管　理　與　系　統
第十六卷 第一期　民國九十八年一月
53-74 頁

Journal of Management & Systems
Vol. 16, No. 1, January 2009
pp. 53-74

專業製造之產能服務能耐的競爭理論

A Theory of Capacity-based Competition for Professional Manufacturing Services

周雍強 Yon-Chun Chou　　鍾顯榮 Hsien-Jung Chung
國立台灣大學工業工程研究所

Institute of Industrial Engineering, National Taiwan University

(Received July 31, 2007; Final Version January 9, 2008)

摘要：近一、二十年，生產全球化的趨勢開創了蓬勃的製造服務產業，製造廠商經常主動接觸品牌產品公司，提供生產服務，建立供應鏈上下游協作關係，但是產品公司通常採取多元委外方略，將生產委託給多家廠商，本文探討這種「產品設計公司－產品製造公司」多方企業組織結構內一種產能服務能耐的現象與衍生的競爭問題。在高科技製造領域，產品需求非常易變、產能投資成本高，製造廠商進行產能投資面對極大的企業風險，若產能擴充保守，產能供應不足的可能性往往成爲產品公司關切的風險，因此產能預備是服務能耐的一個要素，可作爲製造廠商的服務競爭策略。本文以產能服務的能耐差距爲基石，建構產能服務競爭的理論分析方法，這個方法的第一個部份是一個新穎、以能耐差距爲要素的需求分配法則，第二個部份是雙佔廠商的產能競爭模式。本文先推導雙佔廠商在競爭情境的反應函數，再證明產能策略存在單一均衡點，最後利用產業數據，以數值範例推理廠商的產能競爭行爲：當跟隨廠商採行激進的產能擴充，領導廠商會有相對保守的反應，以避免產業總供給過剩，並任由跟隨廠商承擔易變需求所隱含的風險；而當領導廠商採行激進的擴充，跟隨廠商可能同樣採取激進行爲，以防止其客戶流失，但是總產能供應將因此增加，兩家廠商的產能利用率將下降，對利潤或成本結構較弱的廠商最爲不利。

關鍵詞：產能策略、製造服務能耐、對數常態需求、設計與製造鏈、供應鏈風險

---

* 本文蒙國科會補助部分研究經費 (NSC 95-2221-E-002-268)，特此致謝。

Abstract：Globalization of production has ushered in vibrant manufacturing service industries. Many high-technology manufacturing service firms frequently take initiative to forge supply relationships with product firms. In these engineering-manufacturing chains, certainty of capacity supply is an important concern as conservative (insufficient) capacity expansion is frequently prompted by high uncertainty of demand and investment risk. Capacity strategy has traditionally been discussed from a manufacturer's perspective to time or size the investment, or to compete in a game setting. In the era of manufacturing services, customers' concern of capacity certainty should be included as an important factor in formulating a capacity strategy. This paper presents a mathematical analysis of this new aspect. Uncertain demand is modeled as a lognormal random variable. A novel service-based demand rationing rule is developed for a duopoly of differentiated prices. Reaction curves and equilibrium of capacity strategy are derived and competition behavior is analyzed.

Keywords: Capacity Strategy, Manufacturing Services, Lognormal Demand, Supply Risk

1. 問題背景

在設備資產需求較高 (asset-heavy) 的產業，產能是重要的競爭因素。例如半導體製造與液晶顯示面板製造的工廠投資金額在二、三十億美元以上，投資決策往往影響企業的長遠發展。當需求易變而產能投資成本又很高，產能擴充對廠商造成很高的風險。進一步而言，在高科技製造常見的寡佔產業環境，一個廠商的產能擴充將增加產業的產能總供給，進而對其他廠商造成影響，產能投資分析因此必須考慮競局因素。由於產能投資有風險，也能帶來溢酬，因此產能策略是製造企業競爭的重要選項。

近一、二十年，生產全球化的趨勢開創了蓬勃的製造服務產業，衍生出產能投資的新特性。電子產品製造服務 (electronics manufacturing services; EMS) 已經是常用名詞，專指爲擁有品牌的設備原廠提供產品設計、製造、測試、以及配送等服務業務。起初 EMS 廠商只是受託製造印刷電路板，設備原廠仍然保有系統組裝與其他業務，但是 EMS 廠商快速拓展設計、組裝、物流以及售後服務等垂直能耐 (vertical capabilities)。時至今日，許多設備原廠已不再從事任何製造工作，而專注在產品設計，不少 EMS 廠商則成爲世界級的企業。製造服務不限於電子產品，在半導體產業也有類似的發展。專業製造廠商 (foundry manufacturers) 以製程技術與製造能耐爲核心競爭力，提供製造服務給微晶片公司，近幾年的業務也逐漸往上游擴展，提供的服務包括微晶片的部份設計工作。製造服務業與製造業不同，製造服務是一種結合製造與服務的生產活動，爲服務導向。管理「製造服務」與管理「單純的製造」有基本上的不同。製造管理的主要議題

爲改善工廠的效率、成本、品質。相對地，製造服務的挑戰則在於如何促成產品工程及製造技術的協同發展、服務的創新、服務的監控與履行。

許多製造服務廠商不再是小型企業，不再只是被動地承接品牌產品公司釋出的委外生產訂單，相反地，他們經常主動接洽品牌產品公司，提供生產服務，建立供應鏈上下游協作關係，但是產品公司通常採取多元委外 (dual sourcing) 方略，形成一種「設計與製造」多方複合鏈，在下文簡稱設計與製造鏈。在高科技的設計與製造鏈之中，產品公司與製造廠商的互動大致可分爲兩個階段，如圖 1 所示。在第一階段，產品設計與製造能耐是同步發展的，對於某些高科技製造產業，產能建置的前置時間相當長，產品發展與產能建置也需有所協調。第二階段則是產品上市後的生產下單。大多數產品公司將生產委託給多個製造服務廠商，以避免風險並獲取最大的生產效率利益。更重要的是，產品公司係將委外的生產當作是購入的服務，而消費者對購入的服務通常有不輕易妥協的績效要求，這也是前述製造服務與製造兩個觀點有根本上的不同的主要原因。設計與製造鏈大體是關注產品生命週期的早期階段，在這個階段，新產品的需求非常易變(volatile)，產能是高風險的投資，但是事關產品公司本身的生存，產品公司總是傾向由製造廠商承擔這個風險，將服務視爲履行契約，讓各家製造服務廠商在績效上進行競爭。產品公司的多元委外方略與服務要求對製造廠商的產能決策因此注入一個新的、必須考量的競爭因素。

許多高科技製造產業面臨高度不確定的需求、不斷上升的設備成本、以及快速的技術更迭。在這樣的產業環境，產能投資不僅有很高的風險，由於必須不斷投入大額資金、沒有退路，許多公司對經營自有的生產工廠出現擁有能力衰退 (affordability) 的現象。這個現象在半導體產業非常普遍，相關的深度分析可參見 (Hutcheson and Hutcheson, 1993; Hicks, 1996) 等文。產品公

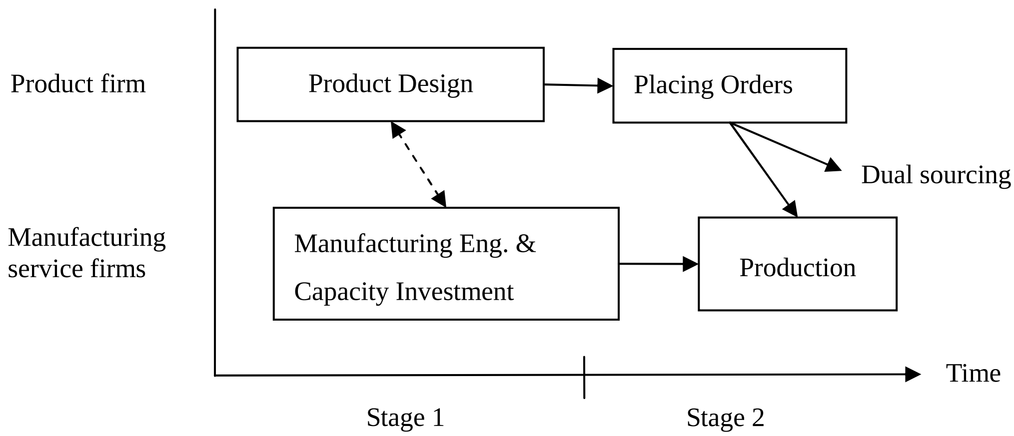


圖 1 專業製造的產能服務

司對服務的要求以及產能的珍貴性這兩個發展趨勢對產能投資帶來新的挑戰與分析面向。在以往，產能決策所探討的問題主要是投資規模與最佳時點的抉擇，以及橫向競爭者間的賽局策略；在製造服務的時代，產能決策更須關切來自縱向的、客戶對產能服務能耐的要求。

