

# 考慮價格跳躍不對稱與波動狀態轉換之動態 資產配置

## Dynamic Asset Allocation Concerning Asymmetric Price Jumps and Volatility State Switch

蘇恩德 En-Der Su

國立高雄第一科技大學風險管理與保險系

Department of Risk Management and Insurance, National Kaohsiung First  
University of Science and Technology

(Received December 25, 2007; Final Version May 26, 2009)

**摘要：**動態隨機規劃模型須納入價格或波動的隨機過程以求解動態效用函數最適化問題。價格與波動隨機過程的應用尚須考慮市場普遍存有的非線性現象，例如，價格或波動的跳空、不對稱以及狀態轉換等。因此本文修正價格與波動雙跳躍隨機微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 模型另提出數個價格不對性或 (且) 波動狀態轉換的 SDE 模型並以台股指數 (TAIEX) 檢驗模型間的巢狀關係，結果發現：價格不對性與波動狀態轉換現象顯著存在但波動跳躍的現象極微，雙跳躍模型可修正為價格跳躍與波動狀態轉換模型。情境分析顯示資產配置比例逐期上升或下降是受價格與波動相關性為正或負值的影響。以速度、精確、收斂性較佳的修正尤拉數值法來解 TAIEX 動態資產配置比例；之後，運用此解並比較模型投資績效顯示：合併價格跳躍不對稱與波動狀態轉換效果之修正模型可大幅改善風險趨避程度大 (即保守性投資人)、規劃期長的投資績效，但加入單一效果之修正模型的績效無明顯改善。

**關鍵詞：**動態規劃、跳躍擴散隨機過程、事件風險、修正尤拉法、投資績效。

---

本文之通訊作者為蘇恩德，e-mail: suender@ccms.nkfust.edu.tw。

作者誠心感謝評審委員提供的審查意見，使本文理論更創新、論證更嚴謹、疏漏得以修正，並感謝學生黃鶯慧協助文書處理，不足之處由作者自行負責。

**Abstract:** The stochastic dynamic programming model should be able to consider both price and volatility stochastic processes to solve the problem of optimizing a dynamic utility function. Empirically, it is necessary to take into account potential nonlinear phenomena related to price and volatility, such as jumps, asymmetry and state switch, when applying these stochastic processes. In this paper, the price asymmetry and volatility state switch effects are incorporated separately or jointly into the price and volatility double-jump stochastic differential equation (SDE) in order to create several revised SDE models. The Taiwan stock index (TAIEX) is then used to test the nest hypothesis between the revised models. The test result supports that the price asymmetric and volatility state switch effects are significant but that the volatility jumps are very weak. This leads to the fact that the price asymmetry and volatility state switch SDE model is more reasonable. According to a scenario analysis, whether the dynamic weight would gradually go up or down depends on the sign of correlation between price and volatility. The modified Euler method is used to obtain optimal numerical solutions for the dynamic weight of TAIEX since it has shown better performance in terms of speed, accuracy, and convergence. Using these solutions, the investment performance comparisons between models show that the price asymmetry and volatility state switch adjusted model can substantially improve longer-term and more risk-averse (i.e., conservative) outcomes, and that the single effect adjusted models are unable to do so.

**Keywords:** Dynamic Programming, Jump-diffusion Stochastic Process, Event Risk, Modified Euler Method, Investment Performance

## 1. 緒論

由於科技進步投資人獲取資訊的管道充分、反應資訊的能力迅速，從市場交易相關的資訊媒體可觀察到當一偶發事件（例如，政經訊息的發佈、巨災突然發生等）出現後相關股價即時波動的情形，顯示金融市場的投資人對於突發事件會立即敏銳的做出判斷及產生反應，股價因此存在著某些偶發性的「跳躍 (jumps)<sup>1</sup> 模式」。實際觀察各交易所記錄的股價之漲跌幅度與價格缺口就可看出股價的走勢是有離散或間斷式 (discrete) 的跳躍即跳空過程，其走勢並非是連續的 (continuous) 常態隨機過程如同布朗運動的假定一般。

在市場中投資人所須面對且不可避免的風險主要是偶發事件所引起，當交易市場或盤後有重大消息發生時，股價就可能受影響產生一較大的「跳躍」走勢，此即是事件風險 (event risk)。

---

<sup>1</sup> 表示隨著時間經過，股價有時會因交易時間不連續或反應重大訊息突然大漲或大跌。

例如，1987年10月美國道瓊工業指數跌了近508點以及史坦普500股價指數跌了20%以上、又在1997年10月27日跌了近554點，1997年末亞洲金融風暴引起印尼、泰國、韓國的貨幣急貶150%以上等等，皆是明顯的事件風險的例子。在投資理財日漸為大眾所接受的今日，投資人持有股票、債券、各國貨幣來賺取報酬是相當普遍的事。然而事件風險是無可避免的，投資人在規劃投資理財時如何認知重大信息引起價格巨幅變動的投資風險與尋求較佳風險規避的投資策略就變得格外重要；相對的，投資規劃模型必須考慮事件風險，反應市場價格、波動變動等的非線性行為才能找出投資人的最適投資決策。

投資組合動態規劃的研究即是應用資產價格、波動與財富的隨機擴散過程，建構一動態效用函數最適化問題，以尋求個人動態投資比例的最適配置。實務上，事件風險確會發生也確是投資人必須面對與處理的風險，加入事件風險於投資組合動態規劃的研究實有必要。以下是本文研究的主要目的：(1)利用Liu *et al.* (2003) (本文簡稱LLP) 對Duffie *et al.* (2000) (本文簡稱DPS) 動態規劃問題所提出的效用函數的推測解與最適動態資產配置的常微分方程式，以數值演算法進一步求解最適動態資產配置比例。(2)以台股指數實證研究DPS模型的價格與報酬波動雙跳躍模型，另加入市場普遍存有的價格與波動不對稱的效果於DPS模型中以修正DPS模型在實證上的缺失。(3)情境分析模型參數，說明例如價格、波動跳躍、平均報酬波動幅度、風險溢酬等因子變動對最適動態資產配置比例的影響。(4)說明在不同的動態規劃期間、不同風險趨避程度下，修正前、後DPS模型的投資績效有何改變。

後續四個章節分為「文獻探討」－回顧整理投資組合動態規劃的研究文獻，在過去理論支持下，尋找並建構新研究命題；「資料與研究方法」－說明如何修正標的資產的隨機擴散過程模型並提出新動態規劃問題、如何求解新動態規劃問題、如何以實際資料檢測、推論研究命題與應用新理論模型；「實證結果」－根據資料進行研究方法的實證分析，闡述命題檢測與新理論模型應用的結果；「結論」－指出本文較俱價值的研究發現。

## 2. 文獻探討

資產配置動態規劃的研究須說明投資資產（含風險性與非風險性資產）的隨機擴散過程模式、投資人的動態規劃效用函數、動態最適化方法以及資產配置的實證結果與比較等，本文以此方向來探討文獻。

金融市場資產報酬或波動走勢的研究首推Clark (1973) 利用Bochner (1949) 提出的擴散方程 (diffusion equation) 研究財金價格變動的走勢。之後，Black and Scholes (1973) 以之配合財金無套利理論，推展擴散方程成為偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 並解選擇權的價格，Black and Scholes (1973) 對股價報酬的隨機過程 (stochastic process) 是假定為幾何布朗運動

(geometric Brownian motion)，此運動是由常定的報酬漂移 (drift) 與常態的擴散 (diffusion) 過程所構成，以式子表示為： $dS_t / S_t = \mu_s dt + \sigma_s dz_t$ ，式中  $S_t$  代表  $t$  時股票價格， $\mu_s$  代表股價的預期報酬率， $\sigma_s$  是代表股價變化的波動程度， $dz_t$  是  $t$  時韋納過程 (Wiener process) 的增量。然而股價報酬的分配就實證而言是有厚尾 (fat tail) 的現象存在 (Fama, 1965; Mandelbrot, 1967; Duffie and Pan, 1997)，因此只以常態隨機的幾何布朗運動來模式化股價變動的隨機走勢似乎不妥。基於此，Merton (1976) 提出了所謂的跳躍擴散模型 (jump-diffusion model)，利用離散的跳躍過程修正幾何布朗運動，以連續的擴散過程模式化常態訊息的出現而以間斷的波以松 (Poisson) 隨機跳躍過程模式化非常態訊息的出現，即跳躍擴散模型是以幾何布朗運動的趨勢與擴散成份之外再加上  $dq$  (Poisson 跳躍過程增量) 而建構成，此模型日後成為學者研究隨機變數加入離散式量變的標準模式。實證上認為有跳躍過程存在的研究者有：Bodurtha and Courtadon (1987) 研究匯價的隨機過程發現 Black and Scholes (1973) 與 Merton (1976) 的跳躍式選擇權評價有所差異；Ball and Torous (1983, 1985) 則實證大部份美國股市亦具跳躍過程；Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) 也發現主要匯價大多有明顯跳躍情形。

此外，股票市場報酬波動在實證研究上，普遍發現有持續、群聚且不對稱性的現象 (Mandelbrot, 1963; Nelson, 1991; Rabemananjara and Zakolin, 1993)。Chou (1988) 指出報酬波動有突然跳躍為極高並持續的現象與價格變動有跳躍現象類似，實證例子如史坦普 500 VIX 隱含波動指數在 1987 年 10 月 19 日突然跳增了 313%，於 1997 年 10 月 27 日則跳增了 53%；Andersen *et al.* (2001)、Baillie (1996) 則發現波動有隨機變動的特性；Bates (1996) 與 Jarrow and Rosenfeld (1984) 等則推展跳躍過程並實證研究匯市與股市的價格與波動走勢；Andersen *et al.* (2002)、Bakshi *et al.* (1997)、Bates (1996, 2000) 以及 Duffie *et al.* (2000) 多位作者則結合價格與波動的隨機過程與跳躍過程實證研究金融市場價格與波動的走勢並評價衍生性金融商品。

對於資產配置動態規劃的研究最先可見 Merton (1971)，現今在資產價格與波動過程的研究盛行下，有不少作者研究此主題，例如，Brennan *et al.* (1997) 研究利率隨機過程下的動態資產配置與股票報酬的預測；Kim and Omberg (1996) 評論動態資產配置的預測效果；Lynch (2000) 論述動態資產配置的績效與股價特性；Schroder and Skiadas (1999) 論述隨機過程與隨機微分效用函數；Liu (2007) 論述隨機過程下的資產配置；Brennan and Xia (2000) 論述利率的隨機過程。

雖然 Common (2000)、Das and Uppal (2001) 與 Merton (1971) 有探討到價格跳躍的事件風險，但之後的 Chacko and Viceira (2000)、Liu (2007)、Longstaff (2001) 只研究報酬波動的隨機過程而無探討波動跳躍。接著，Bates (2000)、Duffie *et al.* (2000) 與 Pan (2001) 提出除了風險性資產價格有跳躍之外，報酬波動也有跳躍的雙跳躍事件風險模型；Eraker *et al.* (2003) 與 Liu *et al.* (2003) 等則以實證支持價格與波動雙跳躍模型。較完整的價格與報酬波動雙跳躍模型的應用則可參見 Liu *et al.* (2003)，其利用 Duffie *et al.* (2000) 提出的價格與報酬波動的雙跳躍模型配合特

定效用函數建構投資人資產配置的動態規劃問題，問題解法則是將目標式最適隨機控制的一階與二階 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 偏微分方程式轉化成常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE) 來求解。

動態規劃效用函數的設定在財經領域以幕次效用函數 (power utility function) 較常見，例如固定絕對風險趨避 (constant absolute risk aversion, CARA) 或固定相對風險趨避 (constant relative risk aversion, CRRA) 函數 (Saha, 1993)。然而指數函數型態的 CARA 模型在財富變大時其風險趨避程度亦會變大 (increasing relative risk aversion, IRRRA)，較不適用模式化投資人效用行為。另 CRRA (Blundell and Stoker, 1999; Brandt, 1999; Goldstein and Zapatero, 1996; Grossman and Vila, 1992; Henderson and Hobson, 2002; Herings and Kubler, 2007; Ingolf and Ernst, 2007; Nelson and Escalante, 2004; Palacios-Huerta and Serrano, 2006) 為一凹向下 (concave) 且正邊際效用遞減的函數，在財富變大時其風險趨避程度可變小 (decreasing relative risk aversion)，可維持消費的動態最適解與財富成穩定的線性比例關係 (Merton, 1992)，但投資比例卻不會受財富大小的影響，因此投資比例的隨機環境是可存在，亦即與投資水平有關 (Liu, 2007)，且在隨機環境下因 CRRA 投資比例不受財富大小影響，其解較不複雜。儘管 CRRA 對高度風險溢酬與低度無風險利率的解釋稍嫌薄弱，但修正後仍適用 (Campbell and Cochrane, 1999; Constantinides, 1990; Sundaresan, 1989)。

有關動態規劃的解，一般是應用 HJB 等式與推測解，將二階非線性的 PDE 式子轉為常微分方程式，再求其封閉解或數值解。但在假設多個變量為隨機 (例如，價格、波動與無風險利率) 且效用函數為動態效用函數時，常需要較多變量的偏微分方程，因此必須先推測 (conjecture) 後驗證價值函數 (value function) 的型態，才能將 PDE 轉換為 ODE 問題求解最佳化投資組合權重。推測的價值函數係數一般以待確定係數法 (method of undetermined coefficient) 或逐次逼近法 (method of successive approximation) 求解，但可能沒有封閉解。此外，以平賭 (martingale) 理論也可解動態規劃問題 (Duffie, 2001)，而 HJB 的 PDE 數值解亦可以由傅利葉 (Fourier) 和拉普拉斯 (Laplace) 變項轉換法解之。

動態資產配置的實證研究早先可見 Merton (1969, 1971)，在效率市場的假設下，其利用隨機控制理論解出最適終生投資與消費決策的明確解。之後的研究則放寬 Merton 的效率市場假設，例如，Chacko and Viceira (2000) 採用動態規劃模式，以 Duffie and Epstein (1992) 的效用函數研究 Merton 模型在不完全市場且隨機波動下，美國股市在 1926 年到 1997 年的月報酬資料和 1871 年到 1997 年的年報酬資料的最適投資組合和消費；其發現股票報酬波動會跟著時間變動但長期投資者的投資組合比例較不會變動、最適的儲蓄會受投資者風險趨避的程度與消費的多寡影響、風險規避的效果是來自投資組合的風險分散與風險趨避程度。另 Wu (2003) 利用動態規劃方法分析在隨機的投資環境下，當有跳躍事件發生時風險性資產投資比例會有何影響；實證發

現投資比例越大時對於負面事件的反應就愈強，反之同理。近期的應用可參見 Han (2006) 利用動態多因子隨機波動模型 (dynamic factor multivariate stochastic volatility) 研究動態資產配置的預期報酬與波動；實證顯示道瓊工業指數股票的動態模型績效明顯優於 buy-and-hold 與靜態投資模型；當股市為多頭與風險趨避減少時，交易費用與風險調整異常報酬 (abnormal return) 隨著增加；而股市空頭與風險趨避增加時，交易費用與風險調整異常報酬則不隨著增加。

