

攔截飛彈的中途導引與控制

林世修¹，林清安²
交通大學電機系¹，交通大學電機系²

摘要

本文探討攔截飛彈之中途導引律以及相關的推力向量控制系統設計。中途導引律透過剩餘飛行時間(time-to-go)及預測攔截點(predicted interception point)的估算來決定速度向量的修正量。飛彈的剩餘飛行時間與飛彈及目標的未來速度及相對距離有關，因此很不容易準確計算。本文利用誤差修正法，針對非加速目標，提出剩餘時間的估算法。計算簡單且其準確度隨著飛彈與目標的接近逐漸提高，預測攔截點及速度修正量的計算也因此愈趨準確。飛行方向的改變，即速度的修正，是透過推力向量控制系統(thrust vector control system)改變飛彈的姿態(attitude)來達成。本文提出簡單的控制系統設計。六自由度模擬顯示本文所提出的導引律及控制系統能在中途導引階段將數十公里的誤失距離，降低至數十公尺，滿足終端導引的條件。動態模擬的程式利用 Matlab/Simulink 軟體發展，包括飛彈的物性氣動力和六自由度運動方程式，標準大氣重力模式以及目標三自由度運動方程式。

關鍵字：飛彈防禦，中途導引律，剩餘飛行時間，推力向量控制。

一、前言

攔截來襲的彈道飛彈是工程上的一大挑戰。由於速度快飛行的時間短，目前的防禦飛彈均採彈頭直接擊中目標的策略，也因此容許的誤失距離(miss distance)僅數十公分。由於目標鎖定之後的終端導引階段維持僅數秒，能夠降低的誤失距離相當有限，成功的攔截有賴準確有效的中途導引及控制。中途導引律的設計在文獻上有許多討論，大部分的探討將中途導引的問題形成為最佳控制的問題如[9]，[10]，其導引律通常需要求解兩個邊界值問題(two-point boundary value problem)來決定，因此在實際實現上相當困難。本文提出的導引律從實際計算的可行性考慮，目的在降低中途導引結束後的零力誤失距離(zero effort miss)。本文考慮的攔截飛彈依照標準三型飛彈(Standard Missile III)的結構簡化為三節。第一節火箭為推力器，第二節火箭為續航器，第三節為彈頭，飛行後依序脫離。第一節可以尾翼控制，第二節以推力向量控制，彈頭的部份則以開關式的推力器做姿態及轉向控制。從第二節火箭點火至彈頭紅外線尋標器鎖定目標為止為中途導引的階段，其目標是要控制飛彈的飛行方向，使飛彈進入終端

導引階段時有足夠小的零力誤失距離。中途導引律透過剩餘飛行時間及預測攔截點的估算來決定速度向量的修正量。飛彈的剩餘飛行時間與飛彈及目標的未來速度及相對距離有關，因此很不容易準確計算。本文利用誤差修正法，針對非加速目標，提出剩餘時間的估算法。計算簡單且其準確度隨著飛彈與目標的接近逐漸提高，預測攔截點及速度修正量的計算也因此愈趨準確。計算剩餘飛行時間的誤差修正法根據[1]提出的方法做修正，使計算更簡化。唯計算需要先預估飛彈在全部飛行時間的速度大小，飛彈速度可根據物性及推力大小做初略估算，再參考[2]所建議的方法做修正。飛行方向的改變，即速度的修正，是透過推力向量控制系統改變飛彈的姿態來達成。本文提出簡單的控制系統設計。六自由度模擬顯示本文所提出的導引律及控制系統能在中途導引階段將數十公里的誤失距離，降低至數十公尺，滿足終端導引的條件。動態模擬的程式利用 Matlab/Simulink 軟體發展，包括飛彈的物性氣動力和六自由度運動方程式，標準大氣重力模式以及目標三自由度運動方程式。本文第二節說明剩餘飛行時間的估算，第三節提出中途導引律，第

四節討論姿態控制系統設計，第五節是數值模擬的結果，第六節是簡短的結論。

二、剩餘飛行時間(time-to-go)的估算

2.1 座標系統

本文描述飛彈的運動使用兩種座標系。地面座標 S_N (NED 座標系)，原點為地表的雷達站， X_N 軸指向地表平面的北方， Y_N 軸指向地表平面的東方， Z_N 軸滿足右手定則。體座標 S_B (body coordinate)，隨著飛彈姿態變化的動座標系，原點為飛彈的質心， X_B 為飛彈的長軸方向，指向前方， Y_B 垂直 X_B 指向飛彈右邊， Z_B 滿足右手定則。飛彈姿態可以用一組尤拉角 (ϕ, θ, ψ) 來表示。如圖 1 所示， (X_N, Y_N, Z_N) 為地面座標的三軸， x_b 為飛彈體軸， ψ 為偏航角， θ 為俯仰角， ϕ 為翻滾角。地面座標依 ψ, θ, ϕ 次序旋轉後和體座標重合。

