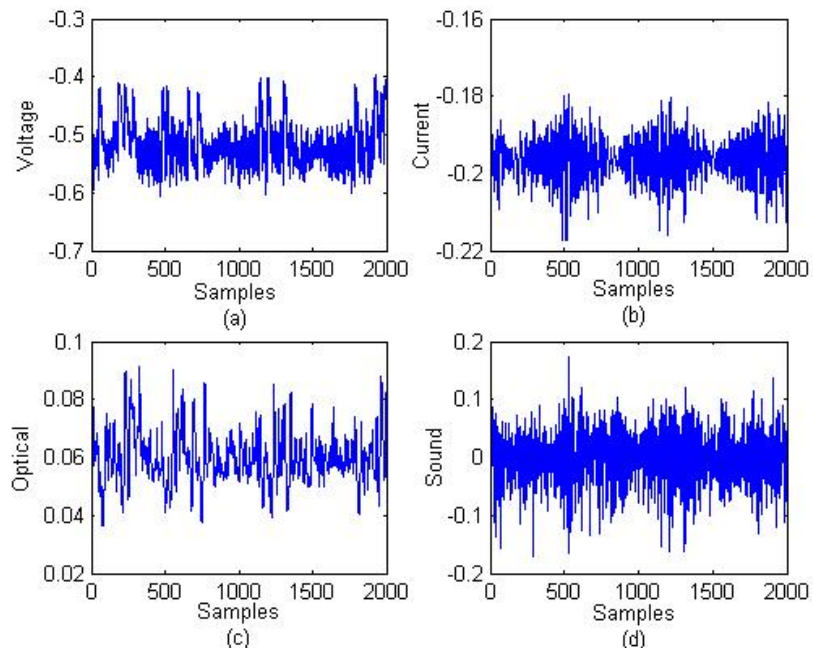


圖 56. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

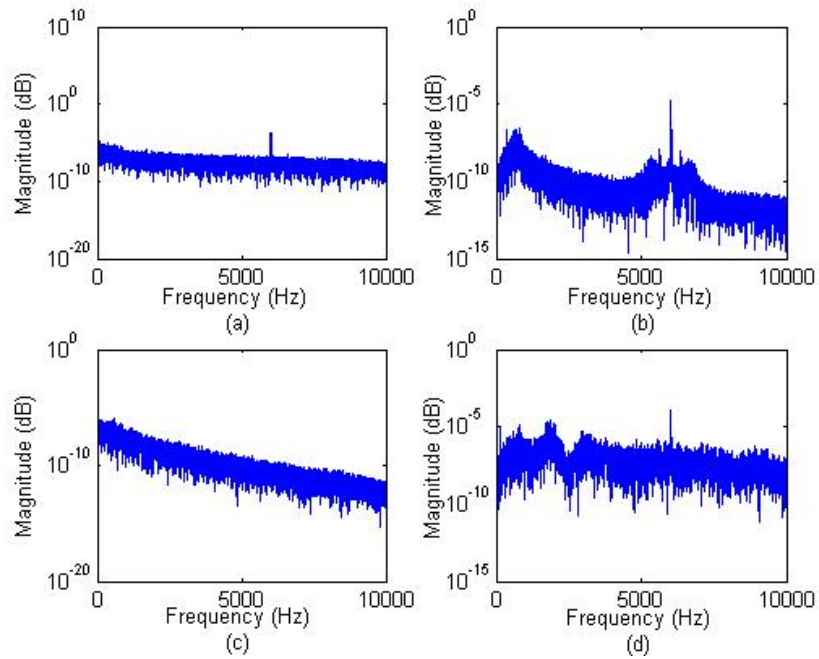


圖 57. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

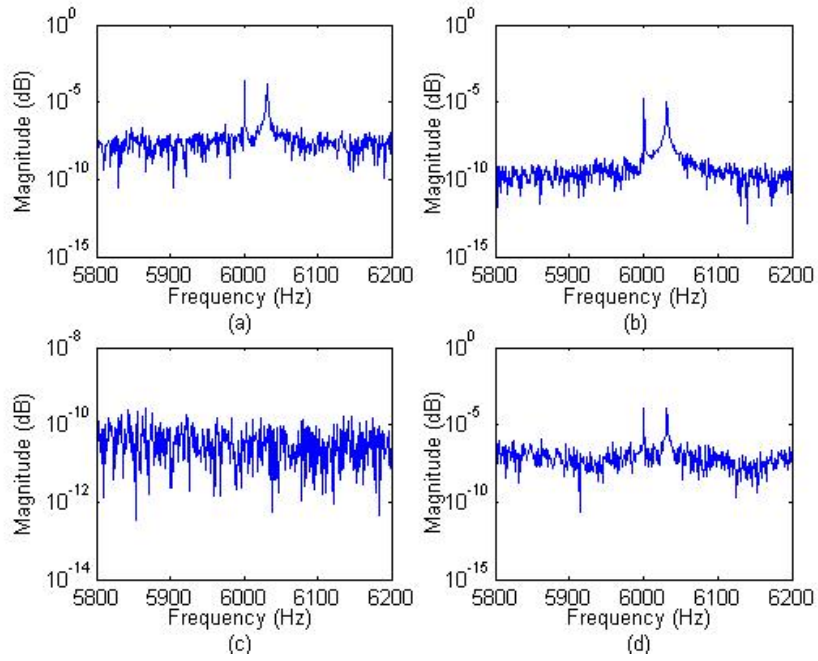


圖 58. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

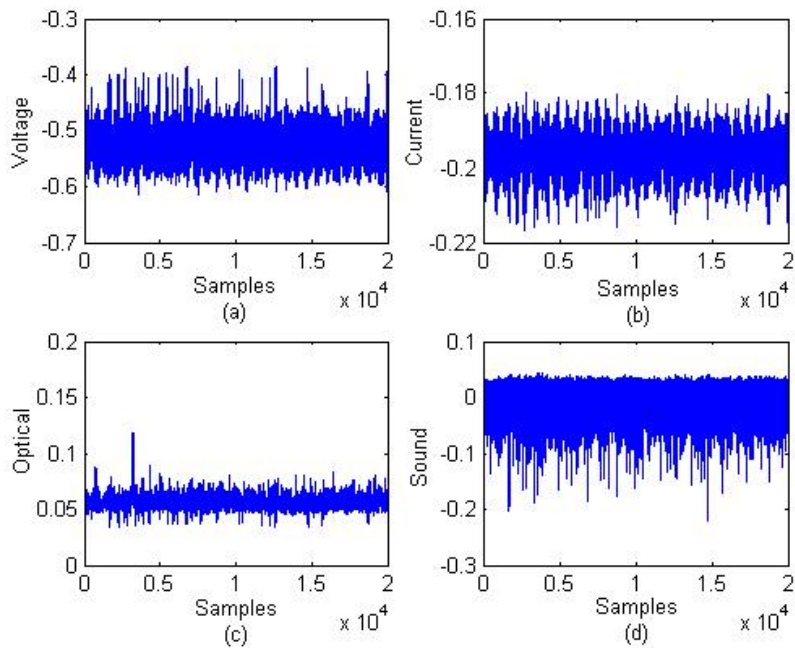


圖 59. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
 (c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

