

# 有限圓柱間的調制渦旋流

## Modulated Vortex Flow Between Finite Cylinders

計畫編號：NSC 89 - 2212 - E - 009 - 023

執行期限：88/08/01 - 89/07/31

主持人：楊文美 國立交通大學機械工程研究所

### 一、中文摘要

本文以數值方法探討有限圓柱間調制流場及其穩定性，數值方法採用 Adams-Bashforth 法將統御方程式中的非線性項離散化，線性項採用 Crank-Nicolson 法處理。以 Chebyshev polynomial 雙重級數展開模擬速度和壓力，離散方程式以定置法 (collocation method) 轉換為一組代數方程式，最後再以 LU decomposition 法將各個係數求出。

從吾人的結果中得知，當內管以高頻調制旋轉時，臨界雷諾數趨近於非調制旋轉時的臨界雷諾數，隨著頻率的降低，臨界雷諾數的偏移量逐漸增大，在極低頻時，臨界雷諾數趨近  $Re_c/(1+\epsilon)$ 。當長距比大於 4 時，非調制流場的臨界雷諾數趨近 68，與前人以實驗分析無限長圓管間非調制泰勒渦旋流所得之臨界雷諾數相當接近；調制流場的臨界雷諾數對調制頻率之關係亦隨長距比增加而趨近無限長距比之結果。

關鍵詞：調制，分歧，有限圓柱

### Abstract

The flow and its stability between finite cylinders are studied numerically. Axisymmetric flow is considered and the governing equations are solved by the Adams-Bashforth method for the nonlinear terms and Crank-Nicolson method for the linear terms. The Chebyshev polynomials are employed to simulate the primitive variables and the collocation method is used to discretize the equations.

The results show that when the inner cylinder rotates with a high frequency, the critical Reynolds number tends to the value of nonmodulating case. As the frequency decreases the critical Reynolds number

approaches  $Re_c/(1+\epsilon)$ . When the aspect ratio is greater than 4, the critical Reynolds number for the nonmodulating case approaches to 68 which is close to the experimental results. The relation between the critical Reynolds number and the frequency also tends to the result of infinite aspect ratio.

Keywords: Modulation, Bifurcation, Finite Cylinders

### 二、計畫緣由與目的

自從 Taylor [1] 以實驗及理論分析證明兩同心圓管間之一維流動在超過臨界轉速時會轉變為二維的環形圓狀 (toroidal rolls) 流動，也就是所謂的泰勒渦旋流 (Taylor vortex flow)，此後各種有關兩同心圓管間流體穩定性的問題便一直被研究著。

有關非調制旋轉圓管間流場的研究，Donnelly [2] 以及 Donnelly 和 Simon [3] 考慮外圓管靜止，內圓管以等轉速旋轉，利用流場在發生不穩定前後扭矩的變化率會隨著不同形式流場改變的原理，量測流體作用在圓管上扭矩 (torque) 的變化來找出不穩定發生時的臨界雷諾數  $Re_c$ 。Davey [4] 利用數值方法計算扭矩值的大小，得到的結果與 Taylor [1] 及 Donnelly [2] 的實驗值吻合。Eagles [5] 也以與 Davey [4] 相似的方法得到相同的扭矩值。Cole [6] 有鑑於大多數理論研究都是假設圓管長度為無限長，而實際的實驗設備不可能達到，因此針對有限長度的同心圓管，以實驗方式探討圓管長度對流場穩定性的影響，其研究發現：除非長距比 (aspect ratio  $\Gamma=L/d$ ) 小於 8，否則管長對流場的穩定性影響不大，當長距比  $\Gamma \geq 40$  時，則與無限長之理論值非常接近。

有關調制旋轉圓管間流場的研究，Donnelly et al. [7] 及 Donnelly [8] 首先以實驗方法來探討當外圓管靜止，內圓管做週期性轉動，圓管間庫耶流受調制轉動的影響，結果發現在高頻時流場較非調制作用時更不穩定，而在一中頻範圍時有最佳的穩定性。此一結果，提供吾人一個新的研究方向，去進一步瞭解當流場受到調制作用時會