本節下文先回顧產能投資及策略的文獻，然後在下節定義問題。基於各種產業的環境不同，產能決策存在多個問題形式，而除了不確定需求之外，也還有其他影響因素。在完全競爭市場或獨佔市場的產業，需求、價格，成本等的不確定性或趨勢是影響決策的主要因素。在寡佔市場，競爭者的可能行爲亦必須納入考量。各種問題形式所指涉的產能可爲同質資產，或是依品質、類別、位置之不同的異質資產。產業組織、不確定性以及競爭型態的不同塑造成各式樣的產能問題。

大部分的產能決策文獻探討產能規模 (sizing) 以及就緒時點 (timing) 的抉擇問題，即應該建置多少產能，以及何時建置，所採用的數學模式大多基於混合整數規劃或隨機規劃。另有一些論文討論較爲特殊、重要的問題。Benavides *et al.* (1999) 以最優停止 (optimal stopping) 模式分析半導體製造的產能投資問題。產品需求以幾何布朗運動過程表示，得到結論是，小規模步進式擴產 (sequential deployment) 要比大規模一次性擴產更能取得兼具經濟規模與彈性的綜合效率。Karabuk and Wu (2003) 探討垂直整合廠商產品部門與製造部門之間，產品推展與產能投資問題的綜合解決之道，所分析的對策是以產能合約作爲製造部門與產品部門之間風險分攤的手段。針對不確定的需求與有差異的價格，Chou *et al.* (2007) 利用實質選擇權理論估計產能擴充的等候價值，並比較保守及激進產能策略的期望利潤。

由於價格影響需求，產能決策有時必須同時考量價格決策。這兩個決策的先後次序與嵌入 (embedding) 關係存在多種的可能。Driver and Goffinet (1998) 考量雙佔廠商面對不確定需求，進行價格勾結決定共識價格後，再進行產能決策。第一個步驟以兩家廠商的聯合利潤優化爲目標，決定最適的勾結價格。其次，在所給定的最適價格，個別廠商以不確定需求情境的期望利潤爲目標，決定最適的產能水準，求得廠商的反應函數。由於產能通常爲長期決策，而價格則爲短期決策，Davidson and Deneckere (1986) 建構雙佔廠商的競爭模型，先決定產能決策，再進行貝特朗式 (Bertrand-like) 價格競爭。Van Mieghem and Dada (1999) 以兩階段的決策模式分析決策程序採取延遲策略的效果，該文比較產能、價格與生產數量等三項決策採取不同順序對投資數量與企業價值的影響。

等候時間 (或流程時間) 是製造服務的一項重要績效指標，因此也被用來決定產能需求。De Borger and Van Dender (2005) 研究公共設施的等候問題，例如高速公路、大眾交通運輸系統。他們的模型將消費者使用公共設施的等候時間成本作爲產能決策的因素，等候時間則假設爲與需求與產能的比值成正比。半導體晶圓製造也有顯著的等候現象，其生產流程時間通常超過一個月，對於電子產業而言，這麼長的流程時間是競爭步調的嚴重制約，因此流程時間也被當作

擴充工廠產能的決定因素 (Chou and Wu, 2002)。

建構產能競爭模型時，需求配給 (demand rationing) 函數是關鍵的議題，即依據什麼因素，如何將不確定需求分配給相互競爭的廠商。常見的需求配給因素有三：(1)價格、(2)品質、(3)偏好。Tirole (1988) 敘述以價格作爲配給因素的兩種方法：一爲有效 (efficient) 配給，另一爲隨機 (proportional) 配給。有效配給法則係指市場需求先由較低價格的製造廠商滿足，市場剩餘需求再由較高價格的製造廠商供給。這個法則能得到最大的社會福利 (social welfare)，所以稱爲有效配給。隨機配給法則是根據需求函數及兩家廠商的價格，先分別求得兩個需求量，再按比例配給。品質也被採作需求配給的決定因素，通常的作法是將品質以函數轉換爲成本，間接由品質差異決定需求的配給 (Crampes and Hollander, 1995)。有些論文採用價格與品質兩個因素，作法是利用效用函式 $U=\theta s-p$，將價格(p)與品質(s)兩個因素綜合成爲效用，其中 θ 爲消費者的偏好參數。將 θ 視爲具有某種機率分佈的隨機變數，則偏好參數可作爲需求配給的因素 (Tirole, 1988)。

本研究的文獻回顧還未發現任何有關以產能服務的能耐差異作爲競爭因素的論文。工程與製造鏈的需求配給並非與價格、產品品質或偏好有關，而是與風險規避有關，本文將在下節詳細說明這點。本文的架構如下：第二節爲問題敘述與定義，第三節以前述的產能服務能耐差距建構需求配給法則，在第四節推導雙佔廠商的反應函數，第五節爲數值範例及競爭行爲分析，最後在第六節總結。

2. 問題敘述

本文探討，在產品需求易變與高產能投資成本的產業環境，工程與製造鏈的產能服務競爭問題。在這樣的環境，製造廠商產能擴充會傾向保守，但是產品公司對產能服務能耐仍然會有要求，兩者之間因此產生服務的履行能力問題。本文將產能視爲製造服務的競爭因素，建構服務競爭的數學模式，並分析雙佔廠商的競爭行爲。我們考慮製造服務的一個雙佔市場 (duopoly)，兩家製造服務廠商以廠商 1 和廠商 2 表示，他們的規模與競爭力不相同，廠商 1 的規模較小、競爭力較弱。假設廠商 1 的產能擴充較廠商 2 保守，因此產能不足的風險較高。由於客戶採取多元委外方略，所以兩家廠商有許多共同的客戶。在圖 1 的第二階段，若客戶認知到廠商 1 的產能可能有所短缺而廠商 2 有充足的產能，則客戶可能將訂單從廠商 1 轉向廠商 2。充足的產能因此是廠商 2 取得優勢的差異化因素，廠商 1 所得的訂單量將比原先在第一階段所預期得要少。值得注意的是，製造服務的委外訂單並不是最終市場的零星採購或工廠的生產工令 (work orders)，而通常是產品公司某個產品系列或型號的生產需求，因此單一訂單的重新分配有可能顯著改變兩家廠商的產能利用。

一般而言，高科技製造有三項核心競爭要素：先進製程技術、工程服務以及製造能耐。製程技術通常進步很快，例如半導體製程技術每二、三年便進入新的世代，但是先進的製程技術並不能保證企業獲利，許多成功的案例顯示先進製程技術之外，工程服務以及製造能耐也是必要條件。工程服務即圖 1 階段 1 的協同發展能力。製造能耐泛指維持穩定製程良率的能力、縮短試產至量產時間的能力，以及適時、適量、適性產能的供應與運籌能力。本文假設兩家廠商具有相同的製程技術，但是有不同的工程服務及品質工程能耐，另外，這兩項差異會反應在製造服務的價格。一般在零售市場常見的消費品動態訂價很少發生在工程與製造鏈。製造服務價格通常是基於工程服務、製造品質所訂定的，並且載入契約，所以是一種事前約定 (*ex ante*) 價格。例如在半導體專業製造產業，各家廠商的平均售價 (average selling price) 有差異、與能耐有關 (Chou *et al.*, 2007)。因此本文假設製造服務的雙佔產業具有以下的特性：

(1) 兩家廠商的規模(即市佔率)不相同。其中市佔率較大的廠商稱爲領導廠商，其市佔率以 r 表示，且 $0.5<r<1$，另一家廠商稱爲跟隨廠商，市佔率為 $1-r$。
(2) 有價格差異：工程服務與品質的差異反應在價格差異上。領導廠商的服務價格較高。
(3) 需求是易變、隨機變化的；需求服從對數常態 (log-normal) 分佈。分析對數常態需求的產能預備是本文數學模式的貢獻之一。