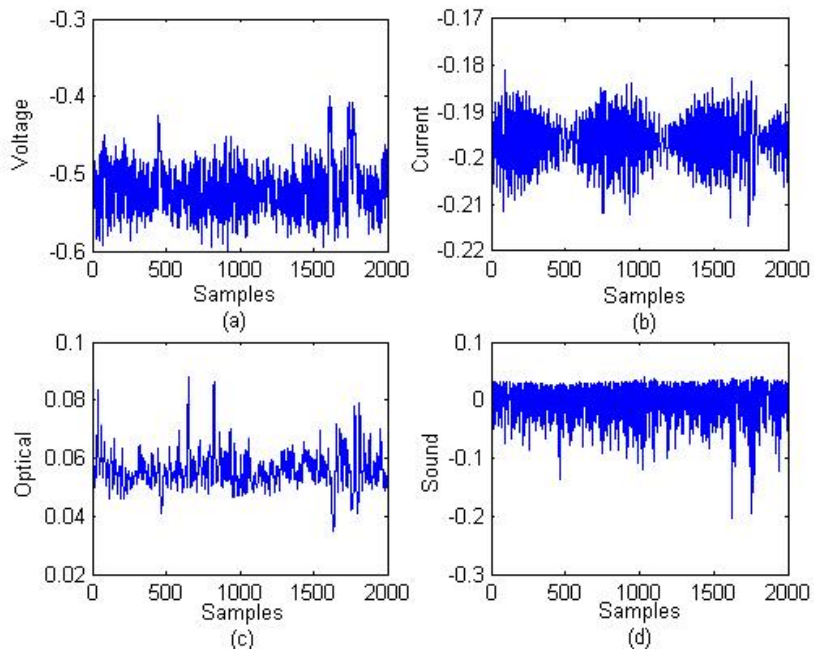


圖 60. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

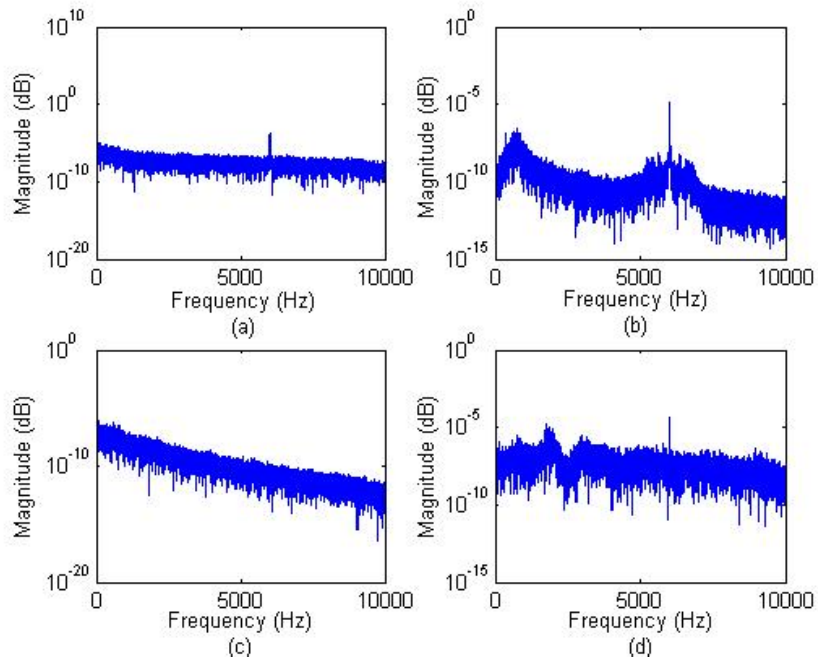


圖 61. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

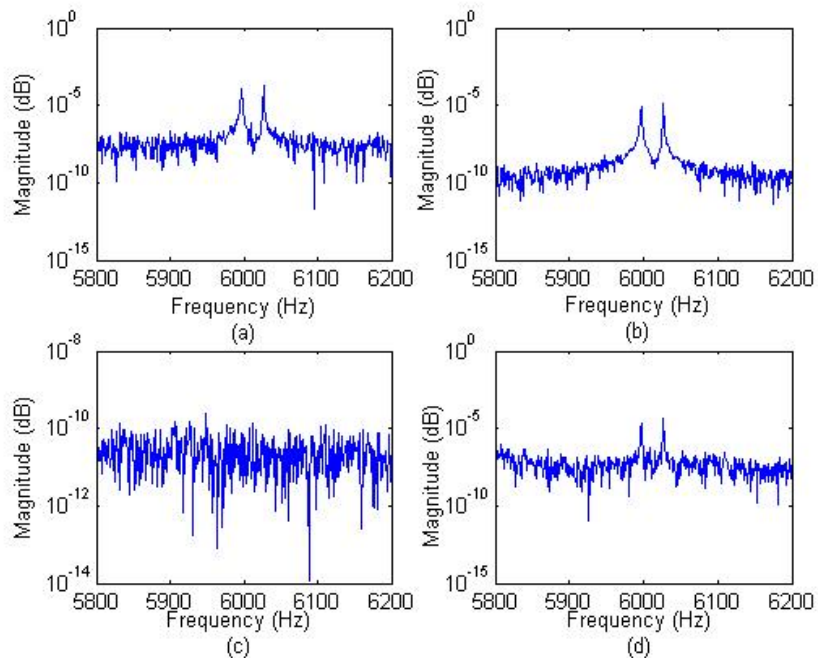


圖 62. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