有何影響?在此,吾人定義偏移量(threshold shift)  $\Delta=(Re_c-Re_0)/Re_0$ ,其中 $Re_c$ 為調制作用下的臨界雷諾數,而 $Re_0$ 為定轉速時的臨界雷諾數,由 $\Delta$ 的正或負可知調制作用會使流場更穩定或更不穩定。

回顧前人對兩同心圓管間流場的研究,在非調制旋轉部份,不論在數值計算或實驗上都已相當完整。但在有關調制旋轉方面的研究,對於低頻時流場不穩定化的大小仍存在著不同的看法。吾人認為前人以數值方法考慮兩上下端無限長之同心圓管和實際實驗上的有限圓柱並不符合,因而產生在低頻時流場會有大、小不穩定化的不同看法。因此本文針對有限圓柱間的調制流場,以數值的方法來考慮在不同的上下邊界條件、長距比及頻率之下,調制流場的變化情形。

### 三、研究方法及成果

本文中所探討之物理模型如圖1所示,兩有限長之垂直同心圓管,高度與間距分別為 $L$ 與 $d$ ,其間充滿黏滯性流體, $R_1$ 及 $R_2$ 分別表示內外圓管之半徑,其半徑比定義為 $\gamma=R_1/R_2$ ,長距比定義為 $\Gamma=L/d$ ,內外圓管以下列的調制模式轉動:

$$V_1=R_1\Omega_1(1+\varepsilon_1\cos S^*t)$$

$$V_2=R_2\Omega_2(1+\varepsilon_2\cos S^*t)$$

其中 $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$ 和 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 分別為內外圓管的平均角速度和調制振幅, $S^*$ 為調制頻率。對於有限圓柱間的調制流場,除調制振幅、頻率及半徑比、長距比為其重要參數外,上下端的邊界條件亦影響流場的行為,本文中考慮下列兩種不同型式的邊界條件:(I)邊界與內管相接;即邊界與內管以相同的調制模式轉動。(II)邊界與外管相接;即邊界與外管以相同的調制模式轉則無因次化後之統御方程式表示如下,

連續方程式(continuity equation):

$$\frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} (XU) + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

動量方程式(momentum equations):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{V^2}{X} \\ = -\frac{\partial P}{\partial X} + \left(\Delta - \frac{1}{X^2}\right)U \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{X} \\ = \left(\Delta - \frac{1}{X^2}\right)V \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \\ = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \Delta W \end{aligned} \quad (4)$$

上式中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$ 。邊界條件

(boundary conditions)分述如下:

(I)邊界與內圓管相接:

$$X = \frac{\gamma}{1-\gamma}: U=W=0, V=Re_1(1+\varepsilon_1\cos\mu t)$$

$$X = \frac{1}{1-\gamma}: U=W=0, V=Re_2(1+\varepsilon_2\cos\mu t) \quad (5)$$

$$Z = \pm \frac{\Gamma}{2}: U=W=0, V = \frac{(1-\gamma)X}{\gamma} Re_1(1+\varepsilon_1\cos\mu t)$$

(II)邊界與外圓管相接:

$$X = \frac{\gamma}{1-\gamma}: U=W=0, V=Re_1(1+\varepsilon_1\cos\mu t)$$

$$X = \frac{1}{1-\gamma}: U=W=0, V=Re_2(1+\varepsilon_2\cos\mu t) \quad (6)$$

$$Z = \pm \frac{\Gamma}{2}: U=W=0, V = (1-\gamma)X Re_2(1+\varepsilon_2\cos\mu t)$$