領導廠商與跟隨廠商分別以廠商 L 與廠商 F 表示。本文數學模式有些變數與參數附有下標 L 與 F，即是用以區別廠商。

在產業經濟文獻，隨機需求常以 $a \cdot D(p)$ 的函式表示，其中 p 爲價格，D 爲需求函數，$D(p)$ 爲價格的反函數，a 隨機變數。例如，在前述 (Driver and Goffinet, 1998) 的數學模式，隨機變數 a 服從均勻 (uniform) 分配。本文假設需求是服從對數常態分配。雖然利用對數常態分配將使數學推算較爲複雜，但卻有實務上的意義。設計與製造鏈的產能規劃係針對新產品而非成熟產品，而新產品的需求通常呈現指數型的成長，具有易變的特性。Benavides *et al.* (1999) 是以幾何布朗運動 (GBM) 建構半導體製造的需求模型。根據機率理論，若需求爲 GBM 過程，則未來某一時點的需求將服從對數常態分配。Chou *et al.* (2007) 指出對數常態分配亦適合描述半導體晶片的產能需求。

令需求在基期爲 1 單位，當期的產能亦爲 1 單位。需求以對數常態變數 q 表示，未來的產能水準以 k 表示，亦即產能將從 1 單位擴充。面對不確定需求，滿足所有可能發生的需求並非最適的對策，爲追求營利的優化，部分的不確定需求，發生機率過低，必須理智地予以捨棄。能被產能滿足的需求稱爲「有效需求」(effective demand)。若考慮單一廠商，其有效需求(D)是所面對的需求(q)與其產能(k)選較小者：$D=\min\{q,k\}$。當需求爲一隨機變數，則產能投資的利潤函數爲：

$$\pi(k) = p \cdot \int_0^\infty \min(q,k) f(q) dq - c \cdot k$$

其中，k 爲產能水準、p 爲單位毛利、c 爲產能的單位成本，而 f 爲需求的機率密度函數。上式之積分項即爲有效需求，可展開爲：

$$\int_0^\infty \min(q,k) f(q) dq = \int_0^k q \cdot f(q) dq + \int_k^\infty k \cdot f(q) dq = \mu_q - \int_k^\infty (q-k) \cdot f(q) dq$$

其中，μ_q 爲需求的期望值（在下文，需求平均值有時也以 $\overline{q}$ 表示），第二項爲部份期望值 (partial expectation with respect to threshold k)。部份期望值以 $g(k)$ 表示，即令 $g(k) \equiv \int_k^\infty (q-k) \cdot f(q) dq$ ，利潤函數可簡要表示爲：

$$\pi(k) = p \cdot [\mu_q - g(k)] - c \cdot k$$

考量雙佔產業的兩家廠商，若一家廠商沒有多餘產能，而另一家廠商有剩餘產能，則前者的部分需求將流往後者。如圖 2 所示，領導廠商與跟隨廠商的產能分別爲 k_L 與 k_F 。我們可合理假設 $k_L > k_F$。當市場總需求小於 $k_F/(1-r)$，兩家廠商的有效需求 $\hat{d}$ 隨總需求增加而線性增加。當總需求大於 $k_F/(1-r)$ ，跟隨廠商已無多餘產能，因此有效需求等於 k_F ，超過產能的需求爲 $(1-r)q - k_F$ ，即灰影三角形部分，將流往領導廠商。圖中，$\hat{d}_L$ 與 $\hat{d}_F$ 爲廠商的有效需求曲線，也代表不確定需求的配給法則。這樣的配給法則在文獻上常見，例如 (Driver and Goffinet, 1998)，但是對跟隨廠商而言，其產能抉擇完全不受領導廠商產能抉擇的影響，圖 2 的配給法則

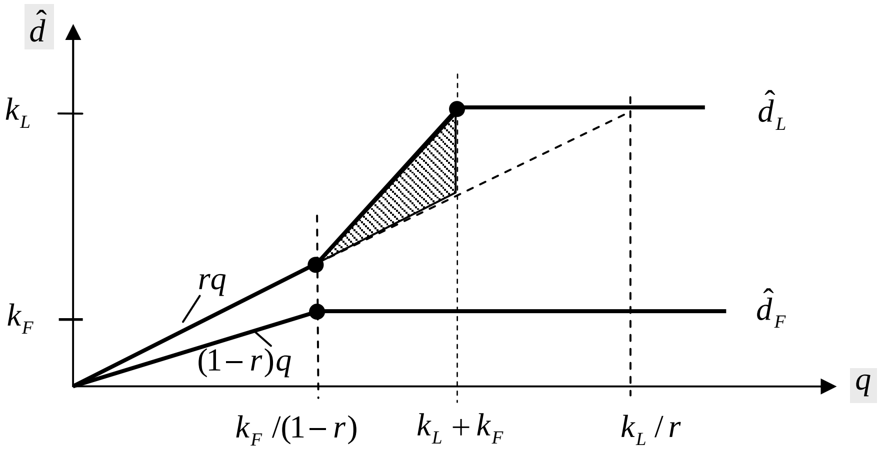


圖 2　雙佔產業兩家廠商無競爭的需求配給

並未顯出廠商的競爭行爲。本文在下一節將考量產能服務競爭、定義新的需求配給法則，然後討論兩家廠商產能抉擇的互動、建構數學理論模式、推導一家廠商對另一廠商產能抉擇的對策，得到兩個廠商擴產行爲的反應函數。

3. 以產能服務為考量的需求配給模型

面對隨機需求的機率分佈函數，產能水準以產能短缺機率(α ，$1\geq\alpha\geq 0$)與需求期望值表示。在本文，產能決策變數係由三個要素組成：(1)市場需求、(2)市佔率、(3)短缺機率。產能水準爲這三個要素的乘積：

$$k_L = r\overline{q}\cdot Z_L; \qquad k_F = (1-r)\overline{q}\cdot Z_F$$

其中$\overline{q}$ 爲需求之期望值，$r\overline{q}$ 與$(1-r)\overline{q}$ 分別爲兩家廠商所面對的需求的平均值，Z 爲產能的決策變數，即$F(Z_L)=1-\alpha_L$ 及$F(Z_F)=1-\alpha_F$ 。利用此函式，Z 值可視爲爲正規化後的產能決策變數，代表需求平均值的一個乘數。當兩家廠商的 Z 值皆等於 1，總供給等於平均需求。由於廠商 L 的規模比廠商 F 大，所以下文假設 $Z_L \geq Z_F$ 。這個假設不損本節理論建構程序的一般性。

3.1　以產能服務的能耐差距為考量的配給法則

考量產能服務競爭的配給法則如圖 3 所示。對符合 $Z_L \geq Z_F$ 條件的數對(Z_F, Z_L) ，令$q_1=\overline{q}Z_F$ 、$q_2=$ $r\overline{q}Z_L+(1-r)\overline{q}Z_F$ 、$q_3=\overline{q}Z_L$ 。這三個數量有實際意涵。若廠商 L 採取 Z_L ，

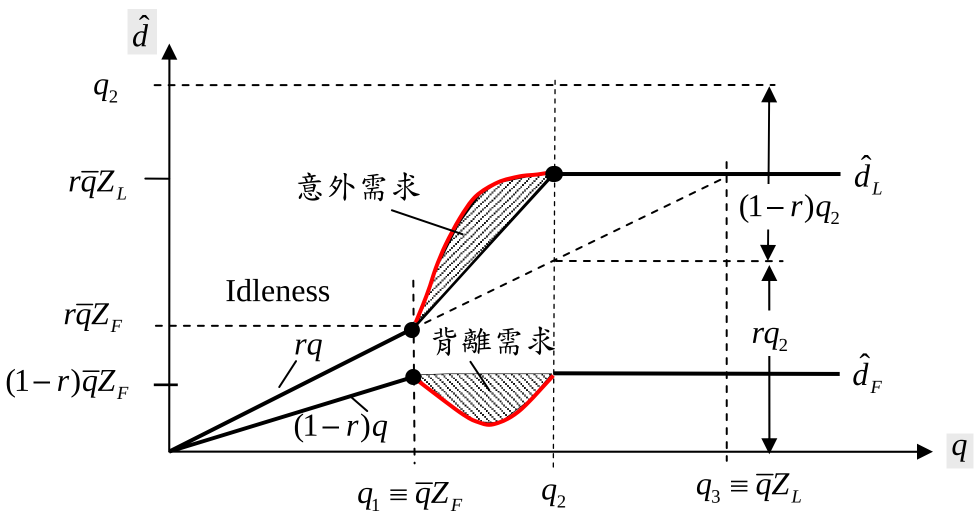


圖 3　廠商 **L** 與廠商 **F** 的有效需求函數

而廠商 F 採取 Z_F ，則總產能供給將會等於 q_2 。假如兩家廠商皆選擇 Z_L ，則總供給將爲 q_3 。相對地，若兩廠商皆選擇 Z_F ，總供給爲 q_1 。令下標 D 代表雙佔市場，則總產能供給可寫爲 $k_D = k_L + k_F$ ，且 $Z_D = rZ_L + (1-r)Z_F$ 。