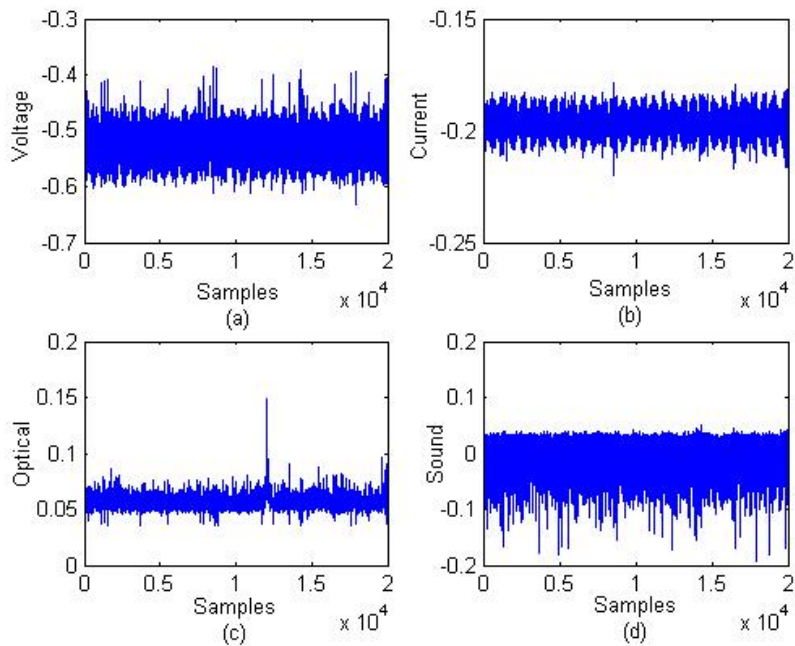


圖 63. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

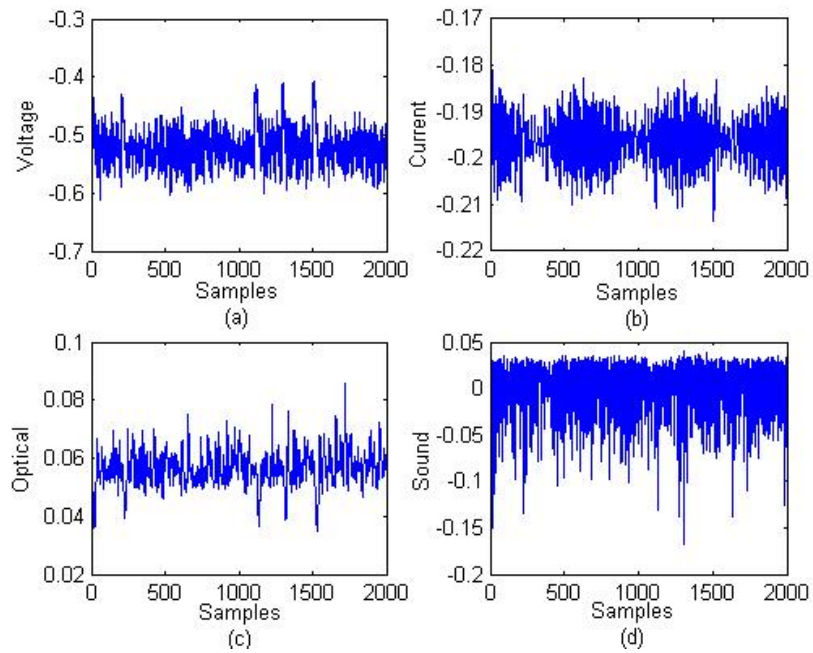


圖 64. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

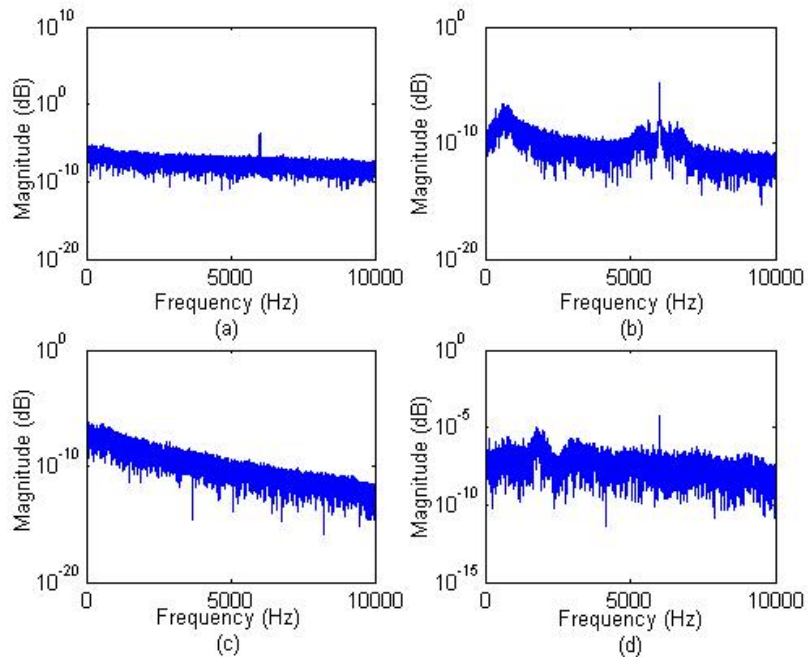


圖 65. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