為了以圖形表示流場分佈,定義無因次化的流線函數 $\mathcal{L}$ (stream function)如下:

$$U \equiv -\frac{1}{X} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z}, \quad W \equiv \frac{1}{X} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$$

$$\text{則 } \mathcal{L}(X, Z, \tau) = -X \int_{Z_0}^Z U dZ + \mathcal{L}_0$$

$$\text{或 } \mathcal{L}(X, Z, \tau) = \int_{X_0}^X X W dX + \mathcal{L}_0$$

其中 $\mathcal{L}_0$ 為常數,沿著邊界時為零。

將(1)~(4)式加以離散化,連續方程式中各項均以implicit method表示,動量方程式中線性項部份除壓力項採用implicit method外,其它均使用Crank-Nicolson method處理,非線性項的部份則採用Adams-Bashforth method處理,並以契比希夫多項式(Chebyshev polynomials)雙重級數展開流場中的速度與壓力,而其展開項之係數為時間函數。

$$U(\langle, \prime, t) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_{mn}(t) \Phi_m(\langle) \Psi_n(\prime) \quad (7)$$

$$V(\langle, \prime, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn}(t) T_m(\langle) T_n(\prime) \quad (8)$$

$$W(\langle, \prime, t) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} c_{mn}(t) \Phi_m(\langle) \Psi_n(\prime) \quad (9)$$

$$P(\langle, \prime, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn}(t) T_m(\langle) T_n(\prime) \quad (10)$$

其中 $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  為未知係數, 而 $\Phi_m, \Psi_n$  分別為滿足徑向與軸向速度邊界條件之基底函數, 表示如下:

$$\Phi_m(\zeta) = T_m(\zeta) - \left[1 - (-1)^m\right] \frac{T_1(\zeta)}{2} - \left[1 + (-1)^m\right] \frac{T_o(\zeta)}{2}$$

$$\Psi_n(\zeta) = T_n(\zeta) - \left[1 - (-1)^n\right] \frac{T_1(\zeta)}{2} - \left[1 + (-1)^n\right] \frac{T_o(\zeta)}{2}$$

將(7)、(9)及(10)式中模擬徑向速度分量多項式(U)、軸向速度分量多項式(W)及壓力多項式(P)分別取 $M \times N$ 項, 代入離散方程式中, 在徑向與軸向分別以定置法處理; 徑向定置點取為

$$\zeta_i = \cos\left(\frac{i\mathcal{f}}{M+1}\right), \quad i=1, 2, \dots, M$$

軸向定置點取為

$$\zeta'_j = \cos\left(\frac{j\mathcal{f}}{N+1}\right), \quad j=1, 2, \dots, N$$

如此可將原來的統御方程式轉換為代數方程式, 以矩陣表示如下:

$$\tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{Y}}^{i+1} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{Y}}^i + \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{Y}}^{i-1} \quad (11)$$

相同地, 將(8)式中模擬切線方向速度分量之多項式(V)取 $(M+2) \times (N+2)$ 項, 代入離散方程式中, 在徑向與軸向分別以定置法處理; 徑向定置點取為

$$\zeta_i = \cos\left[\frac{(i-1)\mathcal{f}}{M+1}\right], \quad i=1, 2, \dots, M+2$$

軸向定置點取為

$$\zeta'_j = \cos\left[\frac{(j-1)\mathcal{f}}{N+1}\right], \quad j=1, 2, \dots, N+2$$

如此可將切線方向的離散方程式轉換為代數方程式, 以矩陣表示如下:

$$(\tilde{\mathbf{e}}_{m,n})_{i,j}^{33} \tilde{\mathbf{B}}_{mn}^{i+1} = [(\tilde{\mathbf{f}}_{m,n})_{i,j}^3]^i + [(\tilde{\mathbf{g}}_{m,n})_{i,j}^3]^i \quad (12)$$

上式中當定置點(collocation point)在邊界時, 則以邊界條件代入矩陣方程式中。

最後利用LU decomposition法解矩陣方程式(11)和(12), 逐步地將係數 $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  解出, 當圓管以等速旋轉時, 收斂條件為任一未知係數前後兩次的差值與後一次的絕對比值小於 $10^{-4}$ 視為收斂, 將達到收斂條件的係數代回, 可求出每一時間間隔的速度及壓力變化量。若圓管以週期性旋轉, 選定流場中一觀測點上的切線速度在一週期中最大值發生的時間, 經過一週期後, 與前一週期之值相差小於 $10^{-4}$ 時, 視為收斂結果。

#### 四、結果與討論

對於非調制流場穩定性的探討, 本文考慮半徑比 $\gamma=0.5$ , 外圓管靜止, 探討 $\Gamma=2, 3, 4, 6$ 及 $8$ 等幾種不同的長距比對穩定臨界值的影響。由

