行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

全域最佳化軟體（G-Optimizer）的設計

A Design of a Global Optimization Software

計畫編號：NSC 89-2213-E-009-174
執行期限：89 年 8 月 1 日至 90 年 7 月 31 日
主持人：黎漢林　國立交通大學資訊管理研究所
計畫參與人員：蔡榮發、周家齊、陳姿吟 國立交通大學資訊管理研究所

一、中英文摘要

本研究目的擬設計一在 PC 上使用的套裝軟體”G-Optimizer”，此軟體可求解一般非線性及整數規劃(Nonlinear Optimization)問題而得到全域最佳解(Global Optimum)，本研究主要含兩部分：

第一部分為評估目前常用的全域最佳化方法，再提出一逐段線性演算法（Piecewise Linearization Algorithm）求解一般非線性及整數規劃問題。此演算法可證明能收斂至全域最佳解。

第二部分為依此演算法發展 G-optimizer，此軟體係架構在 LINGO（為 PC 上最常使用的最佳化軟體）上。一般 LINGO 使用者可附加此軟體後即直接算得全域最佳解。

關鍵詞：全域最佳化、非線性及整數規劃

Abstract

This study intends to design a PC-based software “G-Optimizer” which can build the global optimum for general nonlinear and integer programming problems. The first part of this proposal will review current global optimization methods then formulate a piecewise linearization algorithm which could be proven to converge to a global optimum. The second part of this proposal is to design “G-Optimizer” based on the above algorithm. G-Optimizer is built following the framework of LINGO (a most widely used PC-based optimization tool). A LINGO user could directly obtain the global optimum of general nonlinear program by utilizing G-Optimizer.

Keywords: global optimum, nonlinear and integer programming

二、緣由與目的

非線性規劃(NP)及整數規劃(IP)問題在工程與管理上的應用十分寬廣，目前求解這類問題常用的軟體有：LINGO，AMPL，GAM，MATLB，SAS，EXCEL。其中又以 LINGO 的使用最為普遍。這些軟體在求解 NP 及 IP 問題上常遇及的問題為：

1、對 NP 問題只能得到局部最佳解 (Local Optimum)。

2、對 IP 問題只能處理 Linear Form 而不易處理 Nonlinear Integer Programs。

就第一個問題言，過去評量最佳化軟體的準則，多以解題速度為主。但隨著電腦解題速度的進步，解題品質已愈形重要。使用者已不能滿足於現有軟體的只能求得局部最佳解。就第二個問題言，由於 Nonlinear Integer Problems 在工業工程與機械的使用日益普遍，故現有軟體已不敷需求。Optimization 軟體在業界及學界的市場甚大。單以 LINGO 而言，其在全球學界的發行套數即超過十萬套，每年並有更新版推出，其每年產值超過一億美金。隨著管理與工程科學的日趨精緻，對 Optimization 軟體的需求將更擴大。

本研究的目的即在發展一 Global Optimization 軟體。此軟體的特色為：

1、能求解一般 NP 問題得到全域最佳解。

2、能處理 Nonlinear Integer Programs。

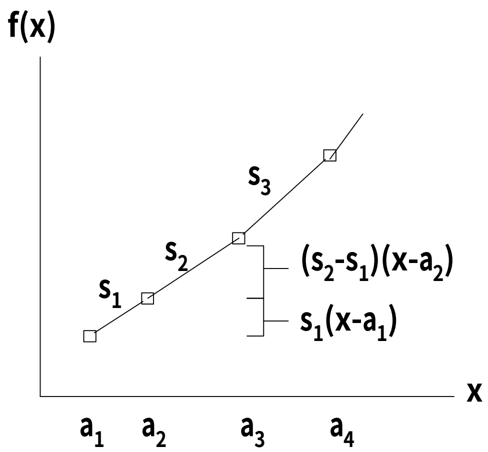
在 PC Windows 上運算。

本研究發展一新方法以具備前述功能。

目前相同的理論準備工作多已次第完成，部份類型的檢測結果亦多正確。本研究擬一方面對理論部份再予深究，另一方面即為軟體的設計。同時亦會將現有文獻上的各類 NP **及** IP **問題建為題庫，再予測解之以確保軟體之正確與穩定。**

三、結果與討論

Let $f(x)$ be the piecewise linear function of x, as depicted in Figure 1, where a_i, $i=1,2,...,n$ are the break points of $f(x)$, and s_i, $i=1,2,...,n$ are the slopes of line segments between a_i and a_{i+1}. $f(x)$ can be expressed as the sum of absolute terms:



$$f(x)=a_1+s_1(x-a_1)+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{s_i-s_{i-1}}{2}(|x-a_i|+x-a_i)$$

Figure 1

This proposition can be examined as follows:

(i) If $x=a_1$ then $f(x)=f(a_1)$.