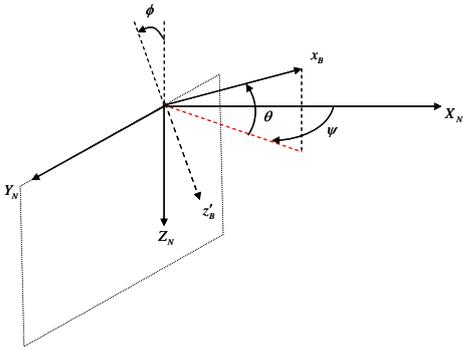


圖 1. 尤拉角示意圖

2.2 三維飛彈攔截模型

考慮一個三維的飛彈攔截目標狀況，如圖 2。 \vec{V}_m 為飛彈的速度向量， \vec{V}_t 為目標的速度向量， $\vec{R}(t)$ 為目標相對飛彈的位置向量， L 為預測攔截點， \vec{e}_L 是碰撞路徑方向上的單位向量， (X, Y, Z) 為地面座標系的三個座標軸。 V_m 為飛彈速度大小值，假設飛彈有一已知的時變速度函數 $V_m(t)$ ，而目標的速度 \vec{V}_t 為常數向量。

定義飛彈從時間 t_1 到 t_2 速度方向保持不變的直線飛行距離為 $D_m(t_1, t_2)$

$$D_m(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V_m(s) ds \quad (1)$$

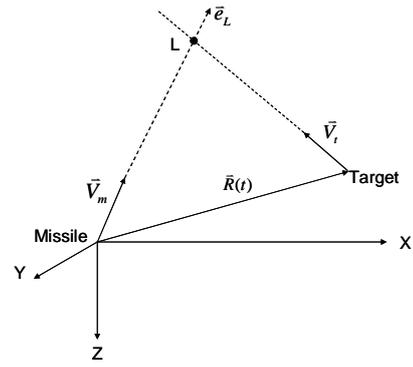


圖 2. 三維飛彈攔截目標示意圖

當飛彈直接對準攔截點 L 而且保持在攔截的直線路徑上，忽略重力與氣動力，並且假設目標為等速度，這時候可以由圖 2 看出攔截的條件是

$$D_m(t, t+t_{go})\vec{e}_L(t) = t_{go}\vec{V}_t + \vec{R}(t) \quad (2)$$

其中 t_{go} 為剩餘飛行時間，即為從現在到攔截所需的飛行時間。我們要把(2)式的 t_{go} 和 \vec{e}_L 解出來。為了消去 \vec{e}_L ，對(2)等式兩邊向量取長度的平方可得

$$[D_m(t, t+t_{go})]^2 = (t_{go}\vec{V}_t + \vec{R}(t)) \cdot (t_{go}\vec{V}_t + \vec{R}(t)) \quad (3)$$

其中 $\vec{x} \cdot \vec{y}$ 表示 \vec{x} 及 \vec{y} 向量的內積。將(3)整理後得

$$|\vec{V}_t|^2 t_{go}^2 + 2\vec{V}_t \cdot \vec{R}(t)t_{go} + |\vec{R}(t)|^2 - [D_m(t, t+t_{go})]^2 = 0 \quad (4)$$

上式可以利用正割法(secant method)來解出 t_{go} 。正割法屬於一種遞迴求解的方法[5]。需要兩個接近根的初始值 x_0, x_1 。經過反覆的遞迴計算後得到 x_2, x_3, \dots 。直到接近實際的根為止。雖然正割法可以解出 t_{go} 但是實際上不容易實現，因為我們不知道反覆計算的次數要多少才能得到夠精確的解，而且可能會對於量測到的目標位置和速度很敏感，所以在下一個小節提出另一種簡單的誤差修正法來估計 t_{go} ，不需要在每一個時間點都反覆的計算。此法的觀念與[1]所提的類似，但是忽略了導引所造成的速度改變因此計算更簡單。

2.3 誤差修正法

此方法是每個取樣時間點利用測量到的資訊做計算後修正 t_{go} ，不需要再反覆的遞迴求出 t_{go} 。令 t_{go} 和 \vec{e}_L 的估計值分別為 \hat{t}_{go} 和 $\hat{\vec{e}}_L$ ，估計的飛彈飛行結束時間為 $\hat{t}_{f,L} = t + \hat{t}_{go}$ 。預估飛行結束時的位置誤差 $\vec{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 可以(5)式表示

$$\vec{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = \vec{R}(t) + \hat{t}_{go}\vec{V}_t - D_m(t, \hat{t}_{f,L})\hat{\vec{e}}_L(t) \quad (5)$$

把(5)對 \hat{i}_{go} 和 \hat{e}_L 取微小變化量得到 $\Delta\bar{E}_L$

$$\Delta\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = (\bar{V}_t - \hat{V}_{m,L}\hat{e}_L)\Delta\hat{t}_{go} - D_m(t, \hat{t}_{f,L})\Delta\hat{e}_L \quad (6)$$

其中 $\hat{V}_{m,L} = V_m(\hat{t}_{f,L})$ ， $\Delta\hat{e}_L$ 是 \hat{e}_L 旋轉產生的變化量，所以 $\Delta\hat{e}_L$ 垂直於 \hat{e}_L 。為了使結束時的誤差 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$

減小到零，我們需要找到 $\Delta\hat{t}_{go}$ 和 $\Delta\hat{e}_L$ ，使得

$$\Delta\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) = -\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \quad (7)$$

把(7)代入(6)且等式兩邊同時內積 \hat{e}_L ，經整理得

$$\Delta\hat{t}_{go} = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \cdot \hat{e}_L(t)}{\hat{V}_{m,L} - \bar{V}_t \cdot \hat{e}_L(t)} \quad (8)$$