需求的配給係按照產能供給區分爲三個情境。當 $q < q_1$，兩家廠商所面對之需求皆小於其產能。當 $q \geq q_2$ ，兩家廠商所面對之需求皆大於其產能。在這兩個情境，競爭行爲不致發生，需求係以歷史市佔率或建置之產能進行分配。當 $q_1 < q < q_2$ ，跟隨廠商發生產能短缺，而領導廠商有超額產能。由於廠商 F 的部分客戶轉向領導廠商，其有效需求將因此而減損 (impaired)。由於本文所討論的需求不是零售需求，而是委託生產的較大量的需求，一旦客戶有憂慮，訂單移轉的效果是有效需求會下降（如圖 3），而不是保持在產能水準（如圖 2）。然而，隨著需求 q 的繼續增加，領導廠商的超額產能將被耗盡，因此跟隨廠商的配給將先遞減再遞增。當需求等於總產能 q_2，跟隨廠商的配給將回復到其產能水準(1-r) q_1。在圖 3，跟隨廠商有背離需求 (defected demand) 的損失，而領導廠商獲得意外需求，我們可將跟隨廠商之有效需求函數訂爲：

$$\hat{d}_F(q) = \begin{cases} (1-r)q & \text{if } q \leq q_1 \\ (1-r)(q - q_2 + q_1 q_2 / q) & \text{if } q_1 < q \leq q_2 \\ (1-r)q_1 & \text{if } q_2 < q \end{cases} \tag{1}$$

領導廠商之有效需求函數爲：

$$\hat{d}_L(q) = \begin{cases} rq & \text{if } q \leq q_1 \\ rq + (1-r)(q_2 - q_1 q_2 / q) & \text{if } q_1 < q \leq q_2 \\ rq_3 & \text{if } q_2 < q \end{cases} \tag{2}$$

3.2 有效需求的期望值

一個廠商的有效需求的期望值可由有效需求函數求得。有效需求的期望值簡稱「期望有效需求」(expected effective demand)。領導廠商之期望有效需求爲

$$D_L = \int_0^{q_1} rq\, f(q)dq + \int_{q_1}^{q_2} [rq + (1-r)(q_2 - q_1 q_2 / q)] f(q)dq + \int_{q_2}^{\infty} rq_3\, f(q)dq$$

$$\begin{aligned} D_L &= r\int_0^{q_2} q\, f(q)dq + (1-r)\int_{q_1}^{q_2} (q_2 - q_1 q_2 / q)\, f(q)dq + r\int_{q_2}^{\infty} q_3\, f(q)dq \\ &= r\mu_q - r\int_{q_2}^{\infty} q\, f(q)dq + (1-r)\int_{q_1}^{q_2} q_2\, f(q)dq - (1-r)q_1 q_2 \int_{q_1}^{q_2} q^{-1}\, f(q)dq + rq_3[1 - F(q_2)] \end{aligned}$$

其中，前兩個積分項可進一步簡化：

$$
\begin{aligned}
&-r\int_{q_2}^{\infty} q\, f(q)dq + (1-r)\int_{q_1}^{q_2} q_2\ f(q)dq \\
&= -r\int_{q_2}^{\infty} q\, f(q)dq + (1-r)\int_{q_1}^{\infty} q_2\ f(q)dq - (1-r)\int_{q_2}^{\infty} q_2\ f(q)dq \\
&= -r\int_{q_2}^{\infty} (q-q_2)\, f(q)dq + (1-r)\int_{q_1}^{\infty} q_2\ f(q)dq - \int_{q_2}^{\infty} q_2\ f(q)dq \\
&= -r\cdot g(q_2) + (1-r)q_2(1-F(q_1)) - q_2(1-F(q_2))
\end{aligned}
$$

令 $E_q(q_1,q_2)=\int_{q_1}^{q_2}\frac{1}{q}\, f(q)dq$ 。

$$D_L = r\mu_q - rg(q_2) - (1-r)q_1[1-F(q_2)] + (1-r)q_2[1-F(q_1) - q_1E_q(q_1,q_2)] \tag{3}$$

跟隨廠商之期望有效需求爲：

$$
\begin{aligned}
D_F &= \int_0^{q_1}(1-r)q\ f(q)dq + \int_{q_1}^{q_2}(1-r)(q-q_2+q_1q_2/q)\ f(q)dq + \int_{q_2}^{\infty}(1-r)q_1\ f(q)dq \\
&= \int_0^{q_2}(1-r)q\ f(q)dq - (1-r)\int_{q_1}^{q_2}(q_2 - q_1q_2/q)\ f(q)dq + \int_{q_2}^{\infty}(1-r)q_1\ f(q)dq \\
&= (1-r)\ \{\mu_q - [\int_{q_2}^{\infty} q\ f(q)dq] + \int_{q_1}^{q_2} q_2\, f(q)dq + q_1q_2E_q(q_1,q_2) + q_1[1-F(q_2)]\}
\end{aligned}
$$

其中，兩個積分項可進一步簡化：

$$\int_{q_2}^{\infty} q\ f(q)dq + \int_{q_1}^{\infty} q_2\ f(q)dq - \int_{q_2}^{\infty} q_2\ f(q)dq = g(q_2) + q_2[1-F(q_1)]$$

因此，

$$D_F = (1-r)\{\mu_q - g(q_2) - q_2[1-F(q_1) - q_1\cdot E_q(q_1,q_2)] + q_1[1-F(q_2)]\} \tag{4}$$

將公式(3)與(4)的期望有效需求函示代入產能擴充的利潤函數，可得利潤函數的函式 (functional expression) 如下:

$$\pi_i(k) = p_i\cdot D_i - c_i\cdot k_i \quad i\in\{F,L\} \tag{5}$$

4. 雙佔廠商的反應函數

公式(3)與(4)均包含產能決策變數 Z_L 與 Z_F ，兩家廠商的產能抉擇互相影響。當廠商L選取一個 Z_L 值，廠商F可利用其利潤函數（公式5）選擇最佳之 Z_F 。對 Z_L 值域各個可能的值進行同樣計算，可得一系列的 Z_F ，這也就是廠商F的反應函數。廠商L的反應函數也可用同樣方法求得。

本節將針對對數常態需求的情境，推導廠商的反應函數。首先定義一些數學符號：

$f(q)$ 或 $f(q;\mathrm{m},\mathrm{s})$：需求的機率分配函數

$\mathrm{F}(q)$：需求的累積機率分配函數

$\phi(y)$ ：標準常態分配

$\Phi(y)$ ：標準常態變數的累積機率分配函數

若q爲對數常態隨機變數，機率分配爲 $f(q;m,s^2)$ ，其中 m 和 s爲相對應的常態分配之參數 (平均值與標準差)，則 $\ln(q)$ 服從常態分配。令 $y=[\ln(q)-m]/s$ ，則 y 爲標準常態隨機變數。以$\phi(\cdot)$與$\Phi(\cdot)$表示標準常態分配之機率密度函數與累積密度函數。由機率理論，已知對數常態分配具以下特性：

- 平均值爲 $\mu_q=e^{m+s^2/2}$
- 部份期望值爲 $g(k)=\exp(m+\frac{s^2}{2})\cdot\Phi(\frac{-\ln(k)+m+s^2}{s})-k\cdot\Phi(\frac{-\ln(k)+m}{s})$

以下的推導將用到一些有關q、y 與 Z 之間數學關係式，條列如下：

(1) $F(q)=\Phi(y)$； $f(q)=\phi(y)(sq)^{-1}$

(2) $\overline{q}\cdot e^{s^2/2-m}=e^{s^2/2+m}e^{s^2/2-m}=e^{s^2}$

(3) $q_1\cdot e^{s^2/2-m}=Z_F\,\overline{q}\cdot e^{s^2/2-m}=Z_F e^{s^2}$

(4) $q_2\cdot e^{s^2/2-m}=Z_D\,\overline{q}\cdot e^{s^2/2-m}=Z_D e^{s^2}$

(5) $e^{s^2/2-m}\phi(y+s)=e^{s^2/2-m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y+s)^2/2}=e^{-ys-m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}=q^{-1}\phi(y)$