(ii) If $x\le a_2$ then

$$f(x)=f(a_1)+\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1)$$
$$=f(a_1)+s_1(x-a_1)$$

(iii) If $x\le a_3$ then

$$f(x)=f(a_1)+s_1(x-a_1)+s_2(x-a_2)$$

$$=f(a_1)+s_1(x-a_1)-s_1(x-a_2)+s_2(x-a_2)$$

$$=f(a_1)+s_1(x-a_1)+\frac{s_2-s_1}{2}(|x-a_2|+x-a_2).$$

By referring to Figure 2, 3,and 4 below, a posynomial term $z=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ where x_i ($i=1,2,...,n$) are positive variables, $0<a_{i1}\le x_i\le a_{im_i}$, can be approximately expressed as $\hat{z}$ below

$$\hat{z}=e^{b_1}+s_1(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln\hat{x}_i-b_1)+$$
$$\sum_{j=2}^{m}\frac{s_j-s_{j-1}}{2}(\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln\hat{x}_i-b_j\right|+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln\hat{x}_i-b_j)$$

where $b_1,b_2,...,b_m$ are the break points of the function $\ln z$, s_j are the slopes of line segments between b_j and b_{j+1}; and $\ln\hat{x}_i$ is the linear approximation of $\ln x_i$, expressed as

$$\ln\hat{x}_i=\ln a_{i1}+t_{i1}(x_i-a_{i1})+$$
$$\sum_{l=2}^{m_i}\frac{t_{il}-t_{i,l-1}}{2}(|x_i-a_{il}|+x_i-a_{il})$$

in which $a_{i1},a_{i2},...,a_{im_i}$ are the break points of the function, and t_{il} are slopes of line segments between a_{il} and $a_{i,l+1}$.