把(7)代入(6)可以得到

$$\Delta\hat{e}_L = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) - (\hat{V}_{m,L}\hat{e}_L(t) - \bar{V}_t)\Delta\hat{t}_{go}}{D_m(t, \hat{t}_{f,L})} \quad (9)$$

算出 $\Delta\hat{t}_{go}$ 和 $\Delta\hat{e}_L$ 之後， $\hat{t}_{f,L}$ 和 \hat{e}_L 就可以更新為

$$\begin{aligned} \hat{t}_{f,L} &= \hat{t}_{f,L} + \Delta\hat{t}_{go} \\ \hat{e}_L &= (\hat{e}_L + \Delta\hat{e}_L) / |\hat{e}_L + \Delta\hat{e}_L| \end{aligned} \quad (10)$$

有了 \hat{i}_{go} 之後將可以用來計算導引指令(guidance command)。

2.4 誤差修正法的計算步驟

誤差修正法是從飛彈進入中途導引階段開始每隔一個取樣時間 Δt_s 計算出一個 \hat{i}_{go} 。圖 3 為誤差修正法的計算流程圖。以下列出計算步驟：

步驟 A：第一節火箭脫離的時間為 t_{s1} ，在此時先大略估計

$$\begin{aligned} \hat{i}_{go}(t_{s1}) &= \frac{|\bar{R}(t_{s1})|}{V_c(t_{s1})} \\ \hat{e}_L(t_{s1}) &= \frac{\bar{R}(t_{s1}) + \hat{i}_{go}(t_{s1})\bar{V}_t(t_{s1})}{|\bar{R}(t_{s1}) + \hat{i}_{go}(t_{s1})\bar{V}_t(t_{s1})|} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $V_c(t_{s1}) = \frac{(\bar{V}_t(t_{s1}) - \bar{V}_m(t_{s1})) \cdot \bar{R}(t_{s1})}{|\bar{R}(t_{s1})|}$ 為飛彈

和目標的接近速率。

步驟 B：經過一個取樣時間 Δt_s 後，利用上個取樣時間算出的剩餘飛行時間 $\hat{t}_{go}(t - \Delta t_s)$ 和碰撞路徑單位向量 $\hat{e}_L(t - \Delta t_s)$ 計算 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$

$$\begin{aligned} \bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) &= \bar{R}(t) + \hat{i}_{go}(t - \Delta t_s)\bar{V}_t \\ &- D_m(t, \hat{t}_{f,L})\hat{e}_L(t - \Delta t_s), \quad t \geq t_{s1} + \Delta t_s \end{aligned} \quad (12)$$

計算出 $\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L})$ 之後再依序計算：

$$\Delta\hat{t}_{go}(t) = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) \cdot \hat{e}_L(t - \Delta t_s)}{\hat{V}_{m,L} - \bar{V}_t \cdot \hat{e}_L(t - \Delta t_s)}$$

$$\Delta\hat{e}_L(t) = \frac{\bar{E}_L(\hat{t}_{f,L}) - (\hat{V}_{m,L}\hat{e}_L(t - \Delta t_s) - \bar{V}_t)\Delta\hat{t}_{go}(t - \Delta t_s)}{D_m(t, \hat{t}_{f,L})}$$

步驟 C：更新剩餘飛行時間和碰撞路徑單位向量

$$\hat{t}_{go}(t) = \hat{t}_{go}(t - \Delta t_s) + \Delta\hat{t}_{go}(t)$$

$$\hat{e}_L(t) = \frac{\hat{e}_L(t - \Delta t_s) + \Delta\hat{e}_L(t)}{|\hat{e}_L(t - \Delta t_s) + \Delta\hat{e}_L(t)|}$$

步驟 D：模擬到下一個取樣時間時回到步驟 B。

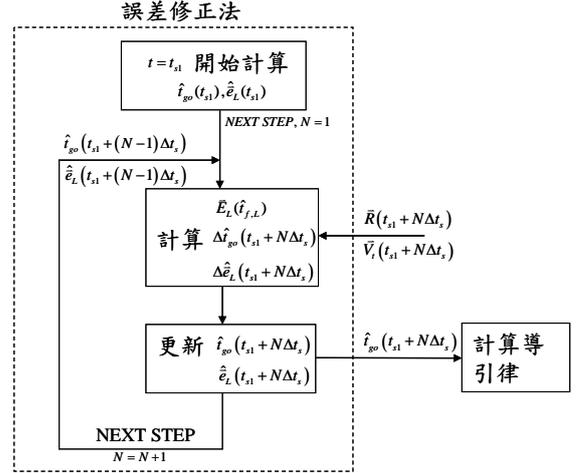


圖 3. 誤差修正法計算流程圖

2.5 估計飛彈速度對時間函數

計算 t_{go} 需要先知道飛彈的速度對時間函數。由於飛彈和目標均受重力作用所以圖 3 中計算剩餘飛行時間並未考慮重力，因此在決定飛彈速度函數時也不考慮重力。先模擬一次自由飛行來建立速度對時間表格，如此可以得到飛彈任一時間的速度。實際上每種不同的飛行情況都產生不同的速度函數，這會造成估計的速度與實際上的速度有誤差。為了能夠消除誤差，假設實際的飛彈速度和估計值的比值在時間 t 之後為常數，則在任一時間 t 可以定義

$$k(t) \equiv \frac{V_m(t)}{\bar{V}_m(t)} \quad (13)$$

其中 $V_m(t)$ 為實際飛彈的速度大小， $\bar{V}_m(t)$ 為表格內的預測速度大小。然後再根據這個比值 $k(t)$ 修正 t 秒之後表格內的預測飛彈速度

$$\bar{V}_m^{new}(s) = k(t)\bar{V}_m^{old}(s), \quad \text{for } s \geq t \quad (14)$$