### 3. 資料與研究方法

由上述整理之文獻得知，金融市場資產的事件風險會反應在價格與波動的走勢上，因此本文將利用 DPS 模型建構價格與波動的擴散模型來進行動態資產配置的實證分析，然而 DPS 雙跳躍擴散模型在台指的實證分析闕如，其模型參數實有待先行估計以配適台指的走勢，利用 Euler Manuyama 數值趨近與模擬法可估計隨機微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 的模型參數。另外，尚可考慮前述文獻提及的波動或價格跳躍不對稱的現象於 DPS 模型中，以修正 DPS 模型的適用性。

接著，以 DPS 與其修正模型說明投資財富的隨機過程並建構資產配置動態規劃問題：即在各期財富效用最大化下，求解各期的最適投資比例。解法可利用 ODE 數值分析法求解 LLP 模型對一般化雙跳躍動態規劃問題的 HJB 微分方程式所推導出的隱解。最後以台股指數與無風險利率為動態資產配置的研究對象，計算比較 DPS 與其修正模型在不同規劃期間、風險趨避程度下的投資績效與風險。

#### 3.1 研究資料

本文將研究資料主要分為風險性資產與非風險性資產，實證上風險性資產是以台股指數為代表，無風險性資產則以第一商業銀行一個月機動定存利率為代表，以此實證資料估計 SDE 模型參數並分析動態資產配置的投資績效與風險。

#### 3.2 雙跳躍 SDE 模型與實證方法

##### (1) 雙跳躍 SDE 模型

令風險性資產  $t$  時價格為  $S_t$ ，其走勢是受到事件跳躍的影響，依 DPS 模型股價與波動構成的雙跳躍隨機微分方程式 SDE 其跳躍擴散過程是如下式：

$$dS_t = (r + \eta V_t - \mu \lambda V_t) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_{1t} + X_t S_t^- dN_t \quad (1)$$

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t - \kappa \lambda V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_{2t} + Y_t dN_t \quad (2)$$

式(1)和(2)中， $X_t$  是  $t$  時隨機價格跳躍%， $Y_t$  是  $t$  時隨機報酬變異跳躍%， $S_{t-}$  是  $t$  時初風險性資產價格， $V_t$  是  $t$  時隨機報酬瞬間變異， $r$  是無風險利率， $\alpha$  是隨機報酬變異變動的水平， $\beta$  是隨機報酬變異變動的回復乘數， $\sigma$  是風險性資產平均變異波動%， $\eta$  是隨機報酬變異的風險溢酬乘數， $\mu$  是風險性資產平均價格跳躍% ( $X_t$  之平均)， $\kappa$  是風險性資產平均報酬變異跳躍% ( $Y_t$  的平均)， $\lambda$  是預期事件風險發生的跳躍次數， $N_t$  是跳躍出現強度為  $\lambda V_t$  的 Poisson 隨機跳躍過程， $dZ_1$  與  $dZ_2$  分別是價格與報酬變異之標準化布朗運動。

式(1)中  $\mu\lambda V S$  為價格跳躍抵減的報酬，因此預期報酬 = 無風險報酬  $r$  + 風險溢酬  $\eta V - \mu\lambda V$ ，換句話說，風險溢酬是補償投資者承擔擴散風險與負跳躍風險的報酬。式(2)的報酬變異  $V$  也有復歸平均數 (mean-reversion) 的效果，表示市場波動太高且持續一短時間後便會回復平均波動。

## (2) 雙跳躍 SDE 模型的參數估計與檢定

雙跳躍 SDE 中的數個參數尚須估計，以配合台指的投資環境。然而要估計參數須進一步分析跳躍大小  $X$  與  $Y$  變項隨機變動的模式，此模式尚無文獻 (例如跳躍大小變項的統計特徵或機率分配) 支持，因此本文依 LLP 模型將跳躍大小  $X$  和  $Y$  的期望值分別假定是  $\mu$  和  $\kappa$  以利模型參數估計。在此條件下式(1)與(2)成爲：

$$dS_t = (r + \eta V_t - \mu\lambda V_t)S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_{1t} + \mu S_{t-} dN_t \quad (3)$$

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t - \kappa\lambda V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_{2t} + \kappa dN_t \quad (4)$$

利用股價與變異的隨機過程的移轉機率與 Euler Manuyama 的積分法可估計以上二式 SDE 模型的參數，估計方法說明如下：

### 1) 以模擬基礎統計推論 (simulated based inference- SBR) 建構近似概似函數

由於 SDE 模型中若加上 Poisson 隨機跳躍過程則無法以近似常態的概似函數估計參數，本文因此以 SBR 建構無參數的近似概似函數並進行參數的估計與統計推論，其方法如下：

以  $\mathbf{X}$  代表股價  $S$  與股價變異  $V$  構成的向量， $\mathbf{X}_{i-1}$  到  $\mathbf{X}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 的移轉機率密度 (transition density) 函數設為  $p(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta})$ ，則利用  $\mathbf{X}$  的概似函數最大化可估計  $\boldsymbol{\theta}$ 。  $\mathbf{X}_0$  到  $\mathbf{X}_n$  的概似函數可寫爲

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n p(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

考慮將時間間距  $[t_{i-1}, t_i]$  再細分爲  $L$  個區間，則每一區間長度爲  $l = (t_i - t_{i-1}) / L$ ，使用 Euler

Maruyama 法，可數值法求解雙跳躍 SDE 在  $[t_{i-1}, t_i]$  的積分與在  $t_i$  下的股價  $S$  與股價變異  $V$ 。  $S$  與  $V$  二變項構成的向量  $\mathbf{X}$  的跳躍 SDE 可表示為：

$$d\mathbf{X}_t = f(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})dt + g(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{W}_t + k(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{N}_t \quad (6)$$

式中， $f(\cdot)$  是跳躍 SDE 的漂移(drift)函數， $g(\cdot)$  是其擴散(diffusion)函數， $k(\cdot)$  是 Poisson 過程跳躍量(size)的函數， $\boldsymbol{\theta}$  是參數向量  $[\alpha, \beta, \lambda, \eta, \mu, \sigma]$ ， $d\mathbf{W}$ 、 $d\mathbf{N}$  分別是股價與變異的偉納(Weiner)與 Poisson 隨機跳躍過程。上式 SDE 的積分式子如下：

$$\mathbf{X}_{t_i} = \mathbf{X}_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\mathbf{X}_s; \boldsymbol{\theta})ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(\mathbf{X}_s; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{W}_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} k(\mathbf{X}_s; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{N}_s \quad (7)$$

要以數值法解此積分式，可令時間區間長度  $l$  為極小，設  $\tau_j = j \cdot l$  ( $j=1, \dots, L$ ) 則此積分式的 Euler Manuyama 數值近似式成爲：

$$\mathbf{X}_{\tau_j} = \mathbf{X}_{\tau_{j-1}} + f(\mathbf{X}_{\tau_{j-1}})\Delta t + g(\mathbf{X}_{\tau_{j-1}})(\mathbf{W}_{\tau_j} - \mathbf{W}_{\tau_{j-1}}) + k(\mathbf{X}_{\tau_j})(\mathbf{N}_{\tau_j} - \mathbf{N}_{\tau_{j-1}}) \quad (8)$$

上式若  $\mathbf{X}_{\tau_0}$  爲已知則可迭代解  $\mathbf{X}_{\tau_j}$ ，即  $\mathbf{X}_{t_i}$  的數值解。此過程重覆模擬投射  $R$  次後可得  $\mathbf{X}_{t_i}^1, \dots, \mathbf{X}_{t_i}^R$ ，設  $\mathbf{X}_{t_i}^r$  表示在  $t_{i-1}$  時  $\mathbf{X}_{i-1}$  至  $\mathbf{X}_i$  雙跳躍 SDE 積分的第  $r$  次模擬結果。接著以  $\mathbf{X}_{t_i}^1, \dots, \mathbf{X}_{t_i}^R$  建構一無母數的核密度函數 (kernel density function)，以之估計移轉函數  $p(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta})$  如下：

$$p^R(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{Rh_i} \sum_{r=1}^R K\left(\frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{t_i}^r}{h_i}\right) \quad (9)$$

式中， $h_i$  是  $t_i$  時核寬度 (kernel bandwidth)， $K(\cdot)$  是核函數 (kernel function)。對每一  $\mathbf{X}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 重覆上述步驟可得 SBR 近似概似函數： $L(\boldsymbol{\theta})^R = \prod_{i=1}^n p^R(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta})$ 。最大化  $L(\boldsymbol{\theta})^R$  可求雙跳躍 SDE 的最適參數  $\boldsymbol{\theta}$ 。 $K(\cdot)$  是選用常態核函數(normal kernel)， $h_i$  是依 Scott(1992)的公式  $h_i = (4/3)^{1/5} s_i R^{-1/5}$ ， $i=1, \dots, n$  (式中  $s_i$  是  $\mathbf{X}_i^r$  的標準誤) 求之而不加以估計。

## 2) 估計參數的標準誤

在最大化近似概似函數之後，可求得  $\boldsymbol{\theta}$  並可求得  $L(\boldsymbol{\theta})^R$  相對於  $\boldsymbol{\theta}$  的二階導數 (即 Hessian 矩陣)。若樣本數  $n$  夠大，則  $\boldsymbol{\theta}$  的估計標準誤可利用 MLE 的漸近特性 (asymptotic property) 以



Hessian 矩陣的反矩陣平方根估計  $\boldsymbol{\theta}$  的標準誤。

### (3) 檢定雙跳躍 SDE 模型的跳躍與波動狀態

利用前述估計參數的標準誤，可計算  $t$ -statistic，以檢定雙跳躍 SDE 模型的參數顯著性，也可利用 SDE 模型參數在設限下的概似函數與參數不在設限下的概似函數建構概似比檢定 (likelihood ratio test- LR test)，其檢定方法如下：

令參數  $\boldsymbol{\theta}$  的虛無假設為  $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \in \omega$  對立假設為  $H_a : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_a \in \omega^C$ 。設  $L(\boldsymbol{\theta})$  是模型的概似函數，其概似比率  $\Lambda = \frac{\max_{\theta_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\max_{\theta_a} L(\boldsymbol{\theta})}$ ，概似比檢定統計量則是  $-2\log \Lambda$ ，其是近似自由度為  $q$  的卡方分配  $\chi^2(q)$ ， $q$  是檢定  $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$  所構成參數限制式的個數。如果  $-2\log \Lambda \geq \chi^2_\alpha(q)$  則拒絕  $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ 。

前述文獻探討提到股票市場的波動有持續、群聚且不對稱性的現象，本文有意說明台股指數價格跳躍是否俱不對稱 (asymmetry) 以及波動是否俱有高低狀態轉換 (state switch) 之分，因此提出以下命題與假設。

命題 1：若實證研究資料的價格有大、小跳躍不對稱的效果，即投資人對壞消息的反應比好消息強烈，以及有高低報酬波動狀態轉換的效果。SDE 模型要反應此二效果，可將無反應此二效果的式(3)與式(4)的雙跳躍 SDE 模型加入此二效果成爲一般化模型 (後文稱爲模型 4)。之後，去除模型 4 不對稱效果可建構模型 3，去除高低波動狀態轉換效果可建構模型 2 或二效果皆去除則可建構模型 1 (即 DPS 模型)。四者模型間有巢狀模型的關係，接著便可進行各模型間的巢狀檢定，亦即檢定 SDE 模型中反應效果參數的限制條件是否成立，以說明二效果存在的顯著性並找出適合實證資料的 SDE 模型。四個 SDE 模型式子如下：

#### 1) 模型 4：反應價格跳躍不對稱與高低報酬波動狀態轉換效果的 SDE 一般化模型

$$dS_t = (r + \eta V_t - \mu \lambda V_t) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_{1t} + \mu S_t^- dN_t \quad (10)$$

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t - k \lambda V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_{2t} + kdN_t \quad (11)$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{when } dS_t \geq 0 \\ \mu_2 & \text{when } dS_t < 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中，小跳躍效果爲  $\mu_1$ 、大跳躍效果爲  $\mu_2$ 。延續式(5)的概似函數，高低波動狀態轉換效果的 log 機似函數可寫爲如下式：

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\theta}_L, p_{LH})_t &= \sum_i p^R(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta}_L) [(p_{LH}(1-\pi_L) + (1-p_{HL})\pi_{L,t})] \\
P(\boldsymbol{\theta}_H, p_{HL})_t &= \sum_i p^R(t_i, \mathbf{X}_i; (t_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}), \boldsymbol{\theta}_H) [(p_{HL}(1-\pi_L) + (1-p_{LH})\pi_{L,t})] \\
\pi_{L,t} &= P(\boldsymbol{\theta}_L, p_{LH})_t / (P(\boldsymbol{\theta}_L, p_{LH})_t + P(\boldsymbol{\theta}_H, p_{HL})_t) \\
\log L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_i \log(P(\boldsymbol{\theta}_L, p_{LH})_t + P(\boldsymbol{\theta}_H, p_{HL})_t)
\end{aligned} \tag{13}$$

式中， $L$  與  $H$  分別代表低波動與高波動狀態， $\pi_L$ 、 $p_{LH}$  與  $\sigma_L$  分別表示低波動狀態的機率、低波動移轉至高波動狀態的機率與低波動標準差，餘代號可類推。參數集合的關係為  $\sigma_L \in \boldsymbol{\theta}_L, \sigma_H \in \boldsymbol{\theta}_H, (\sigma_L, \sigma_H, p_{HL}, p_{LH}) \in \boldsymbol{\theta}$ 。

2) 模型 3：只反應價格跳躍不對稱效果的 SDE 模型

式子如模型 1，但令參數集合  $\boldsymbol{\theta}$  中須限制  $\sigma_L = \sigma_H = \sigma$  且  $p_{LH} = p_{HL} = 0$ 。

3) 模型 2：只反應高低報酬波動狀態轉換效果的 SDE 模型

式子如模型 1，但令參數集合  $\boldsymbol{\theta}$  中須限制  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 。

4) 模型 1：二者效果皆不反應的 SDE 模型

式子如模型 1，但令參數集合  $\boldsymbol{\theta}$  中須限制  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  與  $\sigma_L = \sigma_H = \sigma$  且  $p_{LH} = p_{HL} = 0$ 。

模型 1 至 4 參數的估計是解下式的最適化問題，使用 BHHH 或 BFGS 演算法可解之。如前述，目標函數  $\log L(\boldsymbol{\theta})$  求解後參數間的 Hessian 矩陣可用以估計參數的漸近變異並以之計算估計參數的標準誤。

$$\arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \log [P(\boldsymbol{\theta}_L, p_{LH})_t + P(\boldsymbol{\theta}_H, p_{HL})_t] \tag{14}$$