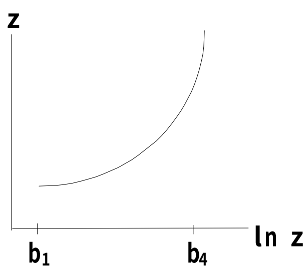


Figure 2

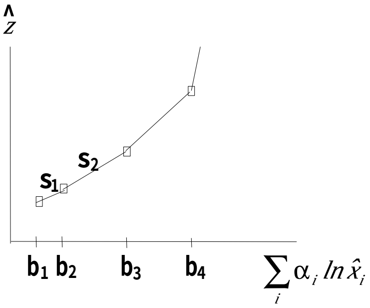


Figure 3

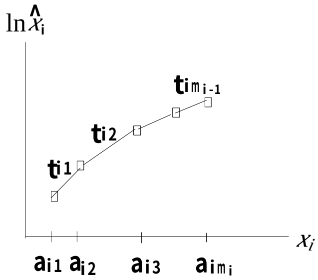


Figure 4

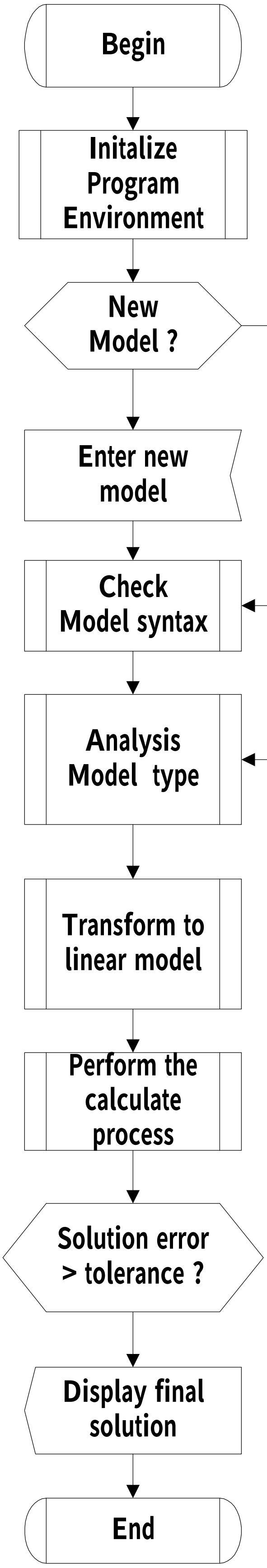


Figure 5 Flowchart of the process

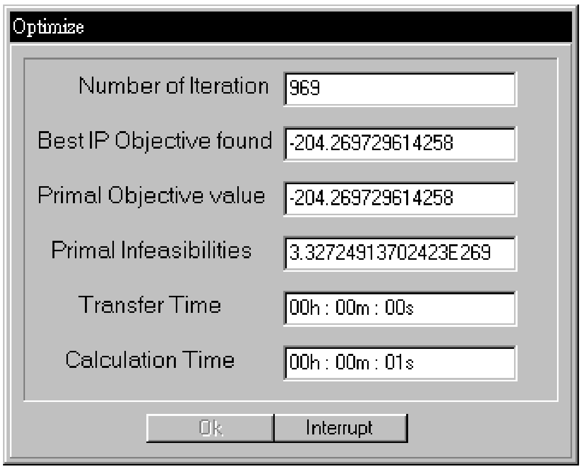


Figure 6 Display the calculating process

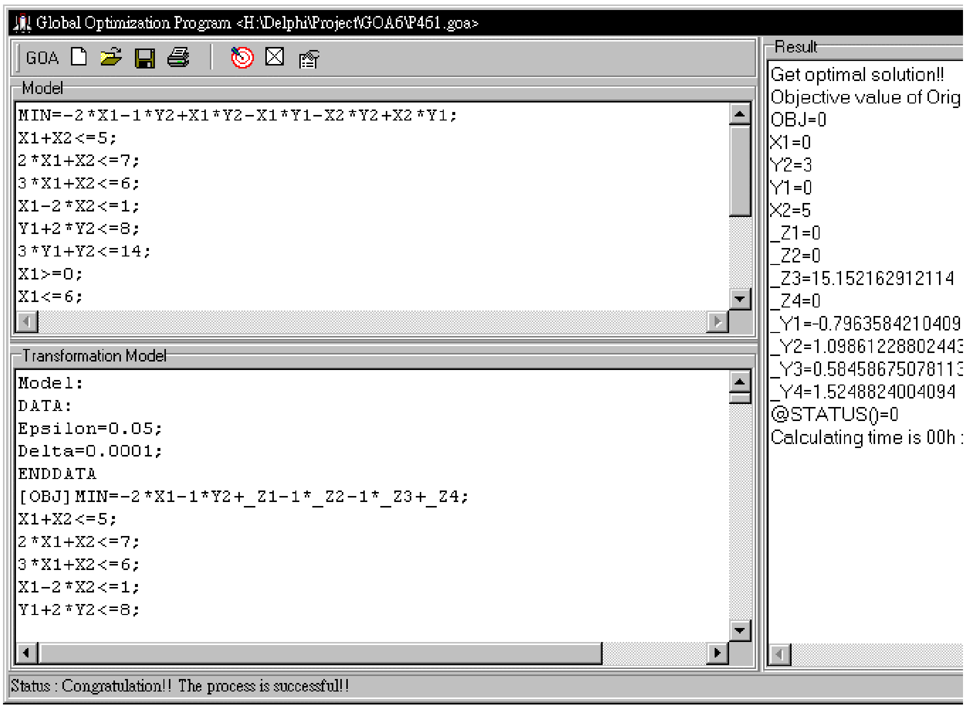


Figure 7　Display the transformed model and the result

四、計畫成果自評

1、以文獻上相近的例子，測試與驗證所發展求解線性與非線性的轉換方法與近似全域最佳解的方法。
2、修正與進階改良求解線性與非線性之間的轉換方法與近似全域最佳解的方法。
3、求解一般 Nonlinear Integer Problems 且得到全域最佳解。
4、協助與訓練博、碩士班研究生完成論文寫作。
5、將學術研究成果投稿國際知名期刊。
6、將研究結果綜合目前廣為大家使用的數學軟體（LINGO），自行開發一套求解全域最佳化之軟體。

五、參考文獻

[1] Costas D. Maranas and Christodoulos A. Floudas, ”Global Optimization in Generalized Geometric Programming”, Computer chem. Engng. Vol.21, No.4, pp. 351-369, 1997.

[2]Christodoulos A. Floudas ,Deterministic Global Optimization: Theory, Methods and (NONCONVEX OPTIMIZATION AND ITS APPLICATIONS), 1999.

[3]Floudas , C.A. et al. (1999) ,Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization , kluwer Academic Publishers Netherlands.

[4]Floud as, C.A. (1995) , Nonlinear and Mixed Integer Optimization : Fundamentals and Applications. Oxford University Press , New York.

[5] Horst , R. and Hoang Tuy (1990) , Global optimization , Springer – Verlag , Berlin.