(6) $e^{s^2/2-m}\phi(y+s)(qs)^{-1}=q^{-1}\phi(y)(qs)^{-1}=q^{-1}f(q)$

廠商的反應函數係由優化利潤函數求得，而利潤函數最關鍵的項目就是期望有效需求，先推導有效需求的一階導式（詳細步驟參見附錄）：

$$\frac{\partial D_L}{\partial Z_L}=r\overline{q}\cdot\{1-F(q_1)-r(F(q_2)-F(q_1))-(1-r)q_1E_q(q_1,q_2)\}$$

$$\frac{\partial D_F}{\partial Z_F}=(1-r)\overline{q}\ \{1-F(q_2)-(1-r)[F(q_2)-F(q_1)]+[(1-r)q_1+q_2]E_q(q_1,q_2)\}$$

其中，$E_q(q_1,q_2)=e^{s^2/2-m}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$。

4.1 領導廠商的反應函數

領導廠商的反應函數係由優化利潤函數求得。令$\partial\pi_L/\partial Z_L=0$ ，可得

$$p_L \cdot \frac{\partial D_L}{\partial Z_L} - c_L \cdot \frac{\partial K_L}{\partial Z_L} = p_L \cdot \frac{\partial D_L}{\partial Z_L} - c_L r\overline{q} = 0$$

進行簡化，

$$1 - F(q_1) - r[F(q_2) - F(q_1)] - (1-r)q_1 \cdot E_q(q_1, q_2) - c_L / p_L = 0$$

$$1 - F(q_1) - r[F(q_2) - F(q_1)] - (1-r)q_1 \cdot e^{s^2/2-m} \cdot [\Phi(y_2 + s) - \Phi(y_1 + s)] - c_L / p_L = 0$$

$$1 - F(q_1) - r[F(q_2) - F(q_1)] - (1-r)Z_F e^{s^2} \cdot [\Phi(y_2 + s) - \Phi(y_1 + s)] - c_L / p_L = 0$$

$$r\Phi(y_2) + (1-r)Z_F e^{s^2} \Phi(y_2 + s) = 1 - (1-r)\Phi(y_1) + (1-r)Z_F e^{s^2} \Phi(y_1 + s) - c_L / p_L$$

最後可得

$$a(1-r)\Phi(y_2 + s) + r\Phi(y_2) = 1 - c_L / p_L + (1-r)[a \cdot \Phi(y_1 + s) - \Phi(y_1)] \tag{6}$$

其中，$a = Z_F e^{s^2}$。對一個給定的 Z_F 值，上式等號之右方為常數，而 $\Phi(y_2 + s)$ 及 $\Phi(y_2)$ 隨 Z_L 單調漸增，因此可求解上式之 y_2。將 y_2 代回下式可得最適的 Z_L：

$$Z_L{*} = (r\overline{q})^{-1}[q_2 - (1-r)\overline{q}Z_F] = (r\overline{q})^{-1}[e^{y_2 s+m} - (1-r)\overline{q}Z_F]$$

以下證明領導廠商的反應函數為負斜率。

定理 1: 領導廠商的反應函數為負斜率

(證明)

等式(6)的右方函式之中，$Z_F e^{s^2}\Phi(y_1 + s) - \Phi(y_1)$ 隨 Z_F 增加而單調漸增。這可由其一階導式得知：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[Z_F e^{s^2}\Phi(y_1 + s) - \Phi(y_1)]}{\partial Z_F} &= e^{s^2}\Phi(y_1 + s) + Z_F e^{s^2}\phi(y_1 + s)(q_1 s)^{-1}\overline{q} - \phi(y_1)(q_1 s)^{-1}\overline{q} \\
&= e^{s^2}\Phi(y_1 + s) + q_1 e^{s^2/2-m}\phi(y_1 + s)(q_1 s)^{-1}\overline{q} - f(q_1)\overline{q} \\
&= e^{s^2}\Phi(y_1 + s) + q_1 q_1^{-1} f(q_1)\overline{q} - f(q_1)\overline{q} > 0
\end{aligned}$$

因此，公式(6)右方函式的值將隨 Z_F 上升而增加。

左方函式 $Z_F e^{s^2}(1-r)\Phi(y_2 + s) + r\Phi(y_2)$ 亦隨 Z_F 上升而單調漸增。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Z_F}[Z_F e^{s^2}\cdot\Phi(y_2+s)+r\Phi(y_2)] \\
&= e^{s^2}\Phi(y_2+s)+Z_F e^{s^2}\phi(y_2+s)(q_2 s)^{-1}(1-r)\overline{q}+r\phi(y_2)(q_2 s)^{-1}(1-r)\overline{q} \\
&= e^{s^2}\Phi(y_2+s)+q_1 e^{s^2/2-m}\cdot\phi(y_2+s)(q_2 s)^{-1}(1-r)\overline{q}+rf(q_2)(1-r)\overline{q} \\
&= e^{s^2}\Phi(y_2+s)+[q_1 q_2^{-1}+r]f(q_2)\cdot(1-r)\overline{q}>0
\end{aligned}
$$

比較兩方函式隨 Z_F 上升而增加的速率，

$$
e^{s^2}\Phi(y_2+s)+[q_1 q_2^{-1}+r]f(q_2)(1-r)\overline{q}>e^{s^2}\Phi(y_2+s)>e^{s^2}\Phi(y_1+s)
$$

當 Z_F 上升，兩方函式的值皆增加，但右方增加的速率較慢。爲維持等式爲真， y_2 必須隨 Z_F 上升而降低。因此，廠商*L*的反應函數爲負斜率。 **(#)**

4.2 跟隨廠商的反應函數

與上節同理，令 $\partial\pi_F/\partial Z_F=0$ ，可得跟隨廠商之反應函數。

$$
1-\Phi(y_2)-(1-r)[\Phi(y_2)-\Phi(y_1)]+[(1-r)q_1+q_2]E_q(q_1,q_2)=c_F/p_F
$$

進行簡化，

$$
\begin{aligned}
&1+(1-r)\Phi(y_1)-(1-r)Z_F e^{s^2}\Phi(y_1+s)-c_F/p_F \\
&=(2-r)\Phi(y_2)-(1-r)Z_F e^{s^2}\Phi(y_2+s)-q_2 e^{s^2/2-m}[\Phi(y_2+s)-e^{s^2/2-m}\Phi(y_1+s)]
\end{aligned}
$$

已知 $e^{s^2/2-m}\cdot\overline{q}=e^{s^2/2-m}\cdot e^{m+s^2/2}=e^{s^2}$ ，所以

$$
\begin{aligned}
&\Phi(y_2)+(1-r)[\Phi(y_2)-\Phi(y_1)] \\
&\quad -[2(1-r)Z_F+rZ_L]e^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]=1-c_F/p_F
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $y_1=s/2+\ln(Z_F)/s$ ， $y_2=s/2+\ln[rZ_L+(1-r)Z_F]/s$ 。爲求解跟隨廠商的反應函數，對公式(7)求取一階導式。微分式的第一項(以 A 表示)可表示爲：

$$
\begin{aligned}
(A)\quad &\frac{\partial}{\partial Z_F}\{\Phi(y_2)+(1-r)[\Phi(y_2)-\Phi(y_1)]\} \\
&=(2-r)\phi(y_2)(q_2 s)^{-1}(1-r)\overline{q}-(1-r)\phi(y_1)(q_1 s)^{-1}\overline{q} \\
&=(1-r)\overline{q}\cdot[(2-r)f(q_2)-f(q_1)]
\end{aligned}
$$

第二項微分式為：

$$\frac{\partial}{\partial Z_F}[2(1-r)Z_F+rZ_L]e^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=2(1-r)e^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$+[(1-r)Z_F+Z_D]e^{s^2}[\phi(y_2+s)(q_2s)^{-1}(1-r)\overline{q}-\phi(y_1+s)(q_1s)^{-1}\overline{q}]$$

等式右方的第一項(以B表示)隨 Z_F 上升而遞減。第二項(以C表示)可展開為：

$$(C)\quad [(1-r)Z_F+Z_D]e^{s^2}[\phi(y_2+s)(q_2s)^{-1}(1-r)\overline{q}-\phi(y_1+s)(q_1s)^{-1}\overline{q}]$$
$$=[(1-r)q_1+q_2]e^{s^2/2-m}[\phi(y_2+s)(q_2s)^{-1}(1-r)\overline{q}-\phi(y_1+s)(q_1s)^{-1}\overline{q}]$$
$$=[(1-r)^2q_1q_2^{-1}+(1-r)]\overline{q}f(q_2)-[(1-r)+q_2q_1^{-1}]\overline{q}f(q_1)$$