接著，爲了檢定二效果是否存在，不僅需要使用前述方法估計模型並檢測反應二效果參數的顯著性，同時尚須檢定二效果若存在所隱含的參數限制條件是否成立。本文利用前述模型 1 至 4 間的巢狀關係，提出以下三個假設：

假設 1：若台指價格有跳躍不對稱的現象，則反應此效果的模型 2 與不反應此效果的模型 1 的最大概似值差異應很大，因此概似比檢定的結果會是顯著的。

假設 2：若台指有高低報酬波動狀態轉換的現象，則反應此效果的模型 3 與不反應此效果的模型 1 的最大概似值差異應很大，因此概似比檢定的結果會是顯著的。

假設 3：若台指價格有跳躍不對稱與高低報酬波動狀態轉換的現象，則反應此二效果的模型 4 與不反應此二效果的模型 1 的最大概似值差異應很大，因此概似比檢定的結果會是顯著的。

在後文實證結果一節中將列表詳細說明此四模型間巢狀檢定的結果。

### 3.3 最適動態資產配置

假設投資者之投資組合分為風險性資產與無風險性資產，而風險性資產價格變動的隨機過程如式(1)與(2)。投資者期初有一正的財富  $W_0$ ，投資期間為  $0 \leq t \leq T$ ，則在規劃的投資水平  $T$  下，最適動態資產配置問題是決定  $t$  時最適風險性資產  $\phi_t$  使末端預期財富  $W_T$  能達到最大，以式子表示如下：

$$\max_{\{\phi_t, 0 \leq t \leq T\}} E_0 [U(W_T)] \tag{15}$$

式中，效用函數如前述文獻探討將採用固定相對風險偏好 CRRA 較合適，其式子如下：

$$U(W) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} W^{1-\gamma}, & \text{if } W > 0 \\ -\infty, & \text{if } W \leq 0 \end{cases} \tag{16}$$

式中， $W$  是財富、 $\gamma$  是風險趨避程度， $\gamma$  值愈大表示投資人愈保守。

上式第二部份非正財富的效用為小至負無窮，表示不可能接受非正財富，如此可修正第一部份 CRRA 無提到下限有界 (unbounded from below) 的缺失：即第一部份尚未說明在無窮損失之下投資人或 gambler 有可能會因效用負無窮而捨棄投資或 gamble (Arrow, 1971)。圖 1 顯示 CRRA 在不同風險趨避程度  $\gamma$  下的效用函數結構，可看出此效用函數不論  $\gamma$  值為何皆是一凸 (concave) 函數，但凸性隨著  $\gamma$  變大而變大，尤其  $\gamma > 3$  時很明顯。

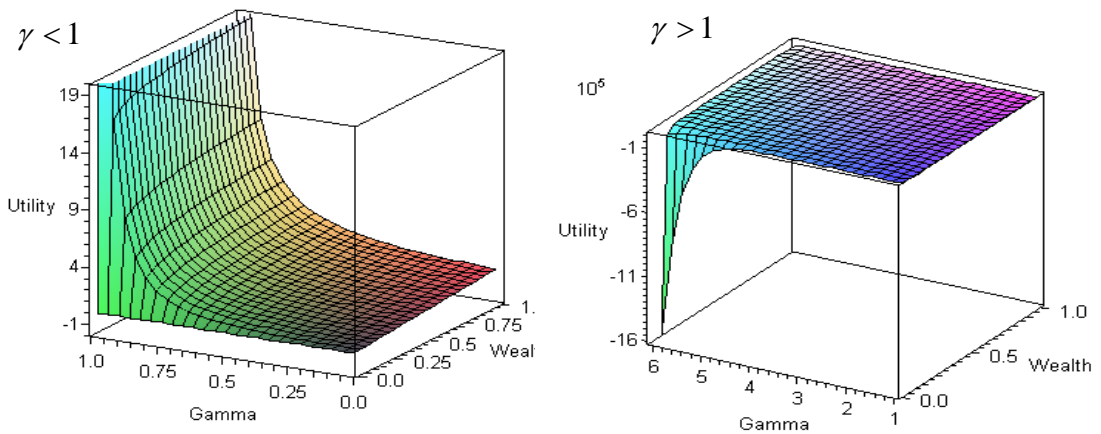


圖 1 不同風險趨避程度下 CRRA 效用函數結構

財富在可自我融資的條件下其隨機過程則如下式：

$$dW_t = (r + \phi_t(\eta - \mu\lambda)V_t)W_t dt + \phi_t \sqrt{V_t} W_t dZ_{1t} + X_t \phi_t^- W_t^- dN_t \quad (17)$$

式中， $W_t$ ： $t$ 時所累積總財富， $\phi_t$ ： $t$ 時風險性資產的投資比例，其他定義同前。

命題 2：投資組合比例限制<sup>2</sup>

假設在時間  $t$  下， $0 < t \leq T$ ，累計跳躍強度的限制式可表示為：

$$0 < E_t \left[ \exp\left(-\int_t^T \lambda V_\tau d\tau\right) \right] < 1, \quad (18)$$

式中， $\lambda V_t$  是跳躍強度。上式顯示在任何時間  $t$  下，最適投資組合權重  $\phi_t^*$  可滿足以下的限制式：

$$1 + \phi_t^* X_{\inf} > 0 \quad \text{和} \quad 1 + \phi_t^* X_{\sup} > 0 \quad (19)$$

式中， $X_{\inf}$  是  $X_t$  (風險性資產之價格跳躍%) 的下界， $X_{\sup}$  是  $X_t$  的上界。若假定  $X_{\inf} < 0$  和  $X_{\sup} > 0$ ，則以上二限制式變成如下式：

$$-\frac{1}{X_{\sup}} < \phi_t^* < -\frac{1}{X_{\inf}} \quad (20)$$

上式隱含投資者會限制融資作多與融券放空的量，以規避其無法連續控制投資組合比例或財富的風險。若假定風險性資產價格跳躍  $X$  的值在  $(-1, \infty)$ ，則隱含投資者無融資作多與融券放空的部位。此現象與 Longstaff (2001) 在動態資產配置的研究發現類似，如果投資者在市場中無法進行連續性的交易 (有流動性風險)，則投資者會自動限制其投資權重在 0 和 1 之間來避免最終財富為負的。

### 3.4 資產配置動態規劃問題的最適解

資產配置動態規劃的問題如式(15)、(16)與(17)，目的是求各規劃期間控制變數  $\phi_t$  的最適解。此問題如解標準隨機控制過程的問題，依 Merton (1971) 可先定義動態間接效用函數 (indirect utility function) 為：

$$J(W, V, t) = \max_{\{\phi_s, t \leq s \leq T\}} E_t [U(W_T)] \quad (21)$$

<sup>2</sup> 詳細證明可參見 Liu *et al.* (2003)。

依最適隨機控制原理 (the principle of optimal stochastic control) 可推導上式的 Hamilton-Jacobin-Bellman 方程式如下：

$$0 = \max_{\phi_t} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\phi_t^2 W^2 V}{2} J_{ww} + \phi_t \rho \sigma W V J_{wv} + \frac{\sigma^2 V}{2} J_{vv} + (r + \phi_t (\eta - \mu \lambda) V) W J_w \\ & + (\alpha - \beta V - k \lambda V) J_v + \lambda V (E [J(W(1 + \phi_t X), V + Y, t)] - J) + J_t \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中， $J_w$ 、 $J_v$  與  $J_t$  是  $J(W, V, t)$  分別對  $W$ 、 $V$  與時間  $t$  的偏微分，高階偏微分的表示同此方式， $E[\cdot]$  表示  $X$  與  $Y$  隨機變項的期望值。解以上 HJB 方程的動態資產配置比例最適解  $\phi_t^*$ ，可先推測(再後續驗證)間接效用函數為：

$$J(W, V, t) = \frac{1}{1 - \gamma} W^{1 - \gamma} \exp(A(t) + B(t)V) \quad (23)$$

式中， $A(t)$  與  $B(t)$  是時間  $t$  的函數但尚無明確解。此  $J$  是嘗試解，但代入式(22)的 HJB 方程式中須使等式成立。因此依式(23)求得  $J_w$ 、 $J_v$ 、 $J_t$ 、 $J_{ww}$ 、 $J_{vv}$ 、 $J_{wv}$  後，再將其代入到式(22)後得到 HJB 式子對  $\phi_t$  的一階條件式子 (first order condition- FOC) 如下：

$$(\eta - \mu \lambda) V + \rho \sigma B(t) V - \gamma \phi_t V + \lambda V E[(1 + \phi_t X)^{-\gamma} X e^{B(t)Y}] = 0 \quad (24)$$

命題 3：動態資產配置比例的最適解。若式(15)、(16)、(17)資產配置問題間接效用函數如式(23)，則此最適問題 HJB 等式對  $\phi_t$  的一階條件式子 (FOC) 依 Liu *et al.* (2003) 可導得如下：

$$\begin{aligned} \phi_t &= -\frac{J_w}{W J_{ww}} \left( (\eta - \mu \lambda) + \rho \sigma \frac{J_{wv}}{J_w} + \lambda M_1 \frac{J}{W J_w} \right) \\ &= \frac{\eta - \mu \lambda}{\gamma} + \frac{\rho \sigma B(t)}{\gamma} + \frac{\lambda M_1}{\gamma} \end{aligned} \quad (25)$$

式中， $M_1 \equiv E \left[ (1 + \phi_t X)^{-\gamma} X e^{B(t)Y} \right] < \infty$ ， $\phi_t$  尚須滿足限制式(20)。將式(23)與(25)再代入到式(22)則可得到如下式：

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma \phi_t^2 V}{2} + \phi_t \rho \sigma B(t) V + \frac{\sigma^2 B(t)^2 V}{2(1 - \gamma)} + (r + \phi_t (\eta - \mu \lambda) V) + \\ & (\alpha - \beta V - \kappa V) \frac{B(t)}{1 - \gamma} + \frac{\lambda V}{1 - \gamma} M_2 - \frac{\lambda V}{1 - \gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} (A(t)' + B(t)' V) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

式中， $M_2 \equiv E \left[ \left( 1 + \phi_t X \right)^{1-\gamma} e^{B(t)Y} \right] < \infty$ ， $\rho$  是  $Z_{1t}$  與  $Z_{2t}$  的相關係數。式(26)是  $V$  的線性仿射 (affine) 函數，但  $V \neq 0$ ，等式要成立則  $V$  的係數與常數項皆必須令為零，因此得到以下二個式子：

$$B(t)' + \sigma^2 B(t)^2 / 2 + (\phi_t \rho \sigma (1-\gamma) - \beta - \kappa \lambda) B(t) + \left( \frac{\gamma(\gamma-1)\phi_t^2}{2} + (\eta - \mu\lambda)(1-\gamma)\phi_t + \lambda M_2 - \lambda \right) = 0 \quad (27)$$

$$A(t)' + \alpha B(t) + (1-\gamma)r = 0 \quad (28)$$

以上二式是  $A(t)$ 、 $B(t)$  的常微分聯立方程式，解此常微分聯立方程式，可得  $A(t)$ 、 $B(t)$  的解，再將  $B(t)$  代入式(25)則可解  $\phi_t^*$  如下式：

$$\phi_t^* = \frac{\eta - \mu\lambda}{\gamma} + \frac{\rho\sigma B(t)}{\gamma} + \frac{\lambda\mu}{\gamma} (1 + \mu\phi_t^*)^{-\gamma} e^{\kappa B(t)} \quad (29)$$

## 4. 實證結果

### 4.1 資料分析

本文是以台灣發行量加權股價收盤指數與銀行一個月機動定存利率為動態投資配置的研究對象。以樣本內台股指數日資料估計 SDE 模型參數，樣本內期間是 1997 年 9 月 20 日至 2002 年 9 月 22 日，樣本數共 1,308，資料係取自台灣經濟新報資料庫。以台指日資料估計 SDE 模型參數的原因是日資料比月資料較能反應 SDE 中的非常態效果（例如，價格跳躍或波動狀態轉換）。但以日為單位求解樣本外動態規劃的投資比例會使求解的數目過多，計算過於繁瑣，因此以月為樣本外動態規劃的研究單位。設定樣本外動態規劃期間為 2002 年 9 月 23 日至 2008 年 11 月 5 日，若一個月有 20 天交易日則共有 76 個月（6.33 年）的規劃期間。之後，利用樣本外台股指數與第一商業銀行 30 天期機動定存利率（資料亦取自新報資料庫）的日資料換算月資料後，配合動態規劃問題求解得到的最適資產配置比例值便可計算模型的績效與風險。

表 1 列示風險性資產台指樣本內、外與全部樣本的平均日（月）報酬率分別為 -0.0559% (-0.9450%)、0.0077% (0.0905%)、-0.0217% (-0.3869%)，標準誤分別為 1.8234% (9.2280%)、1.4021% (7.2174%)、1.6106% (8.1916%)，可見日與月樣本內（外）期間的報酬較低（高），而風險卻是相對較高（低），風險溢酬理論並不適用。

表 1 台股指數日與月報酬率統計分析

## Panel A. 日報酬

| 序列      | 觀察數  | 平均值      | 標準誤     | 最小值     | 最大值    | 偏態      | 峰態     | Jarque-Bera |
|---------|------|----------|---------|---------|--------|---------|--------|-------------|
| 樣本內     | 1308 | -0.0559% | 1.8234% | -0.0677 | 0.0617 | 0.0586  | 0.8818 | 43.0929     |
| p-value |      | 0.2676   |         |         |        | 0.3875  | 0.0000 | 0.0000      |
| 樣本外     | 1521 | 0.0077%  | 1.4021% | -0.0691 | 0.0610 | -0.2716 | 2.8177 | 521.8591    |
| p-value |      | 0.8308   |         |         |        | 0.0000  | 0.0000 | 0.0000      |
| 全部樣本    | 2829 | -0.0217% | 1.6106% | -0.0691 | 0.0617 | -0.0725 | 1.7281 | 354.3481    |
| p-value |      | 0.4733   |         |         |        | 0.1158  | 0.0000 | 0.0000      |

## Panel B. 月報酬

| 序列      | 觀察數 | 平均值      | 標準誤     | 最小值     | 最大值    | 偏態      | 峰態      | Jarque-Bera |
|---------|-----|----------|---------|---------|--------|---------|---------|-------------|
| 樣本內     | 65  | -0.9450% | 9.2280% | -0.1967 | 0.2255 | 0.2255  | -0.2245 | 0.6873      |
| p-value |     | 0.4121   |         |         |        | 0.4684  | 0.7265  | 0.7092      |
| 樣本外     | 76  | 0.0905%  | 7.2174% | -0.2401 | 0.1856 | -0.5675 | 1.5099  | 11.2979     |
| p-value |     | 0.9133   |         |         |        | 0.0477  | 0.0103  | 0.0035      |
| 全部樣本    | 141 | -0.3869% | 8.1916% | -0.2401 | 0.2255 | -0.1071 | 0.3559  | 1.0134      |
| p-value |     | 0.5758   |         |         |        | 0.6076  | 0.4002  | 0.6025      |