圖2得知: 長距比愈小( $\Gamma < 4$ ), 其臨界雷諾數愈大, 代表流場愈穩定; 當長距比大於4時, 臨界雷諾數趨近 $68 \pm 1$ , 這與Diprima & Eagles(1977)分析無限長距比所得之結果 $68.18$ 相當接近。

有關調制流場的部份, 為了和前人的研究結果比較, 本文考慮半徑比 $\gamma=0.4833$ , 外圓管靜止, 內圓管振幅為1, 轉速為 $Re(1 - \cos \omega t)$ 的週期型式轉動。

##### 1. 頻率對調制流場的影響:

圖3為上下邊界與外管相接, 長距比為4, 外管固定, 內管在不同的調制頻率下所對應的偏移量大小, 並與胡勝智(1996)之實驗、韓瑞忠(1996)之數值計算及楊慶泰(1995)之線性理論計算結果比較。在極高頻時, 各組之偏移量皆趨近於0, 也就是臨界雷諾數趨近無調制作用時的臨界雷諾數。隨著調制頻率的降低, 偏移量向負值逐漸增加, 此說明了在低頻時調制旋轉對流場有不穩定化的作用。隨著調制頻率降低至極低頻時, 偏移量趨近於某一定值( $\Delta \rightarrow -0.441$ )。根據Davis(1976)對無限長距比的理論分析, 在極低頻時臨界雷諾數會趨近擬靜態極限(quasi-steady limit) $Re_c \rightarrow Re_c / (1 + \epsilon)$ , 或偏移量 $\Delta \rightarrow -\epsilon / (1 + \epsilon)$ , 應用於本文其結果( $\Delta \rightarrow -0.5$ )與本文數據( $\Delta \rightarrow -0.441$ )有些微的差距, 其間的差距乃因本文考慮長距比 $\Gamma=4$ 與Davis(1976)的無限長距比不同。

##### 2. 邊界對調制流場的影響:

圖4為考慮長距比為4, 在不同的邊界條件下, 調制頻率與偏移量的關係。在高、低頻時, 調制流場在上下邊界與內管相接條件下較穩定, 在某一中頻範圍內, 調制流場在上下邊界與外管相接條件下較穩定, 且邊界與內管相接條件下所得曲線較接近以線性理論計算之結果。

##### 3. 長距比對調制流場的影響:

圖5為上下邊界與內管相接, 長距比為4及8, 偏移量和頻率的關係。由圖中可看出在高頻時,  $\Gamma=8$ 之圓管其調制流場的穩定性較大, 隨著頻率的下降,  $\Gamma=8$ 之圓管其穩定性也逐漸下降; 在低頻時 $\Gamma=4$ 反而穩定性較大。和線性理論考慮長距比為無限的情況比較, 長距比大於4, 臨界雷諾數的變化已很小且趨近長距比為無限的結果。

#### 五、參考文獻

1. Taylor, G. I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philos Trans. R. Soc. London A* **233**, 289-343.
2. Donnelly, R. J. 1958 Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders I. Torque measurement. *Proc. Roy. Soc. London A* **246**, 312-325.
3. Donnelly, R. J. and Simon, N. J. 1960 An empirical torque relation for supercritical flow

between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* **7**, 401-418.

4. Davey, A. 1962 The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* **14**, 336-368.
5. Eagles, P. M. 1974 On the torque of wavy vortices. *J. Fluid Mech.* **62**, 1-9.
6. Cole, J. A. 1976 Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *J. Fluid Mech.* **75**, 1-15
7. Donnelly, R. J. , Reif, F. and Suhl, H. 1962 Enhancement of hydrodynamic stability by modulation. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 363-365.
8. Donnelly, R. J. 1964 Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders III. *Proc. Roy. Soc. London A* **281**, 130-139.