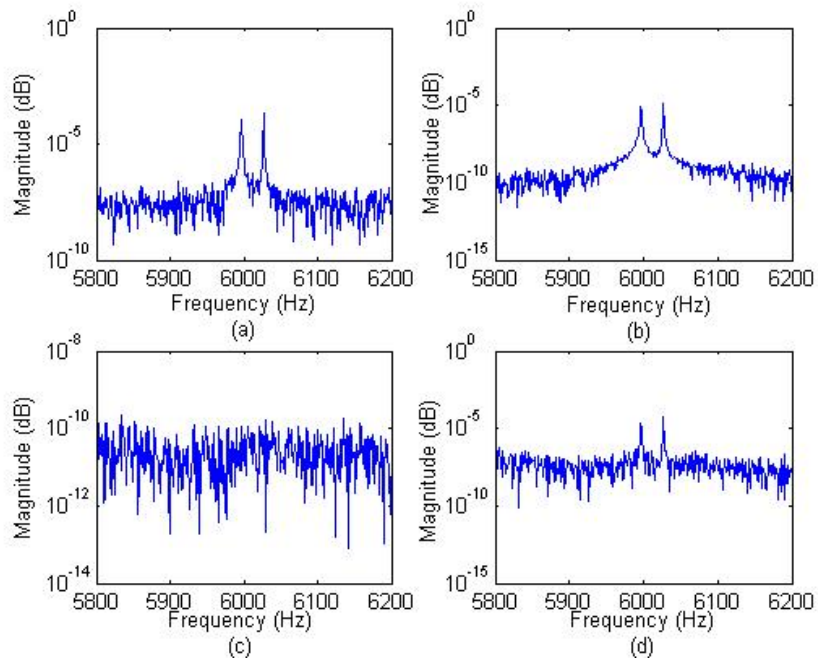


圖 66. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

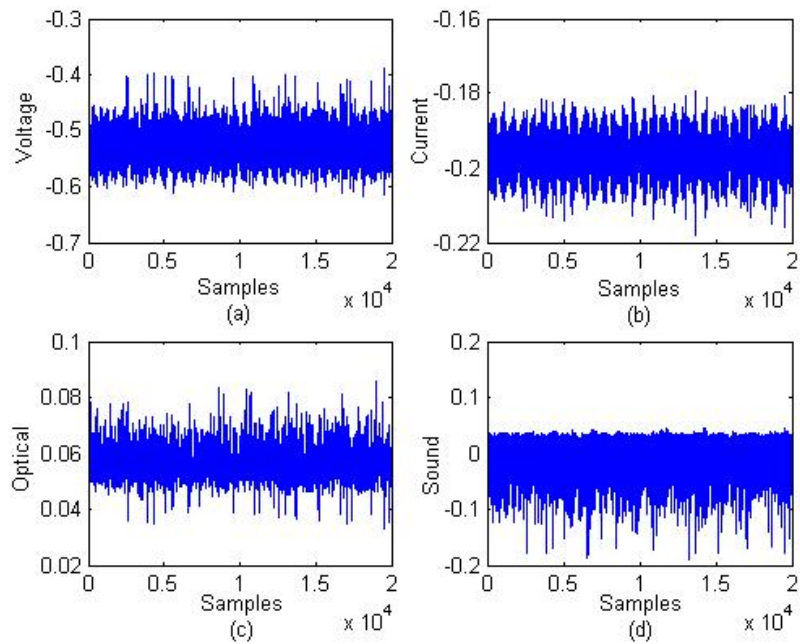


圖 67. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

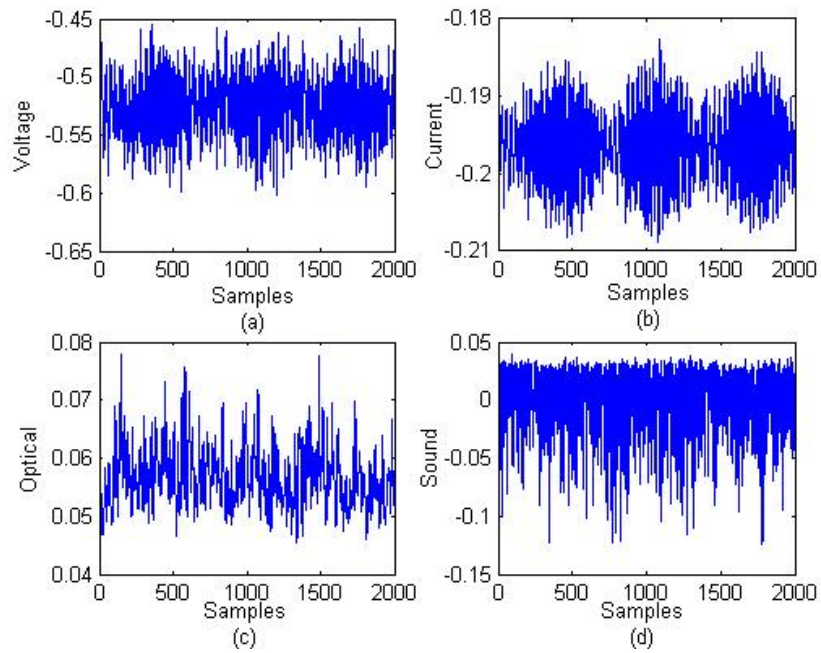


圖 68. (a)電壓之量測數據；(b)電流之量測數據；
(c)光之量測數據；(d)聲音之量測數據

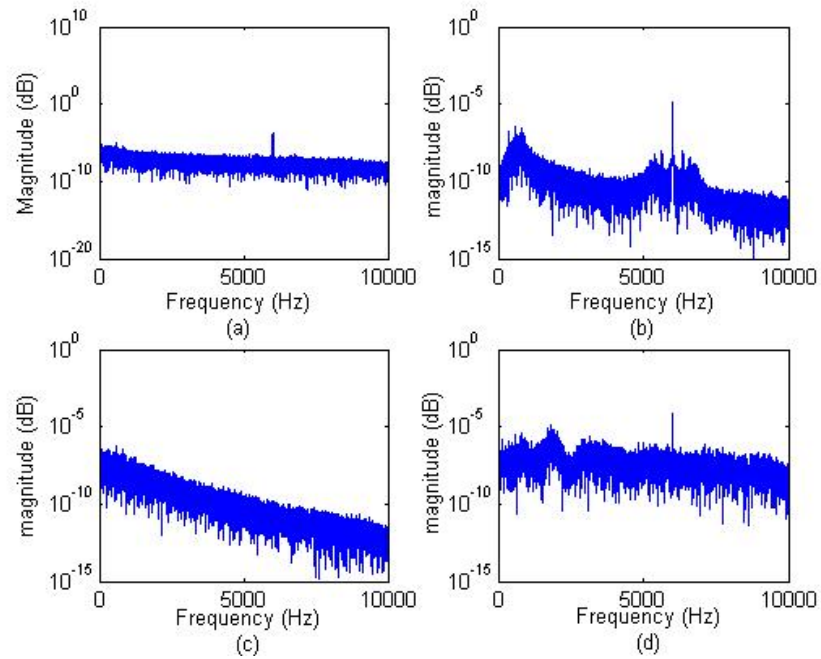