註：p-value 是檢定虛無假設平均值、偏態、峰態為零與常態分態 (Jarque-Bera test) 的顯著值。

表 1 偏態係數顯示日或月報酬在樣本外有明顯負偏的情形，峰態係數則顯示日報酬普遍有高狹峰的情形但月報酬無，所有日報酬的 Jarque-Bera 檢定的 p-value 明顯比月報酬還低，顯示日報酬比月報酬受非常態因素影響較大，此結果印證前述使用日資料為樣本內估計模型參數的理由。圖 2 是研究期間的台股指數價格與日報酬率的走勢情形，圖中可看出股價變動的趨勢與波動皆有不平穩 (non-stationary) 的現象，報酬率變動則有高與低報酬波動持續群聚 (persistent volatility clustering) 的現象，隱含報酬率波動是不固定且隨著時間而改變。

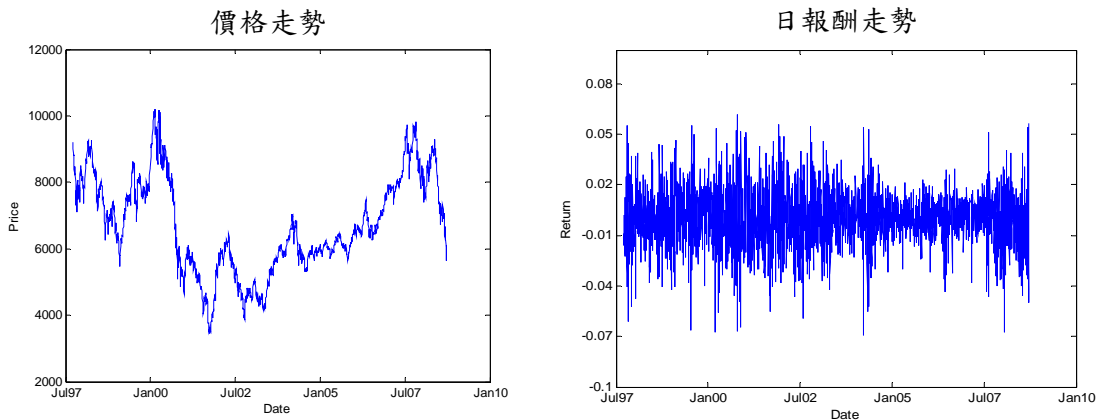


圖 2 台股指數價格與日報酬率走勢圖

## 4.2 模型參數估計與檢定

跳躍 SDE 模型中的各參數必須加以估計與檢定，才能研究最適投資策略的投資績效，一旦估計出模型參數，便能代入動態資產配置比例的最適解並計算各期風險性資產的投資比例。

首先說明無風險利率的估計方式，由於 CIR (Cox-Ingersoll-Ross) (Cox *et al.*, 1985) 模型的隨機利率走勢有回復長期利率的趨勢，實證的利率走勢也有此特性，因此本文以 CIR 模型估計無風險利率。

CIR 利率隨機微分方程如下：

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t \quad (30)$$

式中， $a$  是利率迴復速度， $b$  是長期利率， $\sigma_r$  是利率波動。式(30)的 log 概似函數如下：

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum \ln(p(r_{t+\Delta t} | r_t; \boldsymbol{\theta}, \Delta t)) \quad (31)$$

式中， $p(r_{t+\Delta t} | r_t; \boldsymbol{\theta}, \Delta t) = w e^{-g-h} (h/g)^{c/2} I_c(2\sqrt{gh})$ ，式中  $w = \frac{2a}{\sigma_r^2(1-e^{-a\Delta t})}$ 、 $g = wr_t e^{-a\Delta t}$ 、 $h = wr_{t+\Delta t}$ ， $I_c(2\sqrt{gh})$  是修正的  $q$  階 Bessel 函數， $c = \frac{2ab}{\sigma_r^2} - 1$ ，Bessel 函數可參照 Matlab

中的 `besseli` 函數。表 2 列出 CIR 模型在 log 概似函數最大化後參數估計的結果，依 CIR 模型長期利率參數  $b$  的估計值為 0.036，因此無風險利率的估計值參照  $b$  值設定為 3.6%

接著，依式(14)可估計四個 SDE 模型的參數，表 3 列出四個 SDE 模型的參數估計結果，檢視加入價格不對稱效果到 SDE 模型的模型 2，可看出  $\mu_1$  與  $\mu_2$  估計的  $t$ -statistic 檢定是達到 1% 的顯著水準，顯示模型 2 反應不對稱效果的參數是顯著的。相對的，加入報酬高低波動狀態轉換的模型 3 的  $\sigma_L$ 、 $\sigma_H$  估計的  $t$ -statistic 檢定也達 1% 顯著水準，顯示模型 3 反應報酬高低波動狀態轉換的參數是顯著的。

前述反應二效果的參數雖是顯著的，但接著還需要利用模型 1 到模型 4 的巢狀關係，以概似比檢定前文假設 1 至 3 有關二效果存在是否俱顯著性，三個假設檢定結果如表 4。對於檢驗價格不對稱效果是否存在的假設 1，其虛無假設相對於對立假設是模型 1 相對於模型 2，此假設如同檢定二個參數的條件： $\mu_1 = \mu_2$  成立與否，結果是顯著拒絕。另對於檢驗高低波動狀態轉換效果是否存在的假設 2，其虛無假設相對於對立假設是模型 1 相對於模型 3，此假設如同檢定四個參數的條件： $\sigma_L = \sigma_H = \sigma$  且  $p_{LH} = p_{HL} = 0$  成立與否，其結果是強烈顯著拒絕。對於檢驗二效果是否存在的假設 3，其虛無假設相對於對立假設是模型 1 相對於模型 4，此假設如同檢定六個參數的條件： $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  與  $\sigma_L = \sigma_H$  且  $\sigma_L = \sigma_H = \sigma$  成立與否，其結果是強烈顯著拒絕無二效果存在。



表 2 CIR 利率模型估計結果

|                | $a$      | $b$    | $\sigma_r$ |
|----------------|----------|--------|------------|
| 估計值            | 0.1547   | 0.0361 | 0.0468     |
| 標準誤            | 0.1346   | 0.0303 | 0.0084     |
| $t$ -statistic | 1.1497   | 1.1931 | 5.5767     |
| Log 最大似似值      | -64.4433 |        |            |

表 3 四個 SDE 模型的參數估計檢定結果

| 參數 ( $\theta$ )  | 模型 1                      | 模型 2                       | 模型 3                      | 模型 4                       |
|------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| $\eta$           | 1.324<br>(3.484)          | 0.419***<br>(0.050)        | 1.160<br>(3.193)          | 1.996***<br>(0.127)        |
| $\lambda$        | 2.545<br>(4.848)          | 6.010***<br>(1.088)        | 8.397***<br>(1.318)       | 6.648***<br>(0.505)        |
| $\mu$            | -0.375***<br>(3.37E-07)   |                            | -0.356***<br>(8.57E-03)   |                            |
| $\mu_1$          |                           | 5.209E-03***<br>(1.52E-08) |                           | -0.1775***<br>(5.79E-03)   |
| $\mu_2$          |                           | -0.501***<br>(0.052)       |                           | -0.473***<br>(6.24E-03)    |
| $\alpha$         | 0.1556**<br>(0.069)       | 0.471***<br>(0.047)        | 0.156***<br>(0.030)       | 0.186***<br>(0.031)        |
| $\beta$          | 2.8620***<br>(0.050)      | 3.475***<br>(0.278)        | 15.104***<br>(5.23E-03)   | 15.109***<br>(6.52E-03)    |
| $\kappa$         | 2.41E-05***<br>(2.52E-06) | 8.903E-05***<br>(2.56E-05) | 1.12E-06***<br>(2.71E-09) | 9.84E-06***<br>(2.12E-08)  |
| $\sigma$         | 0.3350***<br>(6.68E-03)   | 0.325***<br>(4.68E-03)     |                           |                            |
| $\sigma_L$       |                           |                            | 0.097***<br>(3.84E-03)    | 9.629E-02***<br>(3.65E-03) |
| $\sigma_H$       |                           |                            | 0.602***<br>(0.030)       | 0.5755***<br>(0.025)       |
| $p_{12}$         |                           |                            | 0.137***<br>(0.016)       | 0.128***<br>(0.014)        |
| $p_{21}$         |                           |                            | 0.220***<br>(0.029)       | 0.220***<br>(0.029)        |
| $\log L(\theta)$ | -4,492.30                 | -4,464.45                  | -3,936.99                 | -3,911.02                  |

註：1.各模型應用台指的樣本內估計期間為 09/20/1997~09/22/2002，總計 1308 筆日資料，模擬式(8)的投射次數  $R=1200$ ， $L=10$ 。2.括號中的數字為估計參數的標準誤。3.\*、\*\*與\*\*\*分別表示估計參數達雙尾  $t$  檢定 10%、5%與 1%的顯著水準。

表 4 四個 SDE 模型的巢狀檢定結果

|   | 假設 1                          | 假設 2                                     | 假設 3  |
|---|-------------------------------|--|---|
| $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ | $\boldsymbol{\theta}_0$ 如模型 1 | $\boldsymbol{\theta}_0$ 如模型 1            | $\boldsymbol{\theta}_0$ 如模型 1                               |
| $H_a : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_a$ | $\boldsymbol{\theta}_a$ 如模型 2 | $\boldsymbol{\theta}_a$ 如模型 3            | $\boldsymbol{\theta}_a$ 如模型 4                               |
| 檢定限制式   | $m_1 = m_2 = m$               | $s_L = s_H = s$<br>$p_{LH} = p_{HL} = 0$ | $m_1 = m_2 = m$<br>$s_L = s_H = s$<br>$p_{LH} = p_{HL} = 0$ |
| $\log L(\boldsymbol{\theta}_0)$                     | -4,492.30                     | -4,492.30                                | -4,492.30   |
| $\log L(\boldsymbol{\theta}_a)$                     | -4,464.45                     | -3,936.99                                | -3,911.02   |
| $-2 \log \Lambda$ 概似比值                              | 55.71                         | 1,110.63                                 | 1,162.56  |
| $\chi^2_{\alpha=2.5\%}(q)$ 臨界值                      | $\chi^2_{2.5\%}(2) = 7.38$    | $\chi^2_{2.5\%}(4) = 11.14$              | $\chi^2_{2.5\%}(6) = 14.50$                                 |
| p-value   | 7.99E-13                      | 0.000                                    | 0.000   |
| 檢定結果  | 拒絕                            | 強烈拒絕                                     | 強烈拒絕  |

由假設 1 至 3 的檢定結果，說明無反應二效果的模型 1 是較模型 2 至 4 較不適用於模式化台指。而假設 1 與假設 2 的概似檢定值差異大至 1054.92，可知報酬波動狀態轉換的效果明顯強過價格不對稱的效果，亦說明只反應不對稱效果的模型 2 需要再改進，有反應報酬波動狀態轉換的模型 3 與模型 4 應是配適台指較好的模型。後文將應用台股指數實證四個模型的動態規劃績效與風險，其結果將是很有意義。

值得注意的是 SDE 模型的  $\kappa$  值皆不大於 8.903E-05，顯示波動跳躍的大小極微小，雙跳躍 SDE 模型中的波動跳躍實可忽略，實證台股指數時波動跳躍效果可不需加入 SDE 的模型內。相對的，檢定結果顯示價格不對稱與高低波動狀態轉換效果是有需加入模型內。

### 4.3 動態規劃模型的數值解

式(29)尚只是式(27)與(28)的隱解，解式(27)與(28)的常微分聯立方程式另可使用數值方法解之，例如，前向尤拉法 (forward Euler)、後向尤拉法 (backward Euler)、修正尤拉法 (modified Euler) 與 Runge-Kutta-Fehlberg 4 階與 5 階方法 (RKF45) 等 4 種數值法。解法是由  $B(T)=0$  開始解上一期的  $B(T-1)$  並將  $B(T-1)$  代入式(29)解上一期的  $\phi_{T-1}^*$  並逐漸遞迴到  $t=0$ 。本文將先以特例測試前述 4 種值方法解式(27)與(28)的數值解結果是否近似或收斂，並選一較適用的數值方法來解後續常微分聯立方程式的問題。

理論上，以間隔時間  $h$  的階秩 (big O) 探討 4 種演算法的收斂的速度與精確性而言，前向與後向尤拉演算法的誤差稍大但速度快，修正尤拉法則是誤差較小速度也不慢，RKF45 算法則是較精確但速度慢很多。實證上，以 SDE 模型 1、動態規劃 1 年、設定投資人分別為  $\gamma=0.5$  與

2.5 為例，4 種數值法解  $B(t)$ 、 $\phi_t^*$  的結果列示如表 5。表 5.A 與 5.C 列出間隔時間  $h (=1/12)$  較大下的 4 種數值方法解，4 種方法的計算結果略有差異。以精確度較高的 RKF45 為基準，比較前向尤拉法、後向尤拉法與修正尤拉法  $\phi_t^*$  的誤差絕對值  $\text{Abs}(e)$  與其平均數與標準差，可發現修正的尤拉法與 RKF45 較不偏離；表 5.B 與表 5.D 列出間隔時間  $h (=1/36)$  較小下的 4 種數值方法解，發現前向尤拉法、後向尤拉法與修正尤拉法三者在收斂速度慢但較精確的  $h (=1/36)$  下，其  $B(t)$ 、 $\phi_t^*$  皆比收斂速度快但較不精確的  $h (=1/12)$  下較接近 RKF45。尤其修正尤拉法的解與 RKF45 的解變得很接近，且所需計算時間在  $\gamma = 0.5$  與  $\gamma = 2.5$  下，分別只需 21.61 秒與 112.81 秒比 RKF45 的 42.21 秒與 211.97 秒快很多。由於修正的尤拉法在間隔時間  $h$  較小下與 RKF45 有很接近的收斂效果，精確度很高且計算速度較 RKF45 快很多，即使  $h$  較大下，其與 RKF45 也較接近，誤差也較小。因此後文常微分方程問題的數值解是以修正的尤拉法來執行。