而飛彈從 t 到 $t + t_{go}$ 間的直線飛行距離 $D_m(t, t + t_{go})$ 為計算 $\bar{V}_m(t)$ 圖形底下的面積再乘上比值 $k(t)$ 。

$$D_m(t, t+t_{go}) = k(t) \int_t^{t+t_{go}} \bar{V}_m(s) ds \quad (15)$$

要計算出準確的剩餘飛行時間一定要能夠精準的估計出飛彈速度和飛行距離。

三、中途導引律

3.1 預測攔截點(Predicted Interception Point)

假設目標物只受重力影響，速度和位置可以量測出來，則我們可以估計它接下來的飛行軌跡。假設目標的速度是固定的，並且假設重力是定值，利用前面已經算出的剩餘飛行時間 t_{go} ，則可以把預測攔截點(以下簡稱 PIP)寫為

$$PIP = \bar{X}_m(t) + \bar{R}(t) + \hat{t}_{go} \bar{V}_t + \frac{1}{2} \bar{G}_t \hat{t}_{go}^2 \quad (16)$$

其中 $\bar{X}_m(t)$ 為飛彈位置向量如圖 4 所示， $\bar{G}_t(t)$ 為目標當時的重力加速度。

3.2 中途導引律

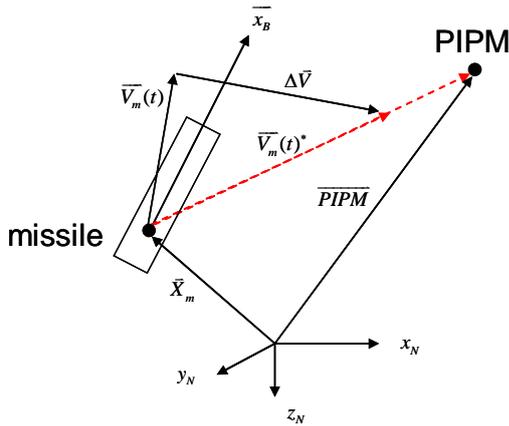


圖 4. 三維飛彈導引關係圖

由於 PIP 的計算考慮目標的重力，但是在攔截的過程中目標與飛彈所受的重力不同，此因素造成的影響需要納入考慮。因此導引命令並不是把飛彈的速度直接指向 PIP 點。

假設目標與飛彈受重力加速度的差值為

$$\bar{G} = \bar{G}_t - \bar{G}_m \quad (17)$$

而 \bar{G} 是隨時間變化的函數。在中途導引階段任一時間點算起

$$\bar{G} = \bar{G}_0 \quad (18)$$

\bar{G}_0 由當時飛彈與目標的位置決定。經過 \hat{t}_{go} 秒後，最終擊中目標時 $\bar{G} = 0$ ，假設 \bar{G} 為線性函數，則

$$\bar{G}(t) = -\frac{\bar{G}_0}{\hat{t}_{go}} t + \bar{G}_0 \quad (19)$$

$\bar{G}(t)$ 在 \hat{t}_{go} 秒內所產生的相對位移為 \bar{D}_G 可由下列式子計算：

$$\begin{aligned} \bar{V}_G(t) &= \int_0^t \bar{G}(\tau) d\tau = -\frac{\bar{G}_0}{2\hat{t}_{go}} t^2 + \bar{G}_0 t \\ \bar{D}_G &= \int_0^{\hat{t}_{go}} \bar{V}_G(t) dt = \frac{1}{3} \bar{G}_0 \hat{t}_{go}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

在(20)中，將 $\bar{G}(t)$ 積分一次得到由 $\bar{G}(t)$ 產生的相對速度 $\bar{V}_G(t)$ ，再將 $\bar{V}_G(t)$ 積分得到相對位移 \bar{D}_G 。點 PIPM 為飛彈在中途導引過程中的參考點，如圖 4 所示。由座標原點至點 PIPM 的向量 \overline{PIPM} 為

$$\overline{PIPM} = \bar{X}_t(t) + \hat{t}_{go} \bar{V}_t + \frac{1}{3} \bar{G}_t \hat{t}_{go}^2 \quad (21)$$

得到 \overline{PIPM} 之後，我們希望能將飛彈的速度在中途導引的過程中控制到 $\overline{PIPM} - \bar{X}_m$ 的方向上。

如圖 4， $\bar{V}_m(t)$ 為飛彈當時的速度向量， \bar{X}_m 為飛彈的位置向量。則依照速度與位置的關係可以得到

$$\overline{PIPM} = \bar{X}_m + \hat{t}_{go} \bar{V}_m(t)^* \quad (22)$$

其中 $\bar{V}_m(t)^*$ 是在時間為 t 時到達攔截點所需求的飛彈速度。將(22)整理後可得

$$\bar{V}_m(t)^* = \frac{\overline{PIPM} - \bar{X}_m}{\hat{t}_{go}} \quad (23)$$

因此在時間為 t 時飛彈所需的的速度改變為

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_m(t)^* - \bar{V}_m(t) \quad (24)$$