圖 69. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

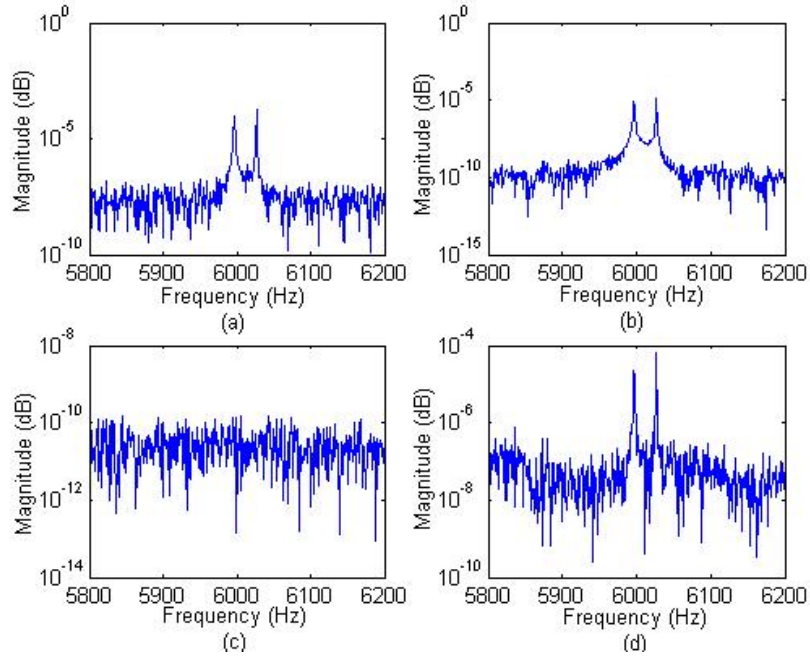


圖 70. (a)電壓之頻譜；(b)電流之頻譜；(c)光之頻譜；(d)聲音之頻譜

2. 探討實驗數據與理論分析之關聯性

為了結合理論分析結果與實驗數據量測，本計畫探討初步實驗數據與理論分析之動態關係，利用定性分析電漿火炬的動態特性。此部分的探討是以(65)為基礎，分析參數 c_0 、 c_1 和 c_2 變化範圍為主要探討依據，藉由實際實驗之數據對應理論分析之分叉圖，找出實際實驗之電漿火炬系統參數可能的參數變化範圍。