前文已說明如何以數值法求解 SDE 模型 1 的動態資產配置比例  $\phi_t^*$ ，但須注意的是後文實證動態規劃 SDE 模型的投資績效時， $\phi_t^*$  尚是以日為規劃間隔求解，之後再以 20 日平均以估計月為規劃間隔的  $\phi_t^*$ ，如此不僅較能以解得數值收斂的  $\phi_t^*$ ，同時也能配合以日資料估計的模型在樣本外規劃期間的使用。SDE 模型 2 至 4 的  $\phi_t^*$  解，則可依模型 1 為基礎來解，說明如下：模型 2 依  $\mu$  有  $\mu_1$  與  $\mu_2$  不對稱跳躍二種狀態之分，利用式(12)可建構二個條件以區分大、小跳躍狀態並計算每一條件下  $\phi_t^*$  的解；模型 3 依  $\sigma$  有高、低波動二種狀態之分，利用式(13)可將  $\pi_{L,t}$  大於或等於 0.5 設定為低波動、小於 0.5 則設定為高波動，以此二個條件區分高低波動狀態並計算每一條件下  $\phi_t^*$  的解；模型 4 依  $\mu$  與  $\sigma$  則有  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  不對稱跳躍配合高、低波動共四種狀態之分，利用式(12)的  $\mu$  有  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  之分與式(13)的  $\pi_{L,t}$  有大於或小于 0.5 之分的條件，因此可建構四個條件以區分四種狀態並可計算每一狀態下  $\phi_t^*$  的解。

#### 4.4 動態資產配置比例的敏感性分析

在說明下節四種模型的動態規劃績效前，本節將探討動態資產配置比例  $\phi_t^*$  與各影響因子的變動關係。檢視式(29)可知，報酬波動度  $\sigma$ 、風險溢酬  $\eta$ 、價格跳躍大小  $\mu$ 、相關係數  $\rho$  等變動是  $\phi_t^*$  變動的影響因子。由於前述四種模型實證上皆顯示波動跳躍  $\kappa$  極弱，因此不予探討。

##### (1) $\sigma$ 、 $\eta$ 、 $\mu$ 、 $\rho$ 對 $\phi_t^*$ 的影響

雖式(29)是  $\phi_t^*$  的隱函數，利用 Maple 軟體還是可計算  $\phi_t^*$  對各個影響因子的導函數以分析相對因果變動關係，但立體圖示則比數學式更易顯示因子間的動態關係。圖 3 至圖 5 以 SDE 模型 1 估計的參數為例子，列示式(29)  $\phi_t^*$  對各變動因子的動態關係。式(29)的  $B(t)$  值在動態規劃終期時其值是 0，而當風險趨避係數  $\gamma > 1$  時， $B(t)$  會以正值收斂到 0，當風險趨避係數  $\gamma < 1$  時， $B$  會以負值收斂到 0 (見表 5)，因此圖 3 至圖 6 以  $B(t) > 0$  表示  $\gamma > 1$  (設為 2.5) 時因子間的動態關

表 5  $B(t)$ 與 $\phi_t^*$ 的數值解比較

A.  $\gamma < 1$ 、 $h=1/12$

| No.    | 前向尤拉    |            |          | 後向尤拉    |            |        | 修正尤拉    |            |          | RKF45   |            |
|--------|---------|------------|----------|---------|------------|--------|---------|------------|----------|---------|------------|
|        | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e) | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$  | $\phi_t^*$ |
| 1      | -2.5571 | 1.7755     | 0.0749   | -4.9228 | 1.9286     | 0.0782 | -3.5527 | 1.8436     | 0.0068   | -3.6576 | 1.8504     |
| 2      | -2.0001 | 1.7350     | 0.0559   | -3.6347 | 1.8488     | 0.0579 | -2.7044 | 1.7857     | 0.0052   | -2.7767 | 1.7909     |
| 3      | -1.5588 | 1.7018     | 0.0412   | -2.6893 | 1.7849     | 0.0419 | -2.0560 | 1.7393     | 0.0037   | -2.1059 | 1.743      |
| 4      | -1.2082 | 1.6744     | 0.0298   | -1.9877 | 1.7342     | 0.0300 | -1.5573 | 1.7017     | 0.0025   | -1.5916 | 1.7042     |
| 5      | -0.9290 | 1.6523     | 0.0212   | -1.4626 | 1.6945     | 0.0210 | -1.1720 | 1.6717     | 0.0018   | -1.1954 | 1.6735     |
| 6      | -0.7061 | 1.6343     | 0.0150   | -1.0673 | 1.6634     | 0.0141 | -0.8731 | 1.6478     | 0.0015   | -0.8890 | 1.6493     |
| 7      | -0.5280 | 1.6197     | 0.0101   | -0.7682 | 1.6394     | 0.0096 | -0.6407 | 1.6289     | 9.00E-04 | -0.6512 | 1.6298     |
| 8      | -0.3854 | 1.6079     | 0.0066   | -0.5412 | 1.6208     | 0.0063 | -0.4595 | 1.6139     | 6.00E-04 | -0.4663 | 1.6145     |
| 9      | -0.2713 | 1.5984     | 0.0042   | -0.3684 | 1.6063     | 0.0037 | -0.3181 | 1.6022     | 4.00E-04 | -0.3223 | 1.6026     |
| 10     | -0.1797 | 1.5904     | 0.0028   | -0.2366 | 1.5954     | 0.0022 | -0.2075 | 1.5930     | 2.00E-04 | -0.2100 | 1.5932     |
| 11     | -0.1063 | 1.5844     | 0.0012   | -0.1359 | 1.5869     | 0.0013 | -0.1209 | 1.5857     | 1.00E-04 | -0.1222 | 1.5856     |
| 12     | -0.0473 | 1.5794     | 5.00E-04 | -0.0589 | 1.5802     | 0.0003 | -0.0531 | 1.5800     | 1.00E-04 | -0.0536 | 1.5799     |
| Mean=  |         |            | 0.0038   |         |            | 0.0039 |         |            | 3.18E-04 |         |            |
| Stdev= |         |            | 0.0042   |         |            | 0.0044 |         |            | 3.53E-04 |         |            |

註 A：1. 參數設定依模型 4。2. 邊界條件設定為  $B(T)=0$ 。3. Abs(e) 是以 RKF45 為基準，其他 3 種數值法  $\phi_t^*$  的誤差絕對值。

4.  $\gamma < 1$ 、規劃投資水平 1 年，間隔時間  $h=1/12$  下，前向尤拉法、後向尤拉法、修正尤拉法、RKF45 使用 Matlab 與處理器 AMD Phenom 9850 演算所需計算時間分別為 3.60、7.68、9.11、19.29 秒。

B.  $\gamma < 1$ 、 $h=1/36$

| No.    | 前向尤拉    |            |          | 後向尤拉    |            |          | 修正尤拉    |            |          | RKF45   |            |
|--------|---------|------------|----------|---------|------------|----------|---------|------------|----------|---------|------------|
|        | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$  | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$  | $\phi_t^*$ |
| 1      | -3.2038 | 1.8203     | 0.0301   | -4.1482 | 1.8816     | 0.0312   | -3.6442 | 1.8496     | 8.00E-04 | -3.6576 | 1.8504     |
| 2      | -2.9343 | 1.8018     | 0.0273   | -3.7688 | 1.8576     | 0.0285   | -3.3247 | 1.8285     | 6.00E-04 | -3.3365 | 1.8291     |
| 3      | -2.6873 | 1.7847     | 0.0247   | -3.4249 | 1.8352     | 0.0258   | -3.0334 | 1.8085     | 9.00E-04 | -3.0438 | 1.8094     |
| 4      | -2.4607 | 1.7685     | 0.0223   | -3.1128 | 1.8142     | 0.0234   | -2.7675 | 1.7904     | 4.00E-04 | -2.7767 | 1.7908     |
| 5      | -2.2526 | 1.7536     | 0.0201   | -2.8292 | 1.7944     | 0.0207   | -2.5247 | 1.7731     | 6.00E-04 | -2.5328 | 1.7737     |
| 6      | -2.0615 | 1.7395     | 0.0181   | -2.5712 | 1.7765     | 0.0189   | -2.3027 | 1.7570     | 6.00E-04 | -2.3098 | 1.7576     |
| 7      | -1.8859 | 1.7265     | 0.0162   | -2.3364 | 1.7596     | 0.0169   | -2.0996 | 1.7424     | 3.00E-04 | -2.1059 | 1.7427     |
| 8      | -1.7244 | 1.7144     | 0.0147   | -2.1225 | 1.7441     | 0.0150   | -1.9137 | 1.7286     | 5.00E-04 | -1.9192 | 1.7291     |
| 9      | -1.5758 | 1.7030     | 0.0132   | -1.9274 | 1.7295     | 0.0133   | -1.7434 | 1.7158     | 4.00E-04 | -1.7483 | 1.7162     |
| 10     | -1.4391 | 1.6924     | 0.0118   | -1.7493 | 1.7164     | 0.0122   | -1.5873 | 1.7038     | 4.00E-04 | -1.5916 | 1.7042     |
| 11     | -1.3132 | 1.6826     | 0.0106   | -1.5868 | 1.7040     | 0.0108   | -1.4442 | 1.6929     | 3.00E-04 | -1.4480 | 1.6932     |
| 12     | -1.1973 | 1.6734     | 0.0095   | -1.4383 | 1.6924     | 0.0095   | -1.3129 | 1.6829     | 0.00E+00 | -1.3163 | 1.6829     |
| 13     | -1.0905 | 1.6652     | 0.0083   | -1.3026 | 1.6817     | 0.0082   | -1.1925 | 1.6732     | 3.00E-04 | -1.1954 | 1.6735     |
| 14     | -0.9921 | 1.6575     | 0.0072   | -1.1785 | 1.6720     | 0.0073   | -1.0819 | 1.6645     | 2.00E-04 | -1.0845 | 1.6647     |
| ---    | ---     | ---        | ---      | ---     | ---        | ---      | ---     | ---        | ---      | ---     | ---        |
| 28     | -0.1986 | 1.5922     | 0.0010   | -0.2210 | 1.5940     | 8.00E-04 | -0.2097 | 1.5932     | 0.00E+00 | -0.2100 | 1.5932     |
| 29     | -0.1690 | 1.5897     | 6.00E-04 | -0.1873 | 1.5911     | 8.00E-04 | -0.1780 | 1.5903     | 0.00E+00 | -0.1783 | 1.5903     |
| 30     | -0.1416 | 1.5874     | 4.00E-04 | -0.1564 | 1.5885     | 7.00E-04 | -0.1489 | 1.5881     | 3.00E-04 | -0.1491 | 1.5878     |
| 31     | -0.1163 | 1.5851     | 7.00E-04 | -0.1279 | 1.5861     | 3.00E-04 | -0.1221 | 1.5856     | 2.00E-04 | -0.1222 | 1.5858     |
| 32     | -0.0929 | 1.5831     | 5.00E-04 | -0.1018 | 1.5840     | 4.00E-04 | -0.0973 | 1.5835     | 1.00E-04 | -0.0975 | 1.5836     |
| 33     | -0.0713 | 1.5814     | 2.00E-04 | -0.0779 | 1.5820     | 4.00E-04 | -0.0746 | 1.5817     | 1.00E-04 | -0.0747 | 1.5816     |
| 34     | -0.0513 | 1.5798     | 1.00E-04 | -0.0559 | 1.5799     | 0.00E+00 | -0.0536 | 1.5797     | 2.00E-04 | -0.0536 | 1.5799     |
| 35     | -0.0328 | 1.5781     | 1.00E-04 | -0.0356 | 1.5783     | 1.00E-04 | -0.0342 | 1.5782     | 0.00E+00 | -0.0343 | 1.5782     |
| 36     | -0.0158 | 1.5767     | 0.00E+00 | -0.0171 | 1.5769     | 2.00E-04 | -0.0164 | 1.5768     | 1.00E-04 | -0.0164 | 1.5767     |
| Mean=  |         |            | 0.0078   |         |            | 0.0080   |         |            | 2.56E-04 |         |            |
| Stdev= |         |            | 0.0086   |         |            | 0.0090   |         |            | 2.37E-04 |         |            |

註 B：在  $\gamma < 1$ 、 $h=1/36$  下，餘條件同註 A.4，四種演算所需時間為 10.90、17.49、21.61、42.21 秒。

C.  $\gamma > 1$ 、 $h=1/12$

| No.    | 前向尤拉   |            |          | 後向尤拉   |            |          | 修正尤拉   |            |          | RKF45  |            |
|--------|--------|------------|----------|--------|------------|----------|--------|------------|----------|--------|------------|
|        | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ |
| 1      | 1.4837 | 0.3239     | 0.0131   | 2.5150 | 0.2970     | 0.0138   | 1.9458 | 0.3119     | 0.0011   | 1.9881 | 0.3108     |
| 2      | 1.1826 | 0.3317     | 0.0097   | 1.9457 | 0.3119     | 0.0101   | 1.5271 | 0.3228     | 8.10E-04 | 1.5585 | 0.3219     |
| 3      | 0.9367 | 0.3380     | 0.0071   | 1.4944 | 0.3236     | 0.0073   | 1.1906 | 0.3315     | 5.90E-04 | 1.2136 | 0.3309     |
| 4      | 0.7362 | 0.3432     | 0.0052   | 1.1385 | 0.3328     | 0.0052   | 0.9210 | 0.3384     | 4.20E-04 | 0.9376 | 0.3380     |
| 5      | 0.5729 | 0.3473     | 0.0037   | 0.8588 | 0.3400     | 0.0036   | 0.7055 | 0.3439     | 3.10E-04 | 0.7174 | 0.3436     |
| 6      | 0.4401 | 0.3507     | 0.0026   | 0.6396 | 0.3456     | 0.0025   | 0.5336 | 0.3483     | 2.10E-04 | 0.5419 | 0.3481     |
| 7      | 0.3321 | 0.3535     | 0.0018   | 0.4684 | 0.3500     | 0.0017   | 0.3967 | 0.3518     | 1.50E-04 | 0.4023 | 0.3517     |
| 8      | 0.2444 | 0.3557     | 0.0012   | 0.3348 | 0.3534     | 0.0011   | 0.2877 | 0.3546     | 9.00E-05 | 0.2914 | 0.3545     |
| 9      | 0.1733 | 0.3575     | 7.70E-04 | 0.2307 | 0.3561     | 7.00E-04 | 0.2011 | 0.3568     | 6.00E-05 | 0.2035 | 0.3568     |
| 10     | 0.1155 | 0.3590     | 4.70E-04 | 0.1498 | 0.3581     | 4.10E-04 | 0.1323 | 0.3586     | 4.00E-05 | 0.1337 | 0.3585     |
| 11     | 0.0687 | 0.3602     | 2.40E-04 | 0.0868 | 0.3597     | 2.20E-04 | 0.0777 | 0.3600     | 2.00E-05 | 0.0784 | 0.3599     |
| 12     | 0.0308 | 0.3612     | 1.00E-04 | 0.0380 | 0.3610     | 8.00E-05 | 0.0344 | 0.3611     | 1.00E-05 | 0.0347 | 0.3611     |
| Mean=  |        |            | 0.0038   |        |            | 0.0039   |        |            | 3.18E-04 |        |            |
| Stdev= |        |            | 0.0042   |        |            | 0.0044   |        |            | 3.53E-04 |        |            |