所以(A-C)/ $\overline{q}$ (即A減C，再除以 $\overline{q}$)為：

$$(1-r)[(2-r)f(q_2)-f(q_1)]-[(1-r)^2q_1q_2^{-1}+(1-r)]f(q_2)+[(1-r)+q_2q_1^{-1}]f(q_1)$$
$$=\{(1-r)(2-r)-[(1-r)^2q_1q_2^{-1}+(1-r)]\}f(q_2)\ +\{-(1-r)+[(1-r)+q_2q_1^{-1}]\}f(q_1)$$
$$=(1-r)^2(1-q_1q_2^{-1})f(q_2)+q_2q_1^{-1}f(q_1)>0$$

因為r<1且 $q_1q_2^{-1}<1$ ，所以(A-C)為正值。公式(7)左方函式的一階導式(即A-B-C)隨 Z_F 上升而單調漸增。因此對一個給定的 Z_L 值，可求得最佳的 Z_F 解。

定理 2: 若 $\int_{q_1}^{q_2}q^{-1}f(q)dq\geq(1-r)(1-q_1/q_2)f(q_2)$ ，跟隨廠商的反應函數為正斜率

(證明)

公式(7)可改寫為：

$$(2-r)\Phi(y_2)-[2(1-r)Z_F+rZ_L]e^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=1-c_F/p_F+(1-r)\Phi(y_1) \tag{8}$$

其中， $\Phi(y_1)$ 與 Z_L 為相互獨立。對上式求取 Z_L 的一階導式，可得：

$$(A)\quad \frac{\partial}{\partial Z_L}(2-r)\Phi(y_2)=(2-r)\phi(y_2)\cdot(q_2s)^{-1}r\overline{q}=(2-r)r\overline{q}f(q_2)$$

$$(B)\quad \frac{\partial}{\partial Z_L}[2(1-r)Z_F+rZ_L]e^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=re^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+[(1-r)Z_F+Z_D]e^{s^2}\phi(y_2+s)(q_2s)^{-1}r\overline{q}$$
$$=re^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+[(1-r)q_1+q_2]e^{s^2/2-m}\phi(y_2+s)(q_2s)^{-1}r\overline{q}$$
$$=re^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+[(1-r)q_1q_2^{-1}+1]r\overline{q}f(q_2)$$

將A減去B：

$$(2-r)r\overline{q}f(q_2)-re^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]-[(1-r)q_1q_2^{-1}+1]r\overline{q}f(q_2)$$
$$=[(2-r)-(1-r)q_1q_2^{-1}-1]r\overline{q}f(q_2)-re^{s^2}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=(1-r)(1-q_1q_2^{-1})r\overline{q}f(q_2)-r\overline{q}(\overline{q}^{-1}e^{s^2})[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=r\overline{q}[(1-r)(1-q_1q_2^{-1})f(q_2)-E_q(q_1,q_2)]$$

若本定理的前提成立，即$\int_{q_1}^{q_2}q^{-1}f(q)dq\geq(1-r)(1-q_1/q_2)f(q_2)$，則

$$E_q(q_1,q_2)\geq(1-r)(1-q_1q_2^{-1})f(q_2)$$
$$A-B\leq 0$$

所以，公式(8)的左方函式將隨 Z_L 增加而遞減。

當 Z_L 從某個均衡點水準往上增加，若要維持等式的成立，則必須調整 Z_F。已知公式(8)的右方函式隨 Z_F 增加而漸增，所以廠商*F*的反應將是增大 Z_F。

因此，跟隨廠商的反應函數爲正斜率。 **(#)**

5. 產能服務能耐之競爭行為

本節以產業數據 (Chou *et al.*, 2007) 建立數值範例，驗證前述的理論，並分析廠商的可能競爭行爲，參數數值設定如下：

單位利潤 (*p*)： 1000 (firm *L*), 800 (firm *F*)

單位產能成本 (*c*)： 681.6 (firm *L*), 578.0 (firm *F*)

需求參數： m =1.7249, s^2 =0.3762

設定市佔率參數 r = 0.7。兩家廠商的反應函數如圖 4 所示。反應曲線的交點即爲兩家廠商最適產能的均衡組合。

最適的 Z 值可由公式(6)及公式(7)聯立求得。先將兩式合爲一式：

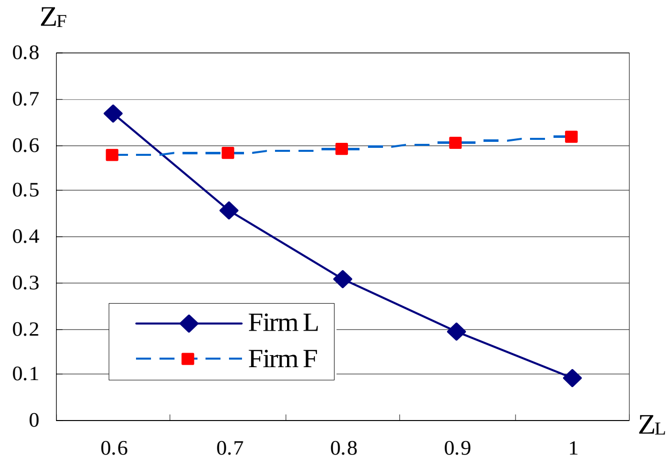


圖 4　廠商的反應函數

$$
\begin{aligned}
&[2+r+r^2(1-r)^{-1}Z_F{}^{-1}Z_L]\Phi(y_2)+[(1-r)+rZ_F{}^{-1}Z_L]\Phi(y_1) \\
&-(1-c_L/p_L)r(1-r)^{-1}Z_F{}^{-1}Z_L=1-c_F/p_F+2(1-c_L/p_L)
\end{aligned} \tag{9}
$$

將 Z_F 當作輸入數據，則公式(10)可改寫為：

$$(2+r+a\cdot Z_L)\Phi(y_2)+bZ_L=c \tag{10}$$

其中，參數 $a=r^2(1-r)^{-1}Z_F{}^{-1}$、$b=r[\Phi(y_1)-(1-c_L/p_L)(1-r)^{-1}]Z_F{}^{-1}$、$c=1-c_F/p_F+2(1-c_L/p_L)-(1-r)\Phi(y_1)$。由於係數 a 必為正值，所以公式(10)中的第一項將隨 Z_L 增加而單調漸增，第二項為線性，因此存在惟一解。求解程序有三個步驟：(1)估計圖 4 均衡點的 (Z_F,Z_L) 值，(2) 將所估計的 Z_F 當作輸入數據，利用公式(10)求算 Z_L，(3) 比較前兩步驟所得的 Z_L 值，如果差異仍大，調整 Z_F。由於公式(9)的函式均為單調增減，這個程序會收斂。

數值範例

在圖 4 中，估計最適解組合為 (Z_L,Z_F) = (0.6835, 0.5924)。可得 q_1 = 4.0129；q_2 = 4.4450；q_3 = 4.6302；$\overline{q}=6.7736$；y_1 = -0.5468；y_2 = -0.3800。將 Z_F =0.5924 代入公式(11)，可得 $Z_L=0.6836$，非常接近估計值，因此最適組合取 (Z_L*, Z_F*) = (0.6836, 0.5924)。

利用均衡點數據，驗證定理2的條件式是否滿足：

$$q_2e^{s^2/2-m}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]\geq(q_2-q_1)(1-r)\phi(y_2)(sq_2)^{-1}$$

$$4.708 \cdot e^{-1.5368}[\Phi(.3270)-\Phi(-.2820)] \geq (1.4675)(.4)\phi(-.2864)(.6133*4.708)^{-1}$$

$0.06285 > 0.01766$　滿足條件式。　**(#)**

雙佔廠商的產能競爭行爲可由反應函數及均衡解推理。由於跟隨廠商的反應函數爲正斜率，所以當領導廠商採取較均衡解更爲激進的產能水準，跟隨廠商將同時提高其產能水準，以防止其客戶流失。此結果可由圖 3 的有效需求函數得到驗證。跟隨廠商有效需求的最低點將隨 Z_L 的增加而下降，背離需求增加。爲防止客戶流失，跟隨廠商勢必提高其 Z_F 。可是提高 Z_F 的結果是， q_1 以左的面積增加，產能平均利用率也將下降。圖 5 是跟隨廠商在圖 4 反應函數五個點所相對應的利潤，當領導廠商的 Z_L 值由 0.6 增加到 1.0，跟隨廠商的 Z_L 也隨著增加，但是利潤卻下降。跟隨廠商將面臨兩難的問題：即維持產能利用率與減少背離需求兩者孰重要的權衡問題。領導廠商的反應函數爲負斜率，所以 Z_F 增加，廠商 L 將選擇降低 Z_L 。相反地，如果廠商 L 選擇增加 Z_L ，雖然有效需求將因此增加，但產能利用率將下降。降低 Z_L 的舉措是合理的，因爲在 $q_2 > q \geq q_1$ 情境，廠商 L 已有超額產能，對產能利用率的顧慮顯然會重於意外需求的可能溢酬。當跟隨廠商採取激進的產能擴充，領導廠商會採取較爲保守的反應，以避免產業總供給過剩，並任由跟隨廠商承擔易變需求所暗含的風險。