由參考文獻獲知，從(65)之非線性振幅方程式參數可以知道關係式

$$c_0 = \frac{\hat{\delta}_1}{\hat{\delta}} = f_1(E, B, T, S, \psi) \quad (72)$$

$$c_1 = \frac{\hat{\delta}_2}{\hat{\delta}} - \frac{\hat{\delta}_3}{\hat{\delta}^2} = f_2(E, B, T, S, \psi) \quad (73)$$

$$c_2 = \frac{\hat{\delta}_4}{\hat{\delta}} - \frac{\hat{\delta}_5}{\hat{\delta}^2} + \frac{\hat{\delta}_6}{\hat{\delta}^3} = f_3(E, B, T, S, \psi) \quad (74)$$

即表示 c_0 、 c_1 和 c_2 為 E 、 B 、 T 、 S 和 stream function ψ 的函數，其中 stream function 與 u 和 w (速度)有關。因此，從(72)-(74)可以判斷當 E 、 B 、 T 、 S 、 u 和 w 有變動時， c_0 、 c_1 和 c_2 都可能發生數值變化。依據上述初步實驗量測之數據分析 (如圖 46~圖 69)，系統應是處於穩定狀態。此一結果與理論分析成果對照，初步推測系統參數可能是操作於圖 1 的 $-25 < \mu < 50$ 之範圍內。其原因為系統分叉圖(圖 1)之穩定區域僅存在 $-25 < \mu < 50$ 之區間內，此次電漿火炬實驗之參數變化可能落於此區間內，即可能為圖 1 的 HB1 延伸至 SB 的軌跡、SB 延伸至 HB2 軌跡或 SB 延伸至 HB3 軌跡之平衡點。另外，由於直流電漿火炬是採用定電流的方式提供電源，初步實驗量測分析圖僅提供一操作點之資料。因此，僅能確定該火炬運轉之參數可能發生在分叉圖的穩定區域內。在未來，我們將規劃較完整的實驗程序而逐步改變電漿火炬之系統參數，將每次的實驗結果對應於理論分析之分叉圖以完成分析與探討電漿火炬可能發生的動態行為，再進一步探討分叉圖上每個區域的參數變化與火炬使用效能及壽命的關聯性。如此一來，我們可以結合實際實驗量測數據所建構之系統特性分叉圖，設計火炬之控制對策以提高電漿火炬的使用效率。

五、電漿火炬混沌現象成因之分析與探討

依據上述之模擬結果，我們找到學者 A. K. Das 沒有探討之區域，也驗證其他參數可能使電漿火炬發生混沌現象的成因。

經由非線性理論和分叉理論之模擬分析，直流電漿火炬可能因分叉參數 Ω_0 或 Ω_1 之改變而造成系統進入混沌區域。因此，我們可以透過圖 1 和圖 18 分叉圖之模擬結果知道系統由穩定狀態改變成一倍週期之振盪行為，隨著分叉參數的改變使振盪行為由一倍週期變成二倍週期，在由二倍週期轉換成四倍到八倍，最後變成混沌振盪行為。由模擬結果可知，只要稍微改變分叉參數會使系統之振盪週期快速由穩定狀態進入混沌行為，甚至使系統狀態發散。電漿火炬之參數變化可能會導致系統發生不可預期的危險；因此，架構適當的監控系統是有其必要的，避免系統因狀態發散而導致損壞或人員受傷。本計畫之分析結果將可以提供相關監控數據之理論基礎，使系統維持在穩定狀態或讓系統直接進入週期振盪。如此一來，我們可以改善電漿火炬的使用週期與運轉效能。

六、混沌信號判斷方法及控制對策

在過去的研究中，電漿火炬之顫動行為被認定為隨機的動態特性，隨機行為是無法透過控制理論加以改善。然而，學者 A. K. Das 提出顫動現象可能為一混沌行為，那電漿火炬可能可以加入控制改善其性能。從上述之分叉圖可以估測系統參數的變化範圍，分叉參數值逐漸改變會導致系統狀態由穩定行為轉變為一倍週期之振盪行為，在由一倍週期依序轉換成二倍週期、四倍週期和八倍週期，最後進入沒有固定週期的混沌現象。因此，建立系統之監測機制是有其必要的，監控系統參數之變化量可以隨時掌握系統的動態行為以及預估可能發生的動態特性。另外，控制對策之規劃方面，混沌現象是一種奇特的動態

行為，系統進入混沌行為時，狀態會呈現有界且不規格之週期變化；這種動態特性會造成無法預估系統之行為，即無法控制。因此，必須在電漿火炬尚未進入混沌行為加入控制對策，先補償系統狀態以避免產生不規則之週期變化。

雖然電漿火炬可以透過控制理論使系統避免進入混沌行為，但直流電漿火炬系統因受限於物理與化學特性而導致部分量測數據不易擷取，且無法精確量測到部分的系統狀態值。如何架設適當的參數量測系統是另外一項重要的課題。深入分析直流電漿火炬之硬體架構發現，以目前之量測技術評估只有電壓和電流之訊號擷取的技術最為成熟。另外，從本計畫實驗數據之分析可知，擷取之電壓和電流量測訊號之特性與聲音訊號雷同，可以觀察到系統的顫動現象，我們可以依據電壓和電流判斷火炬是否發生顫動行為。透過電壓和電流為控制參數可以避免量測誤差值過大或資料擷取困難，達到控制器設計的要求。

七、結論

近年來，電漿裝置已廣泛的應用於工業用途上，但電漿系統仍有許多問題尚待解決，其中弧根的顫動現象是影響電漿裝置使用效能的關鍵問題。直流電漿火炬的顫動現象會造成弧根的抖動而降低電漿火炬的使用性能。過去的研究認為顫動現象為一隨機行為，無法預估與分析系統的動態行為，再加上電漿火炬本身的物理與化學特性相當複雜及實驗數據不易量測，造成不易透過實驗分析顫動現象之動態特性。為了改善電漿火炬內部的顫動行為，本計畫透過非線性理論與分叉理論探討顫動現象發生的成因。然而，文獻已提出電漿火炬之顫動行為可能