註 C：在  $\gamma > 1$ 、 $h=1/12$  下，餘條件同註 A.4，四種演算所需時間為 15.57、21.49、29.81、61.77 秒。

D.  $\gamma > 1$ 、 $h=1/36$

| No.    | 前向尤拉   |            |          | 後向尤拉   |            |          | 修正尤拉   |            |          | RKF45  |            |
|--------|--------|------------|----------|--------|------------|----------|--------|------------|----------|--------|------------|
|        | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ | Abs(e)   | $B(t)$ | $\phi_t^*$ |
| 1      | 1.7892 | 0.3160     | 0.0052   | 2.1936 | 0.3054     | 0.0054   | 1.9828 | 0.3109     | 1.40E-04 | 1.9881 | 0.3108     |
| 2      | 1.6540 | 0.3195     | 0.0047   | 2.0204 | 0.3099     | 0.0049   | 1.8296 | 0.3149     | 1.30E-04 | 1.8344 | 0.3148     |
| 3      | 1.5282 | 0.3227     | 0.0042   | 1.8595 | 0.3141     | 0.0044   | 1.6870 | 0.3186     | 1.10E-04 | 1.6914 | 0.3185     |
| 4      | 1.4109 | 0.3258     | 0.0038   | 1.7102 | 0.3180     | 0.0039   | 1.5545 | 0.3220     | 1.00E-04 | 1.5585 | 0.3219     |
| 5      | 1.3017 | 0.3286     | 0.0035   | 1.5717 | 0.3216     | 0.0035   | 1.4314 | 0.3252     | 9.00E-05 | 1.4349 | 0.3251     |
| 6      | 1.2000 | 0.3312     | 0.0031   | 1.4432 | 0.3249     | 0.0032   | 1.3170 | 0.3282     | 8.00E-05 | 1.3202 | 0.3281     |
| 7      | 1.1054 | 0.3337     | 0.0028   | 1.3242 | 0.3280     | 0.0029   | 1.2107 | 0.3309     | 7.00E-05 | 1.2136 | 0.3309     |
| 8      | 1.0174 | 0.3359     | 0.0025   | 1.2139 | 0.3309     | 0.0026   | 1.1121 | 0.3335     | 6.00E-05 | 1.1147 | 0.3334     |
| 9      | 0.9355 | 0.3380     | 0.0022   | 1.1117 | 0.3335     | 0.0023   | 1.0205 | 0.3358     | 6.00E-05 | 1.0228 | 0.3358     |
| 10     | 0.8594 | 0.3400     | 0.0020   | 1.0171 | 0.3359     | 0.0021   | 0.9356 | 0.3380     | 5.00E-05 | 0.9376 | 0.3380     |
| 11     | 0.7886 | 0.3418     | 0.0018   | 0.9296 | 0.3382     | 0.0018   | 0.8568 | 0.3401     | 5.00E-05 | 0.8586 | 0.3400     |
| 12     | 0.7227 | 0.3435     | 0.0016   | 0.8486 | 0.3403     | 0.0016   | 0.7837 | 0.3419     | 4.00E-05 | 0.7853 | 0.3419     |
| 13     | 0.6615 | 0.3451     | 0.0014   | 0.7736 | 0.3422     | 0.0014   | 0.7159 | 0.3437     | 4.00E-05 | 0.7174 | 0.3436     |
| 14     | 0.6047 | 0.3465     | 0.0013   | 0.7043 | 0.3440     | 0.0013   | 0.6531 | 0.3453     | 3.00E-05 | 0.6544 | 0.3453     |
| 15     | 0.5519 | 0.3479     | 0.0011   | 0.6402 | 0.3456     | 0.0011   | 0.5948 | 0.3468     | 3.00E-05 | 0.5960 | 0.3467     |
| 16     | 0.5028 | 0.3491     | 0.0010   | 0.5810 | 0.3471     | 0.0010   | 0.5408 | 0.3482     | 2.00E-05 | 0.5419 | 0.3481     |
| ---    | ---    | ---        | ---      | ---    | ---        | ---      | ---    | ---        | ---      | ---    | ---        |
| 28     | 0.1269 | 0.3587     | 1.80E-04 | 0.1403 | 0.3584     | 1.60E-04 | 0.1335 | 0.3585     | 1.00E-05 | 0.1337 | 0.3585     |
| 29     | 0.1082 | 0.3592     | 1.40E-04 | 0.1192 | 0.3589     | 1.40E-04 | 0.1137 | 0.3590     | 0.00E+00 | 0.1138 | 0.3590     |
| 30     | 0.0909 | 0.3596     | 1.10E-04 | 0.0998 | 0.3594     | 1.20E-04 | 0.0953 | 0.3595     | 0.00E+00 | 0.0955 | 0.3595     |
| 31     | 0.0748 | 0.3600     | 9.00E-05 | 0.0819 | 0.3599     | 9.00E-05 | 0.0783 | 0.3599     | 0.00E+00 | 0.0784 | 0.3599     |
| 32     | 0.0599 | 0.3604     | 7.00E-05 | 0.0654 | 0.3603     | 7.00E-05 | 0.0626 | 0.3603     | 0.00E+00 | 0.0627 | 0.3603     |
| 33     | 0.0461 | 0.3608     | 5.00E-05 | 0.0501 | 0.3607     | 5.00E-05 | 0.0481 | 0.3607     | 0.00E+00 | 0.0481 | 0.3607     |
| 34     | 0.0332 | 0.3611     | 4.00E-05 | 0.0360 | 0.3610     | 4.00E-05 | 0.0346 | 0.3611     | 0.00E+00 | 0.0347 | 0.3611     |
| 35     | 0.0213 | 0.3614     | 2.00E-05 | 0.0230 | 0.3613     | 3.00E-05 | 0.0222 | 0.3614     | 0.00E+00 | 0.0222 | 0.3614     |
| 36     | 0.0103 | 0.3617     | 1.00E-05 | 0.0111 | 0.3617     | 1.00E-05 | 0.0107 | 0.3617     | 0.00E+00 | 0.0107 | 0.3617     |
| Mean=  |        |            | 0.0013   |        |            | 0.0014   |        |            | 3.42E-05 |        |            |
| Stdev= |        |            | 0.0015   |        |            | 0.0015   |        |            | 3.98E-05 |        |            |

註 D：在  $\gamma > 1$ 、 $h=1/36$  下，餘條件同註 A.4，四種演算所需時間為 51.63、88.46、112.81、211.97 秒。

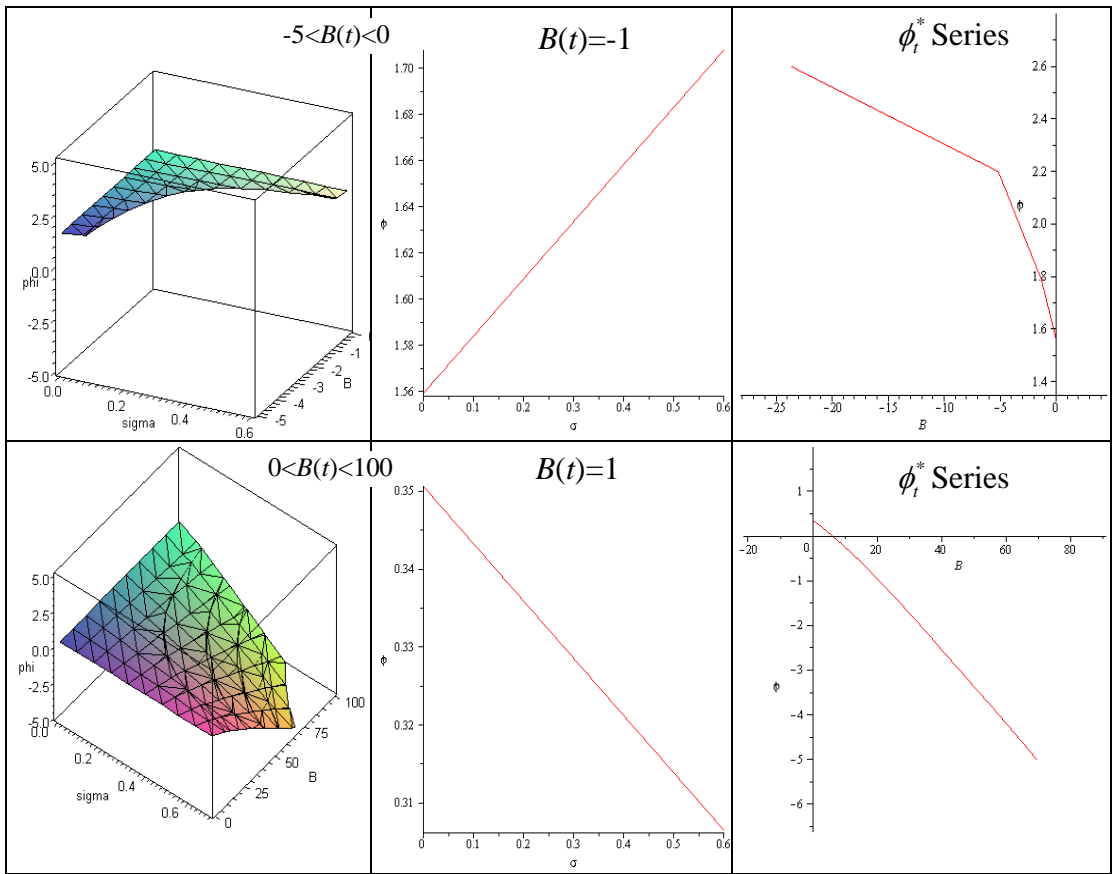


圖 3  $\sigma$  對  $\phi_t^*$  的影響

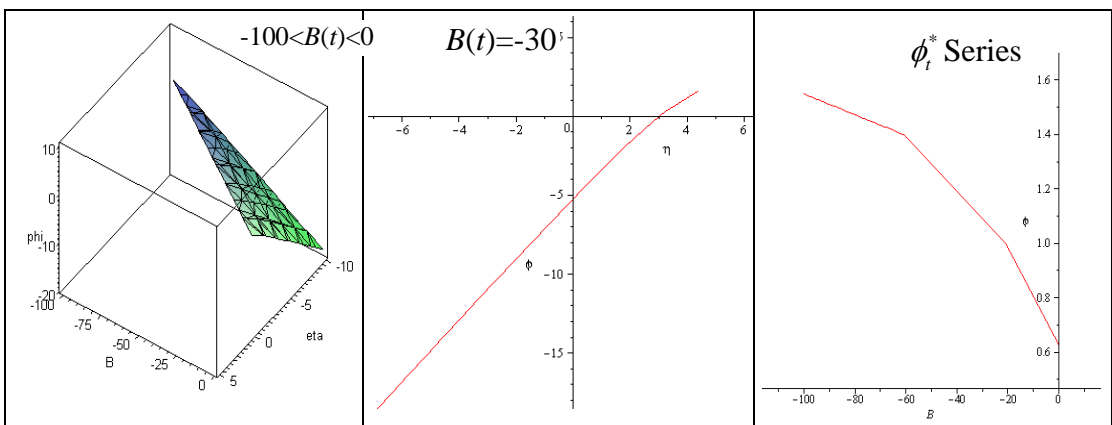


圖 4  $\eta$  對  $\phi_t^*$  的影響

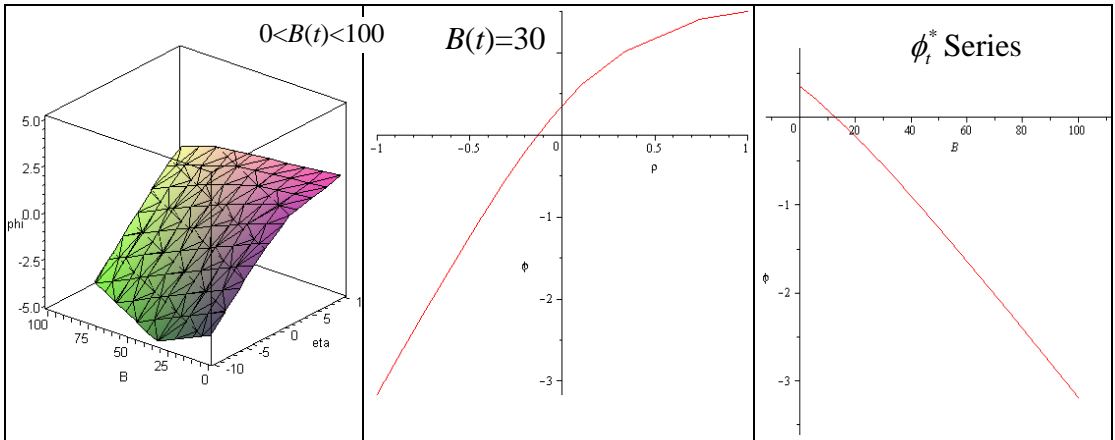


圖 4  $\eta$  對  $\phi_t^*$  的影響 (續)