飛彈所需的的速度改變由引擎提供。引擎能提供的最大速度改變量會因為剩餘燃燒時間減小而越來越小。因此還需要計算引擎能提供的最大速度改變量，進而決定引擎的推力方向。

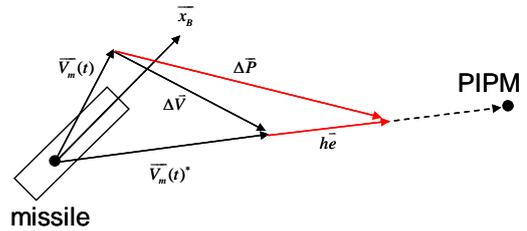


圖 5. 引擎提供的速度改變與導引命令關係圖

如圖 5， $\Delta \bar{P}$ 為引擎能提供的最大速度改變， \bar{e} 為 $\overline{PIPM} - \bar{X}_m$ 方向的單位向量， h 為常數。由圖 5 可以看出當 $|\Delta \bar{P}| \geq |\Delta \bar{V}|$ 時，並不需要將引擎提供的全部速度改變都朝著 $\Delta \bar{V}$ 的方向上，可以用 \bar{e} 向量來做組合使得部份的速度改變是朝著 \bar{e} 方向且有等效的速度改變是朝著 $\Delta \bar{V}$ 方向。

引擎能提供的最大速度改變可簡單寫為

$$\Delta\bar{P} = \frac{\bar{T}}{mass} t_{bo} \quad (25)$$

其中 \bar{T} 是飛彈引擎推力向量， $mass$ 是飛彈的質量， t_{bo} 是燃料剩餘的燃燒時間。根據圖 5 可得

$$\Delta\bar{V} + h\bar{e} = \Delta\bar{P} \quad , \quad |\Delta\bar{P}| \geq |\Delta\bar{V}| \quad , \quad h \geq 0 \quad (26)$$

將(26)等式左右兩邊同時取向量長度平方得

$$(\Delta\bar{V} + h\bar{e}) \cdot (\Delta\bar{V} + h\bar{e}) = \Delta\bar{P} \cdot \Delta\bar{P} \quad (27)$$

將(25)代入(27)整理後得

$$h^2 + 2(\Delta\bar{V} \cdot \bar{e})h + \left(|\Delta\bar{V}|^2 - \left(\frac{t_{bo}}{mass} \right)^2 |\bar{T}|^2 \right) = 0 \quad (28)$$

(28)為一個 h 的二次方程式，解出 h 並取 $h \geq 0$ 代入(26)即可得到 $\Delta\bar{P}$ ，再將 $\Delta\bar{P}$ 代入(25)即可得 \bar{T} 。

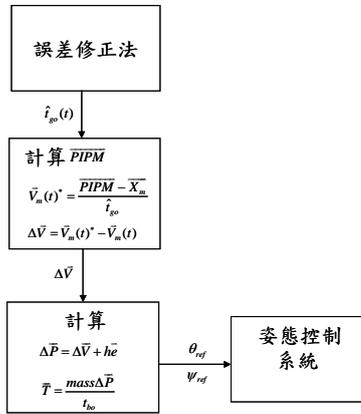


圖 6. 導引律流程圖

\bar{T} 即為飛彈需要的引擎推力方向，要得到 \bar{T} 方向的推力向量需要把飛彈的姿態 X_B 軸控制到與 \bar{T} 重合。整個導引律的計算流程如圖 6 所示，其中 θ_{ref} 與 ψ_{ref} 定義於(42)。

四、姿態控制

4.1 推力向量控制系統(TVC System)

在飛彈的飛行過程中推力的固定，推力的方向可以控制。在體座標底下，噴嘴可以轉動的方向分別為 Y_B 方向和 Z_B 方向，兩個方向的轉動都限制在正負 5 度以內。

如圖 7，在體座標底下，原點為飛彈質心位置， L 為推進器跟質心在 X_B 方向上的距離且 L 隨時間改變， \bar{F}_T 為推進器產生的推力向量， (F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}) 為推力在體座標下的三個分量， δ_y 為 \bar{F}_T 在 $X_B - Y_B$ 平面上的投影向量與 X_B 軸的夾角， δ_z 為 \bar{F}_T 在 $X_B - Z_B$ 平面上的投影向量與 X_B 軸的夾角。

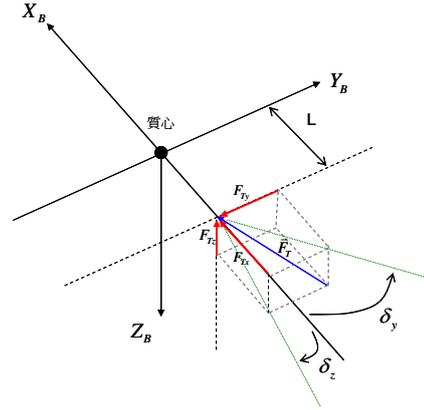


圖 7. 推力向量控制系統(TVC system)