是混沌行為，我們以文獻提出之分析理論為基礎，模擬分析系統可能發生的動態行為。本計畫透過非線性理論與分叉理論探討文獻尚未討論的參數區域，模擬驗證混沌現象的發生不僅是文獻提出的單參數變化造成的，系統的其他分叉參數發生變化仍會使系統發生混沌現象。本計畫從模擬結果找出系統可能發生混沌現象的其他因素以及可能產生振盪週期變化的參數範圍。另外，我們也探討更廣的參數範圍，找出使系統穩定的參數區域和系統狀態發散的不穩定區域。此研究成果可提供研究人員開發監控裝置之參考依據，透過監測機制可以避免系統發生不可預期的危險。

在實驗方面，本計畫協助核研所物理組人員建立實驗量測儀器，整理量測儀器的使用規格及提出實驗規劃之建議。我們也透過核研所電漿火炬的實驗平台，量測電壓、電流、光和聲音之實驗數據。經由繪製時間響應圖和頻譜之分析結果可知，電漿火炬在穩態時會產生不規則週期的振盪行為，即是電漿火炬的顫動現象。另外，本計畫依據數據分析圖上的動態特性，發現系統的頻譜會有二個較大振幅的頻率，隨著運轉時間增加造成頻譜會略有改變。依據量測資料之分析結果，本計畫初步推測系統發生頻譜變化可能是因為 PWM 造成的，我們也推斷壓縮機造成漩流也可能發生此種現象，但仍需在擷取其他實驗數據做深入的分析探討。在未來，我們將持續與核研所人員合作操作實驗室之實驗平台，量測火炬使用週期的完整實驗資料，考慮所有可能影響火炬性能的可能原因，將分析結果提供於相關研究人員以改善電漿火炬之使用效率。

本計畫之研究成果已發表一篇研討會論文和投稿一篇期刊論文，詳見參考文獻 41 和 42。在未來，預計將另投稿一篇國際期刊論文。

肆、参考文献

1. M. I. Boulos, P. Fauchais, and E. Pfender, *Thermal Plasmas-Fundamentals and Applications Volume 1*, New York, Plenum Press, 1994.
2. D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, New York, Wiley, 1983.
3. P. H. Coullet, and E. A. Spiegel, "Equations for Systems with Competing Instabilities," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 43, no. 4, pp. 776-821, 1983.
4. M. I. Boulos, F. Pierre, and P. Emil, *Thermal Plasmas*, New York, Plenum Press, 1994.
5. C. C. Tzeng etc., "Treatment of Radioactive Wastes by Plasma Incineration and Vitrification for Final Disposal," *Journal of Hazardous Materials*, vol. 58, pp. 207-220, 1998.
6. H. P. Li, E. Pfender, and X. Chen, "Application of Steenbeck's minimum principle for three-dimensional modeling of DC arc plasma torches," *Journal of Physics D: Applied Physics*, 36, pp. 1084-1096, 2003.
7. http://www.scholarpedia.org/article/Neimark-Sacker_bifurcation#Torus_Bifurcation
8. W. Richard, *Modeling the Non-transferred Arc Plasma Torch and Plume for Plasma Processing*, Massachusetts Institute of Technology, Ph. D Thesis.
9. U. Masao, "Plasma Applications in the Steel Industry in Japan," *Pure & Appl. Chem.*, vol. 64, no. 5, pp. 667-683, 1992.
10. Y. P. Raizer, *Gas Discharge Physics*, Berlin, Springer-Verlag, 1991.
11. H. Min, and H. H. Sang, "Comparative Analysis of Turbulent Effects

- on Thermal Plasma Characteristics Inside the Plasma Torches with Rod- and Well-Type Cathodes,” *Journal of Physics D, Applied Physics*, vol. 35, pp. 1946-1954, 2002.
12. 張家豪, 魏鴻文, 翁政輝, 柳克強, 李安平, 寇崇善, 吳敏文, 曾錦清, 蔡文發, 鄭國川, “電漿源原理與應用之介紹”, *物理雙月刊*, 廿八卷二期, 2006 年 4 月.
 13. S. Ghorui, S. N. Sahasrabudhe, P. S. S. Muryt, A. K. Das, and N. Venkatramani, “Experimental Evidence of Chaotic Behavior in Atmosphere Pressure Arc Discharge”, *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 28, no. 1, pp. 256-260, 2000.
 14. S. Ghorui, S. N. Sahasrabudhe, P. S. S. Muryt, A. K. Das, and N. Venkatramani, “Dynamic Characteristics of a Hollow Copper Electrode Plasma Torch Through Measurement and Analysis of Acoustic, Optical, and Voltage Fluctuations,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 28, no. 6, pp. 2179-2186, 2000.
 15. S. Ghorui, and A. K. Das, “Origin of Fluctuations in Atmospheric Pressure Arc Plasma Devices,” *The American Physical Society*, pp. 026408-1-026408-7, 2004.
 16. S. Ghorui, and A. K. Das, “Theory of Dynamic Behavior in Atmospheric Pressure Arc Plasma Devices: Part I: Theory and System Behavior,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 32, no. 1, pp. 296-307, 2004.
 17. S. Ghorui, S. N. Sahasrabudhe, P. S. S. Murty, and A. K. Das, “Theory of Dynamic Behavior in Atmospheric Pressure Arc Devices: Part II: Validation of Theory with Experimental Data,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 32, no. 1, pp. 308-315, 2004.
 18. J. M. Bauchire, J. J. Gornzalez, and A. Gleizes, “Modeling of a DC