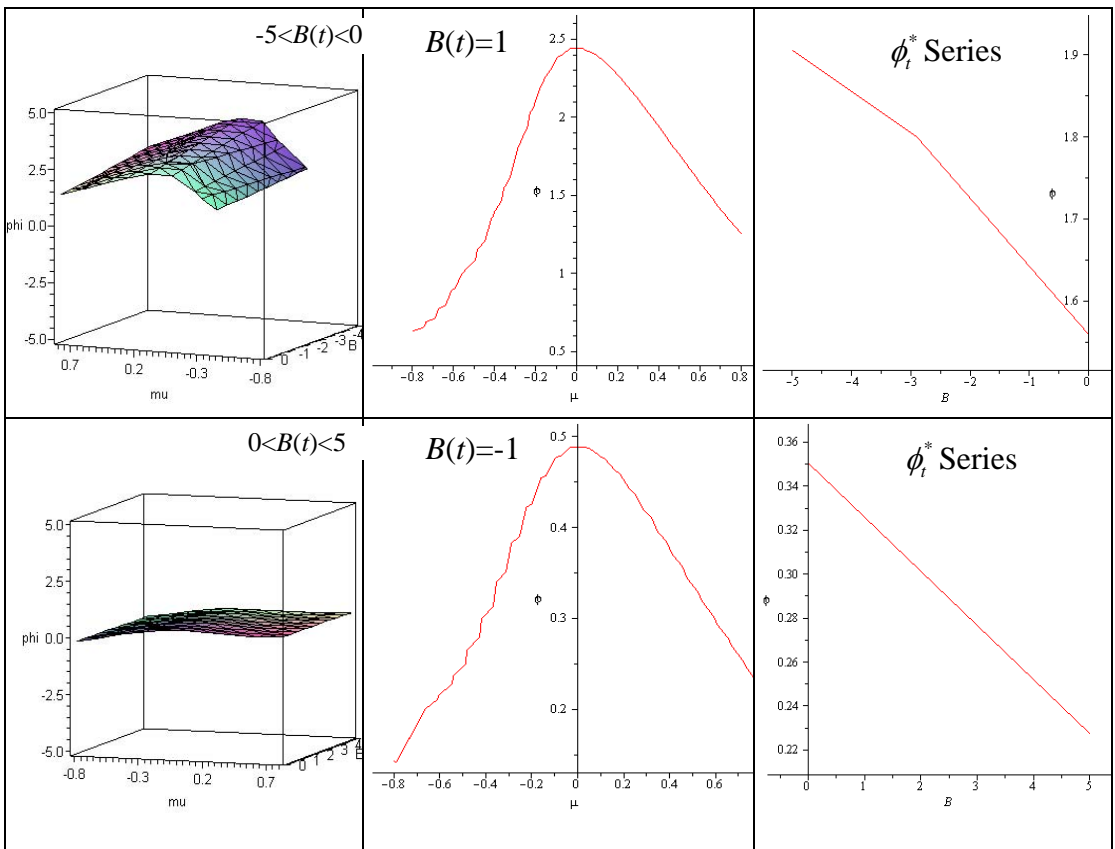


圖 5  $\mu$  對  $\phi_t^*$  的影響

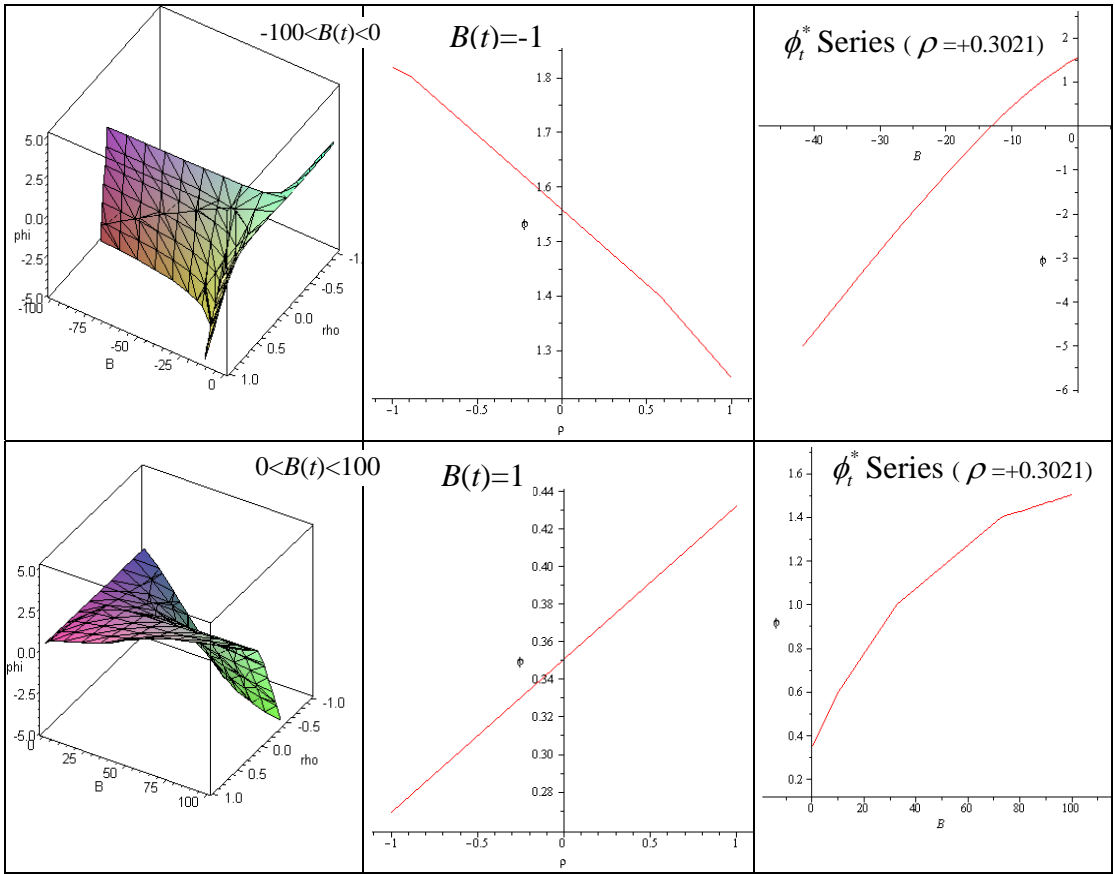


圖 6  $\rho$  對  $\phi_i^*$  的影響

係，以  $B(t) < 0$  表示  $\gamma < 1$  (設為 0.5) 時因子間的動態關係。靜態關係則以  $B(t)$  為某定值時的例子說明。

觀察圖 3、圖 4 與圖 6 之圖內左與中圖，可知當  $\gamma > 1$  (即  $B(t) > 0$ ) 時， $\sigma$  是負向影響， $\eta$ 、 $\rho$  是正向影響，而當  $\gamma < 1$  (即  $B(t) < 0$ ) 時， $\sigma$  是正向影響， $\eta$  還是正向影響， $\rho$  是負向影響。須注意的是，觀察圖 6 之中圖可發現價格跳躍  $\mu$  不論正負皆對  $\phi_i^*$  有負影響，且有價格不對稱的現象，即負跳躍比正跳躍  $\mu$  使  $\phi_i^*$  降低程度大，尤其是當風險趨避程度  $\gamma < 1$  時。

此外， $\phi_i^*$  的動態規劃走勢亦影響績效甚巨，有須說明之。以 SDE 模型 1 估計的參數為例子觀察圖 3、圖 4 與圖 5 的最左圖以及右圖可知，當  $\gamma > 1$  時，不論  $\sigma$ 、 $\eta$  或  $\mu$  值為何，動態  $\phi_i^*$  序列是逐期增加，而當  $\gamma < 1$  時  $\phi_i^*$  序列是逐期減少。但當仔細觀察圖 6 最左圖發現，動態  $\phi_i^*$  序列上升或下降會受  $\rho$  值正或負影響：當  $\gamma > 1$  時，若  $\rho$  值為負時，動態  $\phi_i^*$  序列是逐期增加，而當  $\gamma < 1$  時，若  $\rho$  值為負時，動態  $\phi_i^*$  序列是逐期減少，由於本文實證  $\rho = -0.3021$ ，因此  $\phi_i^*$  序列變



動同此情形；進一步檢視  $\rho$  值為正時，則可發現  $\phi_t^*$  序列變動與  $\rho$  值為負時的情形恰相反。圖 6 的最右圖列示  $\rho=0.3021$  時  $\phi_t^*$  序列逐期變動情形以驗證此說明。

(2) 不同  $\lambda$ 、 $\gamma$  下靜態分析  $\mu$  對  $\phi_t^*$  的影響

假定在靜態的條件下，隨機報酬波動  $V$  是固定的，此表示  $\alpha = \beta = k = \sigma = Y = 0$ ， $X$  固定為  $\mu$ 。在此例子下，風險性資產服從簡單跳躍擴散，其模型變成如下式：

$$dS_t = (r + \eta V_t - \mu \lambda V_t) S_t dt + \sqrt{V_0} S_t dZ_{1t} + \mu S_t dN_t \tag{32}$$

$$dV_t = 0 \tag{33}$$

透過上二式的條件，此動態資產配置問題的最適解式(29)簡化為如下式：

$$\phi^* = \frac{\eta - \mu \lambda}{\gamma} + \frac{\mu \lambda}{\gamma} (1 + \mu \phi^*)^{-\gamma} \tag{34}$$

上式是  $\phi^*$  的隱函式，可用此式探討  $\mu$ 、 $\lambda$ 、 $\gamma$  與  $\phi_t^*$  的關係，需要注意的是此特例的  $\phi_t^*$  並非是動態函數，而是一個靜態定值。以 SDE 模型估計的參數求解式(34)  $\phi^*$  對  $\mu$  的解，得到  $\mu$  的 3 個解圖形如圖 7，圖 7 的第 1 個圖解是較完整，顯示跳躍  $\mu$  在正或負值時資產配置比例  $\phi^*$  皆比  $\mu=0$  時還小且跳躍大、小有不對稱性。進一步以圖 8 表示在不同跳躍程度與風險趨避程度下價格跳躍  $\mu$  對  $\phi_t^*$  的影響，可發現跳躍程度愈大或風險趨避程度愈小下跳躍不對稱的情形愈明顯。

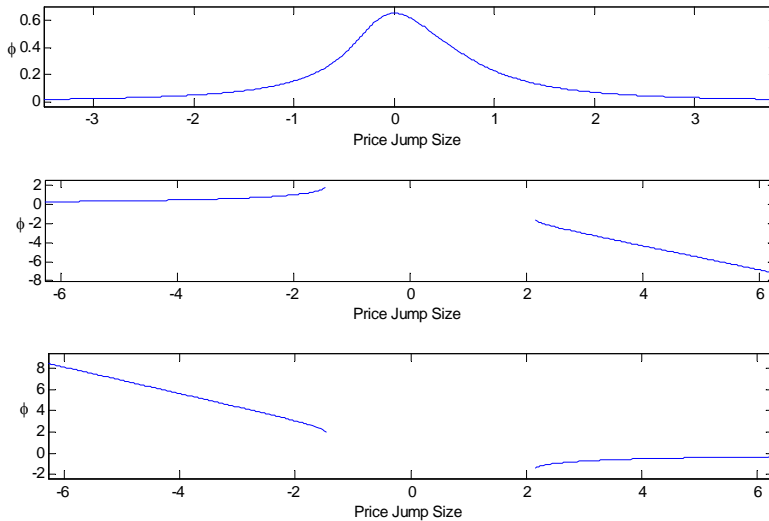


圖 7 變動價格跳躍%下之動態資產配置比例的 3 個解

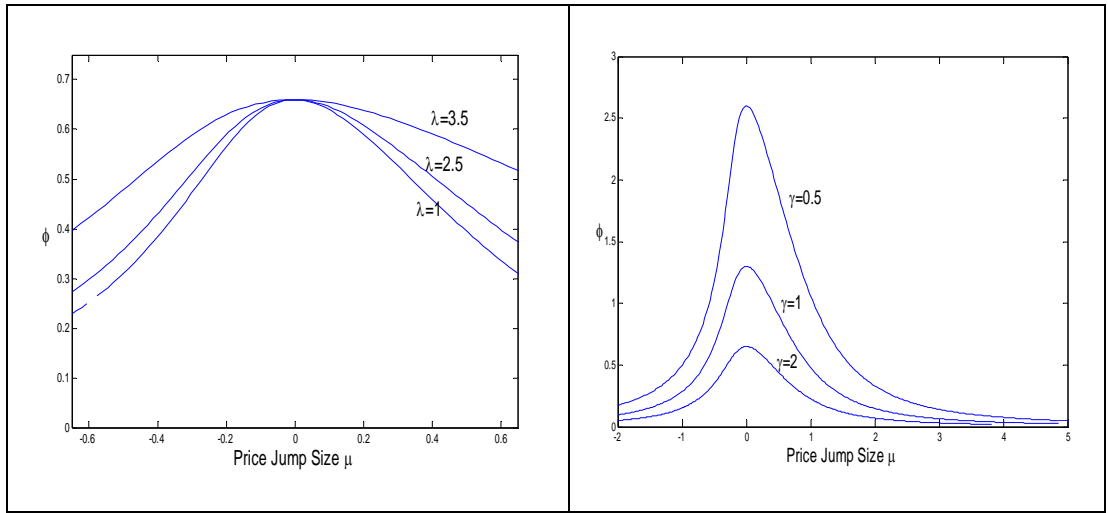


圖 8 不同  $\lambda$ 、 $\gamma$  下  $\phi^*$  vs.  $\mu$

#### 4.5 動態規劃模型的績效比較

動態規劃績效的衡量是說明不同情境下，樣本外模型動態規劃期間內的平均複利報酬與其風險。投資績效與市場表現（包含無風險利率與風險性資產報酬率）有關，但對投資人而言是可以控制風險性資產的投資比例  $\phi_t^*$  來取得較佳的投資報酬，如果在市場報酬高、風險低時，風險性資產的投資比例  $\phi_t^*$  能適時提高，反之則能適時降低，即可獲得較佳的投資報酬。

各 SDE 模型投資績效衡量前的設定如下：投資規劃分為 09/23/2002 年的未來 1 年、3.5 年與 6.33 年(代表短、中、長)的期間。初財富  $W_0 = 1$  元， $t$  時末累積財富  $W_t = [1 + (1 - \phi_t^*) * RF_t + \phi_t^* * RR_t] * W_{t-1}$ ； $RF_t$  與  $RR_t$  分別是  $t$  時無風險報酬率與台指報酬率， $t$  時末財富的報酬率是  $WR_t = W_t / W_{t-1} - 1$ ，終期財富是  $W_T = W_0 \prod_{t=1}^T (1 + r_t)$ 。風險趨避程度  $\gamma$  的設定則依圖 1 選擇效用函數凸性較不同的  $\gamma = [0.5, 1, 2.5, 6.5]$  來比較。

表 6 列示模型 1 至 4 在不同風險趨避下各期動態規劃的投資表現。模型 1 顯示 1 年短期規劃下，風險厭惡程度  $\gamma$  小 ( $\gamma = 0.5$  與 1) 的期終財富  $W_T$  較佳，而  $\gamma$  大 ( $\gamma = 2.5$  與 6) 的夏甫指標 (Sharpe ratio, SR) (Sharpe, 1964) 表現較好，但  $\gamma$  大且規劃期間長 (3.55 與 6.33 年) 表現最差。模型 2 是修正模型 1 的價格跳躍不對性效果，顯示 1 年短期規劃下的 SR 有改善，模型 3 是修正模型 1 的波動狀態轉換效果，顯示績效無明顯改善。模型 4 則是修正模型 1 的價格跳躍不對稱與波動狀態轉換效果，顯示對  $\gamma$  大 ( $\gamma = 1, 2.5$  與 6) 有全面改善效果，期終財富  $W_T$  或 SR 在不同規劃期間皆有改善效果，尤其  $\gamma = 2.5$  與 6 在規劃期間為 3.5 與 6.33 年時應用模型 1 原本表現很差，但應用模型 4 後表現改善很多，尤其 SR 比  $\gamma \leq 1$  的表現還優。