首先介紹飛彈所受的引擎推力。由圖 7 可知

$$\tan \delta_y = \frac{-F_{Ty}}{F_{Tx}} \quad , \quad \tan \delta_z = \frac{-F_{Tz}}{F_{Tx}} \quad (29)$$

$$|\bar{F}_T|^2 = F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2 + F_{Tz}^2 \quad (30)$$

令 $\Delta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \delta_y + \tan^2 \delta_z}}$ ，經過整理則引擎推力 \bar{F}_T 在體座標下可以寫為

$$\bar{F}_T = \begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\bar{F}_T| & 0 & 0 \\ 0 & -|\bar{F}_T| & 0 \\ 0 & 0 & -|\bar{F}_T| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \tan \delta_y \\ \Delta \tan \delta_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

接著介紹飛彈所受的引擎力矩。假設飛彈的質心與推力的施力點只有 X_B 方向的距離差 L ，由圖 7 可以得到體座標下的引擎力矩 \bar{M}_T

$$\bar{M}_T = \begin{bmatrix} M_{Tx} \\ M_{Ty} \\ M_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\bar{F}_T|L \\ 0 & |\bar{F}_T|L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \tan \delta_y \\ \Delta \tan \delta_z \end{bmatrix} \quad (32)$$

4.2 線性化旋轉方程式

為了控制姿態必須線性化方程式。由於飛彈的高度夠高所以忽略氣動力。假設翻滾角速度 $p \approx 0$ ，飛彈仰角 $\theta \approx 0$ 、翻滾角 $\phi \approx 0$ ，可以線性化為

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p & \dot{p} &= \frac{M_x}{I_{xx}} \\ \dot{\theta} &= q & \dot{q} &= \frac{M_y}{I_{yy}} \\ \dot{\psi} &= r & \dot{r} &= \frac{M_z}{I_{zz}} \end{aligned} \quad (33)$$

則原本非線性方程組可簡化為翻滾角、俯仰角、偏航角三組互相獨立的雙積分線性方程組。

4.3 翻滾角控制

根據(33)可以畫出系統方塊圖，如圖 8。\$k_\phi\$ 和 \$k_p\$ 為兩個控制增益。我們把翻滾角和翻滾角速度做負回授控制。

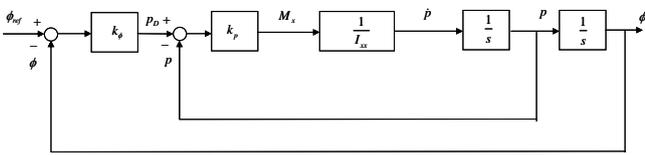


圖 8. 翻滾角控制迴路

圖 8 的整體閉迴路轉移函數為一個標準二階轉移函數，選擇阻尼比 \$\xi = 1/\sqrt{2}\$，自然頻率 \$f = 1(\text{Hz})\$。可得 \$k_p = 10I_{xx}\$，\$k_\phi = 5\$。因為翻滾角在中途導引階段希望維持為 0 度所以 \$\phi_{ref} = 0\$。飛彈所需要的 \$X_B\$ 方向力矩為

$$M_x = [(\phi_{ref} - \phi)k_\phi - p]k_p = [(-\phi)k_\phi - p]k_p \quad (34)$$

我們假設在中途導引階段由適當的制動器來產生此力矩，因此滾轉角大致控制在零度附近。

4.4 偏航角與俯仰角控制

飛彈噴嘴轉動角度限制在 \$\pm 5\$ 度以內，則可以近似 \$\tan \delta_y \cong \delta_y\$，\$\tan \delta_z \cong \delta_z\$，\$\Delta \cong 1\$。將引擎力矩方程式(32)代入(33)並近似後可得偏航角與俯仰角線性方程式

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q & \dot{\psi} &= r \\ \dot{q} &= \frac{-|\bar{F}|L\delta_z}{I_{yy}} & \dot{r} &= \frac{|\bar{F}|L\delta_y}{I_{zz}} \end{aligned} \quad (35)$$

考慮簡單的內迴路與外迴路定方向控制，如圖 9

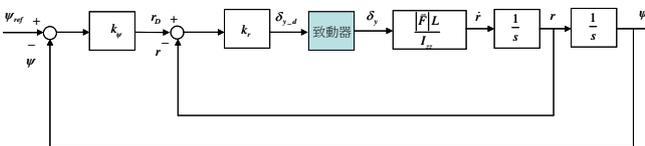


圖 9. 偏航角控制迴路

假設致動器的轉移函數為 \$a/(s+a)\$，令 \$G_r = |\bar{F}|L/I\$。整個系統的閉迴路轉移函數為

$$\frac{\psi}{\psi_{ref}} = \frac{ak_\psi k_r G_p}{s^3 + as^2 + ak_r G_p s + ak_\psi k_r G_p} \quad (36)$$

設計控制器的目的是讓整個系統的步階響應穩定且暫態響應在可接受的範圍內。觀察(36)的特徵方程式得知，控制器可以任意調整特徵方程式的 \$s\$ 項和常數項係數，但是 \$s^2\$ 項係數固定為 \$a\$，因此設計控制器和制動器的時間常數有很大的關係。指定(36)的三個極點為：

$$-p_1, p_2 = -r + bj, p_3 = -r - bj, p_1, r, b \in \mathbb{R}^+ \quad (37)$$

由根與係數關係可知 \$p_1 + 2r = a\$，為了不讓三個極點太接近虛軸導致上升時間過長，應盡量讓三個極點的實部平分 \$a\$。選擇

$$p_1 = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 1, r = \frac{a - p_1}{2} \quad (38)$$