- Plasma Torch in Laminar and Turbulent Flow,” *Plasma Chemistry and Plasma Processing*, vol. 17, no. 4, pp. 409-432, 1997.
19. P. J. Bhuyan, and K. S. Goswami, “Two-Dimensional and Three-Dimensional Simulation of DC Plasma Torches,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 35, no. 6, pp. 1781-1786, 2007.
 20. D.-C. Liaw S. Y. Liu and Y. W. Liang, “Bifurcation analysis of power system,” *In Proc. 16th Symposium on Electrical Power Engineering*, 1995.
 21. D.-C. Liaw S. Y. Liu , Y. W. Liang and K.-H. Fang, “Two-parameter bifurcation analysis of a power system,” *In Proc. 1997 Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications(Nolta’97)*, pp. 1069-1072, 1997.
 22. 李恆毅、曾錦清、張隆國, “模組串並聯式交直流轉換器於電漿火炬直流電源的應用,” *中華民國第二十六屆電力工程研討會*, 台灣, pp. 1941-1945, 2005.
 23. P. J. Bhuyan, and K. S. Goswami, “Two-dimensional and Three-dimensional Simulation of DC Plasma Torches,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 35, no. 6, pp. 1781-1786, 2007.
 24. J. P. Trelles, J. V. R. Heberlein, and E. Pfender, “Non-equilibrium Modelling of Arc Plasma Torches,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40, pp. 5937-5952, 2007.
 25. J. P. Trelles, E. Pfender, and J. V. R. Heberlein, “Modelling of the Arc Reattachment Process in plasma torches,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40, pp. 5635-5648, 2007.
 26. E. H. Abed, H.O. Wang, and R.C. Chen. “Stabilization of Period

- Doubling Bifurcations and Implications for Control of Chaos.” *Phy. D*, vol. 70, no. 1-2, pp. 154-164, 1994.
27. H. C. Lee, “Robust Control of Bifurcating Nonlinear Systems with Applications,” *PhD thesis, University of Maryland at College Park*, 1991.
 28. O. Edward, G. Celso, and A. Y. James, “Controlling Chaos,” *Phy. Review Letters*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199, 1990.
 29. E. H. Abed, and J.H. Fu, “Local Feedback Stabilization and Bifurcation Control, I. Hopf Bifurcation,” *System and Control Letters*, vol. 7, pp. 11-17, 1986.
 30. E. H. Abed, and J.H. Fu, “Local Feedback Stabilization and Bifurcation Control, II. Stationary Bifurcation,” *System and Control Letters*, vol. 8, pp. 467-473, 1987.
 31. D.-C. Liaw and C. C. Song, “Bifurcation Analysis and Control of Longitudinal Flight Dynamics,” *In Proc. IFAC Youth Automation Conf.*, pp. 914-919, 1995.
 32. D.-C. Liaw and E. H. Abed, “Active Control of Compressor Stall Inception: A Bifurcation-theoretic Approach,” *Automatica*, vol. 32, no. 1, pp. 109-115, 1996.
 33. D.-C. Liaw, R. A. Adomatis, and E. H. Abed, “Two-parameter Bifurcation Analysis of Axial Flow Compressor Dynamics,” *In Proc. 1991 ACC*, pp. 2955-2960, 1991.
 34. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, McGraw-Hill, inc. 1989.
 35. D. Gulick, *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill, inc. 1992
 36. T. C. Shinbrot, C. Grebogi E. Ott and J. A. Yorke, “Using Small Perturbations to Control Chaos,” *Nature*, no. 363, pp. 411-417, 1993.
 37. G. Chen and X. Dong, “From Chaos to Order Perspectives and

- Methodologies in Controlling Chaos,” *Int. J. Bifurcation*, no. 3, pp. 1363-1409, 1993.
38. R. Genesio and A. Tesi, “Control Techniques for Chaotic Dynamical Systems,” *Kybernetika*, no. 29, pp. 469-478, 1993.
 39. M. R. E. Proctor and N. O. Weiss, “Normal Forms and Chaos in Thermosolutal Convection,” *Nonlinearity*, no. 3, pp. 619-637, 1990.
 40. H. O. Wang and E. H. Abed, “Bifurcation Control of a Chaotic System,” *Automatica*, vol. 31, no. 9, pp. 1213-1226, 1995.
 41. T. Kavka, O. Chumak and M. Konrad, “Properties of Hybrid Water/Gas DC Arc Plasma Torch,” *IEEE Transaction on Plasma Science*, vol. 34, no. 4, pp. 1566-1575, 2006.
 42. V. Colonbo, A. Concetti, and E. Ghedini, “The Dependent 3D Large Eddy Simulation of a DC Non-transferred Arc Plasma Spraying Torch with Particle Injections,” *Pulsed Power Conference 16th IEEE International*, vol. 2, pp. 1565-1568, June 17-22, 2007.
 43. D.-C. Liaw, S. T. Chang, H. Y. Li, and C. C. Tzeng, “Dynamical Analysis of the Third-Order Nonlinear Systems,” *In Proc. The 2nd Cross-Strait Workshop on Controls, Beijing, China, Oct. 19-26*, pp. 8-12, 2008.
 44. D.-C. Liaw, S. T. Chang, H. Y. Li, H. J. Huang, and C. C. Tzeng, “A Bifurcation Study of the Nonlinear Dynamics in a Rod-Type Plasma Torch,” *Submitted to Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation*, Nov. 6, 2008.