兩家廠商的反應函數包含 p、 c、 m 及 s 等參數。以下進行敏感度分析。當成本/價格(c/p)比愈低，由公式(6)及公式(7)的等式右方的函式可看出反應函數將向上方位移，因爲右方函式愈大，會對應到較大的 Z 值。已知 $y_1 = s/2+\ln(Z_F)/s$ ，且 $y_2 = s/2+\ln[rZ_L+(1-r)Z_F]/s$ ，所以參數 m 的影響主要是在平均需求之上，由廠商之反應函數可知，參數 m 的改變不會影響反應函數。圖 6 顯示需求變異參數 s 對反應函數的影響。當需求變異愈大，即 s 值愈高，將驅使兩家廠商採取更保守的產能策略。

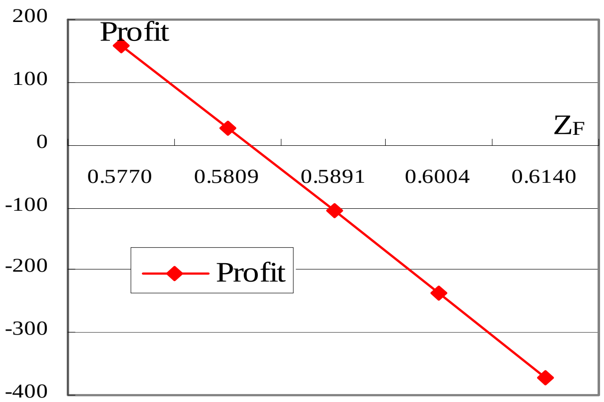
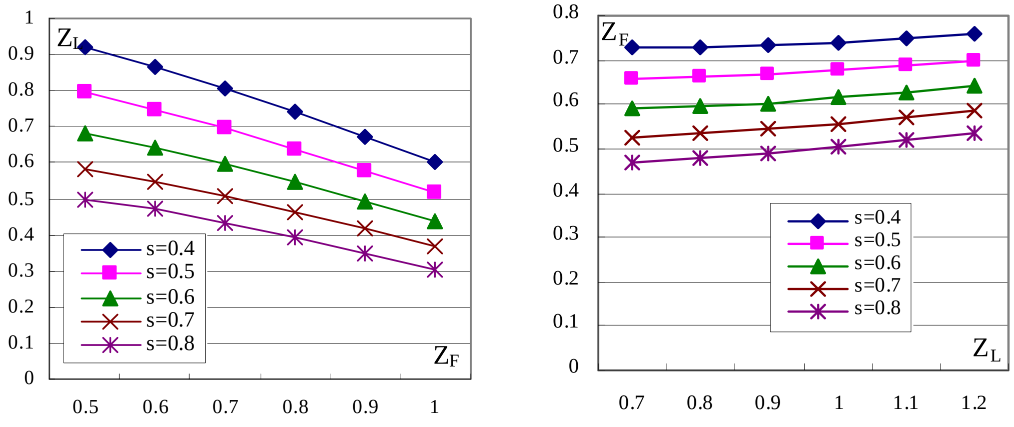


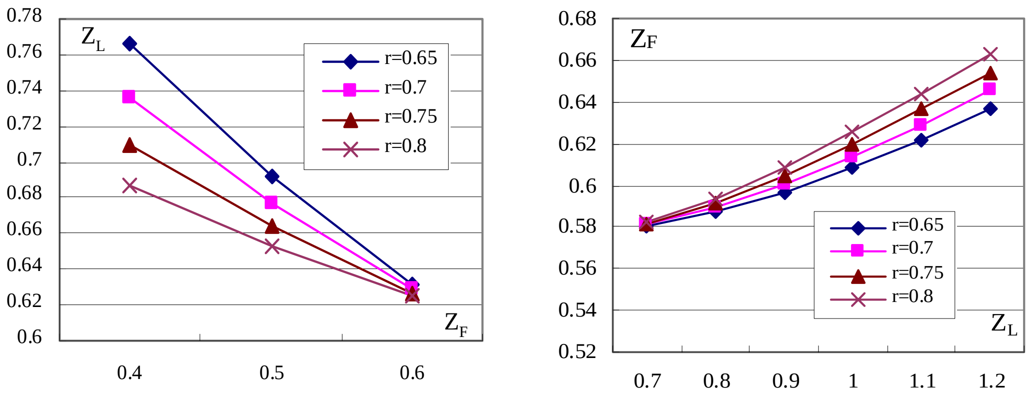
圖 5　跟隨廠商激進產能擴充策略對利潤的影響



(a) Firm *L*　　(b) Firm *F*

圖 6　需求變異的對反應函數的影響

廠商規模參數 *r* 對反應函數有顯著的影響。圖 7 的反應曲線呈現發散的形態，例如，*r* = 0.65 的曲線斜率較 *r* = 0.8 的斜率更為陡峭。此種現象有兩種意涵：(1)當廠商 *F* 採取激進的對應策略以減少背離需求，其激進程度與其相對規模成反比（右圖），規模愈小，防衛行為可能需更激烈；(2)對於一個固定的 Z_F 值，最適的 Z_L 將隨廠商規模上升而下降（左圖），也就是說，如果領導廠商的規模愈大，對跟隨廠商的舉措愈沒有必要作出激烈反應。另外，這兩種意涵效果將隨 Z_F 增加而逐漸衰減。



(a) Firm *L*　　(b) Firm *F*

圖 7　廠商相對規模對反應函數的影響

6. 討論與結論

本文從產品公司與製造服務廠商的協作觀點，討論專業製造之產能服務能耐問題。在不確定的產業環境，產品公司與製造服務廠商之間的協同合作需要確定的產能供應才能達成。本文以產能供應的能耐作爲製造服務廠商之間競爭的要素。一般而言，產能競爭將使產業總供給上升，因此也將有利於產品公司。

本文提出一個基於產能服務能耐差距的競爭策略理論，產能服務能耐差距影響需求配給，本文提出一個新穎的非線性需求配給法則。另外本文針對對數常態需求，推導有效需求函數。本文證明：

- 對於雙佔製造服務廠商，存在產能擴充的均衡解。
- 領導廠商的反應函數爲負斜率，而跟隨廠商反應函數爲正斜率。

當跟隨廠商採行激進的產能擴充，領導廠商會有相對保守的反應，以避免產業總供給過剩，並任由跟隨廠商承擔易變需求所隱含的風險，而當領導廠商採行激進的擴充，跟隨廠商可能同樣採取激進行爲，以防止其客戶流失，但是總產能供應將因此增加，兩家廠商的產能利用率將下降，對利潤造成負面影響，對利潤或成本結構較弱的廠商最爲不利。跟隨廠商將面臨兩難的問題：即維持產能利用率與減少背離需求兩者孰重要的權衡問題。

附錄： 期望有效需求的偏微分

廠商 L 有效需求的期望值爲

$$D_L = r\mu_q - rg(q_2) - (1-r)q_1[1-F(q_2)] + (1-r)q_2[1-F(q_1) - q_1E_q(q_1,q_2)]$$

其中，$E_q(q_1,q_2) = \int_{q_1}^{q_2} q^{-1}\, f(q)dq = \int_{q_1}^{q_2} q^{-1} \frac{1}{qs\sqrt{2\pi}} \exp[\frac{-(\ln q - m)^2}{2s^2}]dq$

令 $y = [\ln(q) - m]/s$、$dy = (qs)^{-1}dq$、$q = e^{sy+m}$、$y_1 = (\ln q_1 - m)/s$，及 $y_2 = (\ln q_2 - m)/s$。可得

$$\begin{aligned}\int_{q_1}^{q_2} q^{-1}\, f(q)dq &= \int_{y_1}^{y_2} e^{-(sy+m)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}dy = e^{-m}\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(s+y)^2/2} e^{s^2/2}dy \\ &= e^{s^2/2-m}\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(s+y)^2/2}dy = e^{s^2/2-m}\int_{y_1+s}^{y_2+s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}du\end{aligned}$$