其中 \$\lfloor x \rfloor\$ 代表小於等於 \$x\$ 的最大整數。在共扼複數根 \$p_2, p_3\$ 的部份選擇阻尼比 \$\zeta = 0.5\$。可得

$$b = r \tan 60^\circ \quad (39)$$

因為還有一個極點在 \$-p_1\$ 的位置所以此三階系統不會像阻尼比為 0.5 的二階系統一樣產生震盪和過大的過激量(overshoot)，又能有理想的上升時間。設計完的極點位置如圖 10 所示。

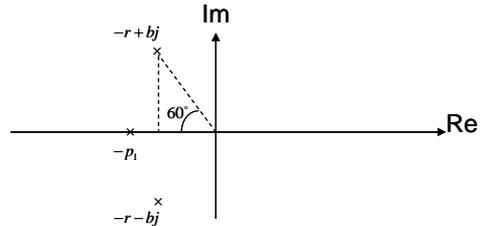


圖 10. 複數平面極點圖

設計好三個極點後比較特徵方程式係數得

$$k_r = \frac{4r^2 + 2p_1 r}{aG_p}, k_\psi = \frac{2p_1 r}{2r + p_1} \quad (40)$$

(40)式就是我們所需的兩個比例控制器增益值。俯仰角控制和偏航角控制是相似的迴路，因為飛彈的轉動慣量 \$I_{yy} = I_{zz}\$，所以俯仰角的迴路與偏航角的迴路只有在內迴路的開路轉移函數多了一個負號，因此我們令俯仰角迴路的控制兩個增益 \$k_q = -k_r\$，\$k_\theta = k_\psi\$ 如此整個系統的轉移函數就和偏航角控制迴路一樣。也就可以沿用偏航角控制迴

路的设计。則线性姿态控制的输入讯号为

$$\begin{aligned}\delta_{y-d} &= k_r \left[k_\psi (\psi_{ref} - \psi) - r \right] \\ \delta_{z-d} &= k_q \left[k_\theta (\theta_{ref} - \theta) - q \right]\end{aligned}\quad (41)$$

ψ_{ref} 和 θ_{ref} 为(25)式裡 \bar{T} 在地面座标下的两个姿态角。若 T_x, T_y, T_z 分别为 \bar{T} 在惯性座标的三个分量则

$$\psi_{ref} = \tan^{-1} \frac{T_y}{T_x}, \quad \theta_{ref} = \tan^{-1} \frac{-T_z}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2}} \quad (42)$$

δ_{y-d} 和 δ_{z-d} 为下达给飞弹推力系统两个转动角度的指令，推力向量控制系统将依据这两个指令调整喷嘴的方向来达到需求的偏航角和俯仰角。

五、模拟结果

图 11 为飞弹在飞行过程的质量变化与推力大小。

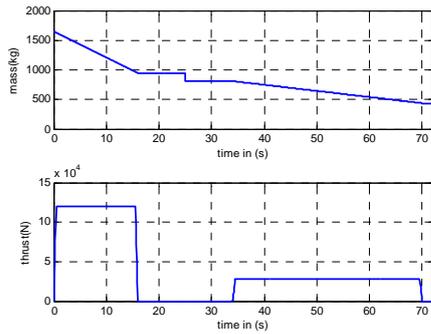


图 11. 飞弹推力与质量变化示意图

飞弹发射前会先计算打中目标的飞行时间大约为多少，然后再用飞行时间估计初始拦截方向，以初始拦截方向来决定发射的偏航角。

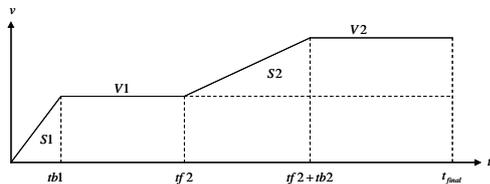


图 12. 简略飞弹速度对时间图

首先介绍如何计算初始发射方向。图 12 是一个简略的飞弹速度对时间图形，其中 S1：第一节推力造成的直线飞行的距离，S2：第二节推力造成飞弹增加的直线飞行距离，V1：第一节推力结束时的飞弹速度大小，V2：第二节推力结束时的飞弹速度大小， t_{final} ：拦截时间。忽略气动力和重力的影响，由图 11 飞弹的推力和质量可以得到

$V2 = 2.1V1$ 。利用图 2 的概念，飞弹在拦截时间内飞行的直线距离 $D_m(0, t_{final})$ 为图 12 曲线下的面积

$$D_m(0, t_{final}) = S + 2.1 \times V1 \times t_{final} \quad (43)$$

其中 $S = S1 + S2 - tb1 \times V1 - 1.1 \times V1 \times (tf2 + tb2)$ 。假设飞弹朝著初始拦截方向 \bar{W} 发射，目标的速度 \bar{V}_t 为常数向量，将 $t = 0$ ， $t_{go} = t_{final}$ 和(43)式代入(2)式得

$$(S + 2.1 \times V1 \times t_{final}) \bar{e}_L(0) = t_{final} \bar{V}_t + \bar{R}(0) \quad (44)$$