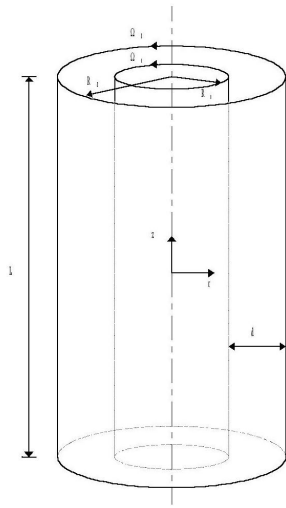


圖1 物理模式示意圖

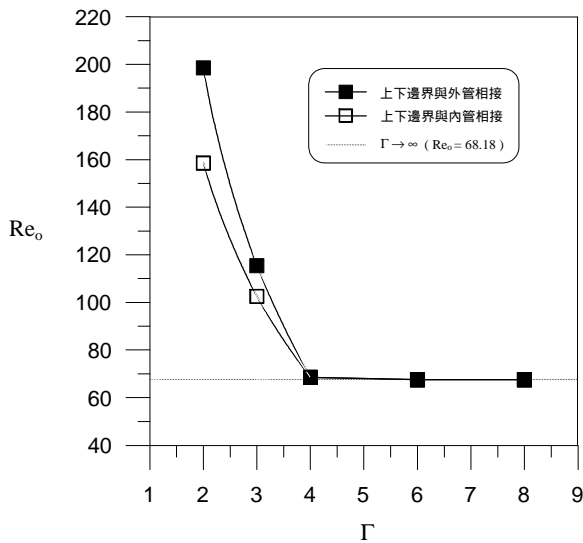


圖2 不同上下邊界條件下，臨界雷諾數與長距比之關係( $\nu=0.5$ )

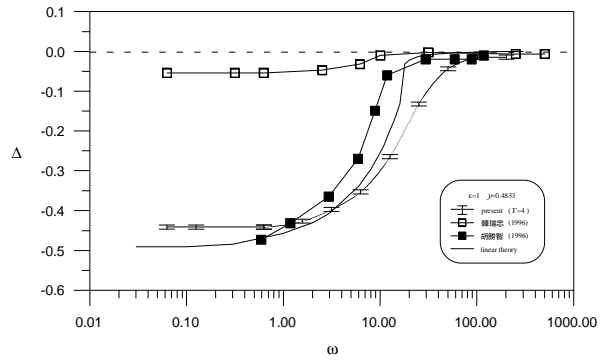


圖3 上下邊界與外管相接，內管在不同調制頻率下之偏移量

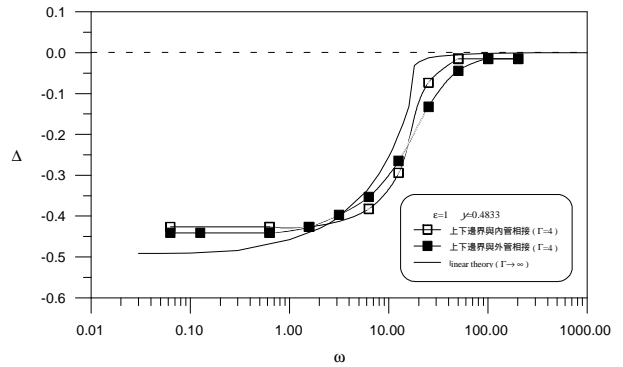


圖4 對不同的上下邊界條件，偏移量與頻率之關係

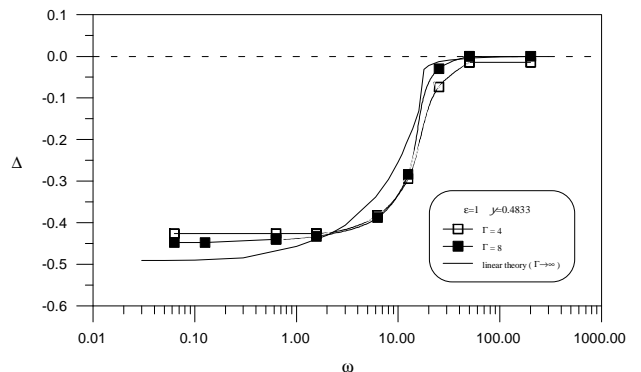


圖5 上下邊界與內管相接時，對不同長距比，偏移量與頻率之關係