其中，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ 爲常態隨機變數 u 的機率密度函數。因此

$$E_q(q_1,q_2)=\int_{q_1}^{q_2} q^{-1}\ f(q)dq=e^{s^2/2-m}\cdot[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$

$$D_L=r\mu_q-rg(q_2)-(1-r)q_1[1-F(q_2)]+(1-r)q_2[1-F(q_1)]$$
$$-(1-r)q_2q_1\cdot e^{s^2/2-m}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$

$$\frac{\partial D_L}{\partial Z_L}=-r\frac{\partial g(q_2)}{\partial Z_L}+(1-r)q_1 f(q_2)\cdot r\overline{q}+(1-r)r\overline{q}[1-F(q_1)]$$
$$-(1-r)q_1\cdot e^{s^2/2-m}\frac{\partial}{\partial Z_L}q_2[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$

其中，$\partial g(q_2)/\partial Z_L$ 及 $\partial[q_2(\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s))]/\partial Z_L$ 可進一步簡化。

因爲 $g(k)=\exp(m+\frac{s^2}{2})\cdot\Phi(\frac{-\ln(k)+m+s^2}{s})-k\cdot\Phi(\frac{-\ln(k)+m}{s})$ ，所以

$$\frac{\partial g(q_2)}{\partial Z_L}=\frac{\partial g(q_2)}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial Z_L}=[-1+\Phi(y_2)]\cdot r\overline{q}=-(1-F(q_2))r\overline{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_L}q_2[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]=r\overline{q}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+q_2\phi(y_2+s)(sq_2)^{-1}r\overline{q}$$

$$q_1\cdot e^{s^2/2-m}\frac{\partial}{\partial Z_L}q_2[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]$$
$$=q_1\cdot e^{s^2/2-m}r\overline{q}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+q_1e^{s^2/2-m}q_2\phi(y_2+s)(sq_2)^{-1}r\overline{q}$$
$$=r\overline{q}q_1e^{s^2/2-m}[\Phi(y_2+s)-\Phi(y_1+s)]+q_1q_2q_2^{-1}f(q_2)r\overline{q}$$
$$=r\overline{q}q_1E_q(q_1,q_2)+r\overline{q}q_1 f(q_2)$$

$$\frac{\partial D_L}{\partial Z_L}=r^2\overline{q}[1-F(q_2)]+(1-r)r\overline{q}q_1 f(q_2)+(1-r)r\overline{q}[1-F(q_1)]$$
$$-(1-r)r\overline{q}q_1\cdot E_q(q_1,q_2)-(1-r)r\overline{q}q_1 f(q_2)$$
$$=(1-r)r\overline{q}[1-F(q_1)]+r^2\overline{q}[1-F(q_2)]-(1-r)r\overline{q}q_1\cdot E_q(q_1,q_2)$$
$$=r\overline{q}\cdot\{(1-r)[1-F(q_1)]+r[1-F(q_2)]-(1-r)q_1E_q(q_1,q_2)\}$$

因此領導廠商之有效需求的一階導式爲

$$\frac{\partial D_L}{\partial Z_L}=r\overline{q}\cdot\{1-F(q_1)-r(F(q_2)-F(q_1))-(1-r)q_1E_q(q_1,q_2)\}$$

同理，

$$\frac{\partial D_F}{\partial Z_F}=(1-r)\{-\frac{\partial g(q_2)}{\partial Z_F}+\bar{q}(1-F(q_2))-q_1 f(q_2)(1-r)\bar{q}-(1-r)\bar{q}[1-F(q_1)]+q_2 f(q_1)\bar{q}$$
$$+\partial[q_2q_1E_q(q_1,q_2)]/\partial Z_F\}$$

$$\partial E_q(q_1,q_2)/\partial Z_F=e^{s^2/2-m}[\phi(y_2+s)(sq_2)^{-1}(1-r)\bar{q}-\phi(y_1+s)(sq_1)^{-1}\bar{q}]$$
$$=q_2^{-1}f(q_2)(1-r)\bar{q}-q_1^{-1}f(q_1)\bar{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_F}[q_2q_1\cdot E_q(q_1,q_2)]=[(1-r)\bar{q}q_1+q_2\bar{q}]E_q(q_1,q_2)+(1-r)\bar{q}q_1 f(q_2)-\bar{q}q_2 f(q_1)$$

由於 $\partial g(q_2)/\partial Z_F=[\partial g(q_2)/\partial q_2]\cdot[\partial q_2/\partial Z_F]=[-1+\Phi(y_2)]\cdot(1-r)\bar{q}$ ，因此

$$\frac{\partial D_F}{\partial Z_F}=(1-r)\ \{(1-r)\bar{q}\cdot[1-\Phi(y_2)]+\bar{q}[1-F(q_2)]-q_1 f(q_2)\cdot(1-r)\bar{q}-(1-r)\bar{q}[1-F(q_1)]$$
$$+q_2 f(q_1)\bar{q}+[(1-r)\bar{q}q_1+q_2\bar{q}]E_q(q_1,q_2)+(1-r)\bar{q}q_1 f(q_2)-\bar{q}q_2 f(q_1)\}$$
$$=(1-r)\bar{q}\ \{(1-r)\cdot[1-F(q_2)]+[1-F(q_2)]$$
$$-(1-r)[1-F(q_1)]+q_2 f(q_1)-[(1-r)q_1+q_2]E_q(q_1,q_2)-q_2 f(q_1)\}$$
$$=(1-r)\bar{q}\ \{(2-r)\cdot[1-F(q_2)]-(1-r)[1-F(q_1)]+[(1-r)q_1+q_2]E_q(q_1,q_2)\}$$
$$=(1-r)\bar{q}\ \{1-F(q_2)-(1-r)[F(q_2)-F(q_1)]+[(1-r)q_1+q_2]E_q(q_1,q_2)\}$$

參考文獻

Benavides, D. L., Duley, J. R., and Johnson, B. E., "As Good as It Gets: Optimal Fab Design and Deployment," *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 12, No. 3, 1999, pp. 281-287.

Chou, Y.-C., Cheng, C. T., Yang, F.-C., and Liang, Y.-Y., "Evaluating Alternative Capacity Strategies in Semiconductor Manufacturing under Uncertainty Demand and Price Scenarios," *International Journal of Production Economics*, Vol. 105, 2007, pp. 591-606.

Chou, Y.-C. and Wu, C.-S., "Economic Analysis and Optimization of Tool Portfolio in Semiconductor Manufacturing," *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 15, No. 4, 2002, pp. 447-453.

Crampes, C. and Hollander, A., "Duopoly and Quality Standards," *European Economic Review*, Vol. 39, No. 1, 1995, pp. 71-82.

Davidson, C. and Deneckere, R., "Long-run Competition in Capacity, Short-run Competition in Price, and the Cournot Model," *Rand Journal of Economics*, Vol. 17 No. 3, 1986, pp. 404-415.

De Borger, B. and Van Dender, K., "Prices, Capacities and Service Levels in a Congestible Bertrand Duopoly," Journal of Urban Economics, Vol. 60, 2006, pp. 264-283.

Driver, C. and Goffinet, F., "Investment under Demand Uncertainty, Ex-ante Pricing, and Oligopoly," *Review of industrial organization*, Vol. 13, No. 4, 1998, pp. 409-423.

Hicks, D. A., "Evolving Complexity and Cost Dynamics in the Semiconductor Industry," *IEEE Transaction on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 9, No. 3, 1996, pp. 294-302.

Hutcheson, J. D. and Hutcheson, G. D., "The Economic Dynamics of Semiconductor Manufacturing: Is Equipment Still Affordable," In *IEEE 1993 International Symposium on Semiconductor Manufacturing*, Austin, TX: VLSI Research Inc., 1993, pp. 107-118.

Karabuk, S. and Wu, D., "Coordinating Strategic Capacity Planning in the Semiconductor Industry," *Operations Research*, Vol. 51, No. 6, 2003, pp. 838-849.

Tirole, J., *The theory of industrial organization*, Cambridge, MA: MIT Press, 1988, pp. 212-214.

Van Mieghem, J. A. and Dada, M., "Price versus Production Postponement: Capacity and Competition," *Management Science*, Vol. 45, No. 12, 1999, pp. 1631-1649.