将(44)等式左右两边取向量长度的平方再移项后得可解出 t_{final} 。利用解出来的 t_{final} 来估算初始拦截方向 \bar{W} ，如(45)

$$\bar{W} = [W_x \quad W_y \quad W_z]^T = \bar{R}(0) + t_{final} \bar{V}_t(0) \quad (45)$$

其中 $\bar{R}(0)$ 为目标与飞弹初始相对位置向量。发射飞弹的初始偏航角即朝著 \bar{W} 的方向 $\psi(0) = \tan^{-1}(W_y / W_x)$ 。初始发射仰角的部分因为要让飞弹在第一节推进燃料用完时有足够的高度所以将发射的仰角固定为 70 度。

接著设定模拟的初始条件：飞弹初始位置(0, -10, -0.01) km，目标初始位置(420, -243, -285) km，目标初始速度(-1299, 750, 0) m/s，飞弹初始速度(0, 0, 0) m/s，计算 t_{go} 的取样时间 $\Delta t_s = 0.1$ s，制动器时间常数为 50ms。经过初始条件计算后飞弹的初始发射姿态角 $(\phi, \theta, \psi) = (0, 70, -27.9)$ deg。

表 1. 不同发射偏航角所造成的零力误差

ψ (度)	-25.9	-26.9	-27.9	-28.9	-29.9
ZEM(m)	56.85	51.61	50.6	55.35	68.81
飞行时间(sec)	168.86	168.85	168.84	168.85	168.87

除了以偏航角为 -27.9 度发射外，固定所有的参数改变发射时的偏航角观察所造成的影响，如表 1 所示。接著改变制动器时间常数固定其他的参数观察 ZEM 的变化，如表 2 所示。

表 2. 不同制动器时间常数所造成的零力误差

时间常数	50ms	100ms
ZEM(m)	50.6	119
飞行时间(sec)	168.84	168.88

六、結論

中途導引階段每隔一個取樣時間修正一次剩餘飛行時間，這樣的方式可減低運算量。中途導引律是依據預測攔截參考點的位置來計算需要的速度改變，因此準確地估計剩餘飛行時間是很重要的，中途導引結束後的 ZEM 大小與剩餘飛行時間的準確度有關係，在燃料用完的前剩餘飛行時間估計得越準則 ZEM 越小。為了使剩餘飛行時間估計得更準，每次計算前都會修正表格內預估的未來飛彈速度。飛彈發射的方向角是發射前計算出來的，會因為各種數據的誤差而算出不同的方向角，因此我們比較了幾種不同發射方向角所造成的 ZEM，結果發現 ZEM 都可以在終端導引的能力範圍內，表示發射的方向如果有些許的誤差是中途導引可以除去的，也表示中途導引律對於目標初始位置和速度的測量值不敏感，這個結果是此中途導引律的優點之一。

中途導引階段採用 TVC 系統來產生飛彈需要的速度改變，TVC 的制動器時間常數對於控制系統的設計有很大的影響，我們使用角度和角速度的比例回授雙迴路控制，制動器時間常數越大則系統響應速度越慢，由於每隔一個取樣時間會下達一次導引命令，系統響應不夠快的話就無法達到指令的要求而造成 ZEM 變大，根據模擬的結果顯示 TVC 系統時間常數越大則 ZEM 也越大。在本方法的導引之下我們所模擬的攔截飛彈成功的飛往攔截點且誤失距離足夠小。另外本論文的模擬都是在沒有測量誤差的情況下進行，也就是目標和飛彈的位置和速度測量完全準確，後續的研究要探討因位置及速度量測誤差所造成的影響。

參考文獻

- [1] Tahk, M.J., Ryoo, C.K. and Cho, H., "Recursive time-to-go estimation for homing guidance missile," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, Vol.38, No.1, 2002.
- [2] Cho, H., Ryoo, C.K. and Tahk, M.J., "Implement of optimal guidance laws using predicted missile velocity profiles," *Journal of*

Guidance, Control, and Dynamics, Vol.22, No.4, 1999.

- [3] Newman, B., "Strategic intercept midcourse guidance using modified zero effort miss steering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.19, No.1, pp.107-112, 1996.
- [4] Newman, B., "Robust conventional based midcourse guidance for spacecraft intercepts" *Proceedings of the American Control Conference*, Vol.5, 21-23, pp. 3116-3120, June.1995.
- [5] "Secant method",
http://en.wikipedia.org/wiki/Secant_method.
- [6] Herbert Goldstein, *Classical mechanics*, 2nd edition, Section 4-5, pp.148-158, Appendix B, pp.608-610, ADDISON-WESLEY publishing company, 1980.
- [7] "Atmospheric pressure",
http://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure.
- [8] 陳科祥, "轉向與姿態控制研究初步分析," 中科院二所飛行控制組, 2009 年 5 月.
- [9] J. J. Dougherty and J. L. Speyer, "Near-optimal guidance law for ballistic missile interception," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.20, No.2, pp.355-361, 1997.
- [10] F. Imado, T. Kuroda, and S. Miwa, "Optimal midcourse guidance for medium-range air-to-air missiles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.13, No.3, pp.603-608, 1990.