表 6 各 SDE 模型動態規劃績效比較

| 風險趨避程度                   | $\gamma = 0.5$ | $\gamma = 1$ | $\gamma = 2.5$ | $\gamma = 6$ |
|--------------------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| <b>模型 1</b>              |                |              |                |              |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 平均     | 1.587          | 0.829        | 0.332          | 0.138        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 平均   | 2.262          | 0.854        | -0.276         | -0.136       |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 平均  | 2.461          | 0.866        | -0.754         | -0.327       |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 標準差    | 0.274          | 0.132        | 0.053          | 0.022        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 標準差  | 0.511          | 0.078        | 0.638          | 0.272        |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 標準差 | 0.384          | 0.000        | 0.712          | 0.293        |
| 規劃 1 年 $W_T$             | 1.472          | 1.260        | 1.113          | 1.055        |
| 規劃 3.5 年 $W_T$           | 1.713          | 1.374        | 0.732          | 0.903        |
| 規劃 6.33 年 $W_T$          | 1.037          | 1.025        | 0.453          | 0.774        |
| 規劃 1 年 Sharpe Ratio      | 0.314          | 0.322        | 0.345          | 0.402        |
| 規劃 3.5 年 Sharpe Ratio    | 0.155          | 0.176        | -0.132         | -0.105       |
| 規劃 6.33 年 Sharpe Ratio   | 0.076          | 0.033        | -0.146         | -0.124       |
| <b>模型 2</b>              |                |              |                |              |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 平均     | 0.563          | 0.274        | 0.107          | 0.044        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 平均   | 1.283          | 0.287        | -0.433         | -0.215       |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 平均  | 1.621          | 0.294        | -1.041         | -0.509       |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 標準差    | 0.103          | 0.050        | 0.020          | 0.008        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 標準差  | 0.615          | 0.040        | 0.678          | 0.317        |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 標準差 | 0.557          | 0.028        | 0.840          | 0.402        |
| 規劃 1 年 $W_T$             | 1.225          | 1.115        | 1.053          | 1.029        |
| 規劃 3.5 年 $W_T$           | 1.846          | 1.209        | 0.604          | 0.820        |
| 規劃 6.33 年 $W_T$          | 1.919          | 1.211        | 0.360          | 0.653        |
| 規劃 1 年 Sharpe Ratio      | 0.382          | 0.402        | 0.471          | 0.638        |
| 規劃 3.5 年 Sharpe Ratio    | 0.197          | 0.273        | -0.166         | -0.151       |
| 規劃 6.33 年 Sharpe Ratio   | 0.137          | 0.145        | -0.137         | -0.132       |
| <b>模型 3</b>              |                |              |                |              |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 平均     | 1.751          | 0.483        | -0.817         | -0.843       |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 平均   | 2.493          | 0.498        | -2.216         | -2.137       |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 平均  | 2.654          | 0.505        | -2.375         | -2.492       |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 標準差    | 0.915          | 0.077        | 1.317          | 1.276        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 標準差  | 0.691          | 0.046        | 1.151          | 1.084        |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 標準差 | 0.487          | 0.000        | 0.836          | 0.856        |
| 規劃 1 年 $W_T$             | 1.298          | 1.157        | 0.780          | 0.747        |
| 規劃 3.5 年 $W_T$           | 1.673          | 1.240        | 0.240          | 0.255        |
| 規劃 6.33 年 $W_T$          | 1.418          | 1.084        | 0.094          | 0.091        |
| 規劃 1 年 Sharpe Ratio      | 0.216          | 0.333        | -0.146         | -0.199       |
| 規劃 3.5 年 Sharpe Ratio    | 0.150          | 0.191        | -0.139         | -0.141       |
| 規劃 6.33 年 Sharpe Ratio   | 0.107          | 0.049        | -0.146         | -0.135       |

表 6 各 SDE 模型動態規劃績效比較 (續)

| 風險趨避程度                   | $\gamma = 0.5$ | $\gamma = 1$ | $\gamma = 2.5$ | $\gamma = 6$ |
|--------------------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| <b>模型 4</b>              |                |              |                |              |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 平均     | 1.828          | 1.035        | 0.369          | 0.154        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 平均   | 2.019          | 1.082        | 0.384          | 0.165        |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 平均  | 2.068          | 1.106        | 0.392          | 0.164        |
| 規劃 1 年 $\phi_t^*$ 標準差    | 0.378          | 0.186        | 0.087          | 0.036        |
| 規劃 3.5 年 $\phi_t^*$ 標準差  | 0.261          | 0.143        | 0.065          | 0.029        |
| 規劃 6.33 年 $\phi_t^*$ 標準差 | 0.144          | 0.096        | 0.065          | 0.026        |
| 規劃 1 年 $W_T$             | 1.517          | 1.402        | 1.156          | 1.073        |
| 規劃 3.5 年 $W_T$           | 1.696          | 1.691        | 1.209          | 1.137        |
| 規劃 6.33 年 $W_T$          | 0.905          | 1.353        | 1.224          | 1.140        |
| 規劃 1 年 Sharpe Ratio      | 0.302          | 0.364        | 0.390          | 0.454        |
| 規劃 3.5 年 Sharpe Ratio    | 0.160          | 0.224        | 0.218          | 0.307        |
| 規劃 6.33 年 Sharpe Ratio   | 0.053          | 0.091        | 0.119          | 0.171        |

雖然台股指數波動狀態轉換效果的檢定比價格跳躍不對稱顯著許多，但是單獨修正波動狀態轉換效果的模型 3 無法改進模型 1 的績效，圖 3 也顯示單獨變動波動幅度對  $\phi_t^*$  影響不大。相對的，單獨修正價格跳躍不對稱效果的模型 2 卻比模型 3 整體表現還略佳，圖 5 顯示跳躍大小確實對  $\phi_t^*$  影響不小。因此波動轉換雖是顯著的但其對投資比例影響力比價格跳躍還弱。隱含應用單一果的修正模型無法有效改善模型績效，但同時加入二效果的模型卻有加成的交互效果存在，可大幅改善保守性投資人（即風險趨避大者）長期規劃的投資績效。

## 5. 結論

市場價格、波動與投資財富變動的行為常有跳空等非線性的現象，因此加入 Poisson 跳躍事件的模型較具實證價值。本文修正 DPS 雙跳躍模型另提出價格跳躍不對稱與波動狀態轉換 SDE 模型，並以台股指數檢定巢狀模型所建構的虛無假設，檢定結果發現：原雙跳躍模型的波動跳躍效果極弱因此可被修正為波動轉換效果，雙跳躍模型的價格跳躍也發現有不對稱效果因此可被修正為價格跳躍不對稱效果。

由固定相對風險偏好 CRRA 的效用函數解得的動態資產配置比例的情境分析發現：保守性投資人會因風險溢酬或價格波動關係增加而增加風險性資產投資比例，但會因波動（即風險）增加而減少之。愛好風險的投資人則也會因風險溢酬增加而增加投資比例，因價格波動關係增加而減少之，但因波動增加反而增加之。本文實證價格波動關係  $\rho$  值是 -0.3021，因此保守性投資人的動態資產配置比例是隨著規劃期經過逐期上升，而愛好風險的投資人則隨著規劃期經過逐期下降。

由於模型較複雜動態資產配置比例  $\phi_t^*$  的解析解無法得到，因此本文應用比較前向與後向尤拉、修正尤拉與 RKF45 等四種數值解法後，以速度快且精確的修正尤拉法來解後續  $\phi_t^*$  的求解問題。由終端條件  $B(T)=0$  起始，以遞迴法解常微分方程式，可得到  $\phi_t^*$  收斂不錯的數值解。利用  $\phi_t^*$  的解配合台股指數風險性質產與一個月銀行定存為無風險性資產進行四個 SDE 模型投資績效的分析，結果發現：單一效果修正的模型 2 與 3 無法明顯改善模型 1 的表現，但結合價格跳躍不對稱與波動狀態轉換效果修正的模型 4 可大幅改進模型 1 的績效表現。

## 參考文獻

- Andersen, T. G., Benzoni, L., and Lund, J., "An Empirical Investigation of Continuous-Time Equity Return Models," *Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3, 2002, pp. 1239-1284.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., and Ebens, H., "The Distribution of Realized Stock Return Volatility," *Journal of Financial Economics*, Vol. 61, No. 1, 2001, pp. 43-76.
- Arrow, K., *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, Chicago: Markham Publishing Co., 1971.
- Baillie, T., "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics," *Journal of Econometrics*, Vol. 73, No. 1, 1996, pp. 5-59.
- Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 5, 1997, pp. 2003-2049.
- Ball, C. A. and Torous, W. N., "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, No. 1, 1983, pp. 53-65.
- Ball, C. A. and Torous, W. N., "On Jump in Common Stock Prices and Their Impact on Call Pricing," *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, 1985, pp. 155-173.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N., "Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 1, 2006, pp. 1-30.
- Bates, D. S., "Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options," *Review of Financial Studies*, Vol. 9, No. 1, 1996, pp. 69-107
- Bates, D. S., "Post-'87 Crash Fears in SandP 500 Futures Options Markets," *Journal of Econometrics*, Vol. 94, No. 1-2, 2000, pp. 181-238.
- Black, F. and Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 1973, pp. 637-653.

- Blundell, R. and Stoker, T. M., "Consumption and the Timing of Income Risk," *European Economic Review*, Vol. 43, No. 3, 1999, pp. 475-507.
- Bochner, S., "Diffusion Equation and Stochastic Processes," *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, Vol. 35, No. 7, 1949, pp. 369-370.
- Bodurtha, J. and Courtadon, G., "Tests of the American Option Pricing Model in the Foreign Currency Options Market," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 2, 1987, pp. 297-319.
- Brandt, M. W., "Estimating Portfolio and Consumption Choice: A Conditional Euler Equations Approach," *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 5, 1999, pp. 1609-1645.
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., and Lagnado, R., "Strategic Asset Allocation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21, No. 8, 1997, pp. 1377-1403.
- Brennan, M. J. and Xia, Y., "Stochastic Interest Rates and Bond-Stock Mix," *European Finance Review*, Vol. 4, No. 2, 2000, pp. 197-210.
- Campbell, J. and Cochrane, J., "By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior," *Journal of Political Economy*, Vol. 107, No. 2, 1999, pp. 205-251.
- Chacko, G. and Viceira, L., "Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic Volatility in Incomplete Markets," Working paper, Harvard University, 2000.
- Chou, R. Y., "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 3, No. 4, 1988, pp. 279-294.
- Clark, P. K., "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices," *Econometrica*, Vol. 41, No. 1, 1973, pp. 135-155.
- Common, E., "Extreme Events and the Role of Learning in Financial Markets," Working paper, Harvard University, 2000.
- Constantinides, G., "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle," *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 3, 1990, pp. 519-543.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and Ross, S. A., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 1985, pp. 385-407.
- Das, S. and Uppal, R., "Systemic Risk and International Portfolio Choice," Working paper, Santa Clara University, 2001.
- Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd ed., Princeton, NJ: Princeton University Press, 2001.
- Duffie, D. and Epstein, L. G., "Stochastic Differential Utility," *Econometrica*, Vol. 60, No. 2, 1992, pp. 353-394.

- Duffie, D. and Pan, J., "An Overview of Value at Risk," *The Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 3, 1997, pp. 7-49.
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K., "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusion," *Econometrica*, Vol. 68, No. 6, 2000, pp. 1343-1376.
- Eraker, B., Johannes, M., and Polson, N., "The Impact of Jumps in Volatilities and Returns," *Journal of Finance*, Vol. 58, No. 3, 2003, pp. 1269-1300.
- Fama E. F., "The Behavior of Stock Market Price," *Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, 1965, pp. 34-105.
- Goldstein, R. and Zapatero, F., "General Equilibrium with Constant Relative Risk Aversion and Vasicek Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 3, 1996, pp. 331-340.
- Grossman, S. J. and Vila, J.-L., "Optimal Dynamic Trading with Leverage Constraints," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 27, No. 2, 1992, pp. 151-132.
- Han, Y., "Asset Allocation with a High Dimensional Latent Factor Stochastic Volatility Model," *The Review of Financial Studies*, Vol. 19, No. 1, 2006, pp. 237-271.
- Henderson, V. and Hobson, D. G., "Real Options with Constant Relative Risk Aversion," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol 27, No. 2, 2002, pp. 329-355.
- Herings, P. J.-J. and Kubler, F., "Approximate CAPM When Preferences Are CRRA," *Computational Economics*, Vol. 29, No. 1, 2007, pp. 13-31.
- Ingolf, D. and Ernst, M., "Lower Salaries and No Options? On the Optimal Structure of Executive Pay," *The Journal of Finance*, Vol. 62, No. 1, 2007, pp. 303-343.
- Jarrow, R. A. and Rosenfeld, E. R., "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Journal of Business*, Vol. 57, No. 3, 1984, pp. 337-351.
- Kim, T. S. and Omberg, E., "Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior," *Review of Financial Studies*, Vol. 9, No. 1, 1996, pp. 141-161.
- Liu, J., "Portfolio Selection in Stochastic Environments," *Review of Financial Studies*, Vol. 20, No. 1, 2007, pp. 1-39.
- Liu, J., Longstaff, F. A., and Pan, J., "Dynamic Asset Allocation with Event Risk," *Journal of Finance*, Vol. 58, No. 1, 2003, pp. 231-259.
- Longstaff, F. A., "Optimal Portfolio Choice and the Valuation of Illiquid Securities," *Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 2, 2001, pp. 407-431.
- Lynch, A., "Portfolio Choice and Equity Characteristics: Characterizing the Hedging Demand Induced by Return Predictability," *Journal of Financial Economics*, Vol. 62, No. 1, 2000, pp. 67-130.

- Mandelbrot, B. B., "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, Vol. 36, No. 3, 1963, pp. 394-419.
- Mandelbrot, B. B., "The Variation of Some Other Speculative Prices," *Journal of Business*, Vol. 40, No. 3, 1967, pp. 393-413
- Merton, R., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous- Time Case," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, 1969, pp. 247-257.
- Merton, R., "Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, 1971, pp. 373-413.
- Merton, R., "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1, 1976, pp. 125-144.
- Merton, R., *Continuous-Time Finance*, Revised Edition, Oxford, UK: Basil Blackwell, 1992.
- Nelson, C. H. and Escalante, C. L., "Toward Exploring the Location-Scale Condition: A Constant Relative Risk Aversion Location-Scale Objective Function," *European Review of Agricultural Economics*, Vol. 31, No. 3, 2004, pp. 273-287.
- Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, Vol. 59, No. 2, 1991, pp. 347-370.
- Palacios-Huerta, I. and Serrano, R., "Rejecting Small Gambles under Expected Utility," *Economics Letters*, Vol. 91, No. 2, 2006, pp. 250-259.
- Pan, J., "The Jump-Risk Premia Implicit in Option Prices: Evidence from an Integrated Time-Series Study," *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, No. 1, 2001, pp. 3-50.
- Rabemananjara, R. and Zakolin, J. M., "Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 8, No. 1, 1993, pp. 31-49.
- Saha, A., "Expo-Power Utility: A Flexible Form for Absolute and Relative Risk Aversion," *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 75, No. 4, 1993, pp. 905-913.
- Schroder, M. and Skiadas, C., "Optimal Consumption and Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility," *Journal of Economic Theory*, Vol. 89, No. 1, 1999, pp. 68-126.
- Scott, D. W., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, NY: John Wiley and Sons, 1992.
- Sharpe, W. F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, 1964, pp. 425-442.
- Sundaresan, S., "Intertemporally Dependent Preferences and the Volatility of Consumption and Wealth," *Review of Financial Studies*, Vol. 2, No. 1, 1989, pp. 73-89.



Wu, L., "Jumps and Dynamic Asset Allocation," *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 20, No. 3, 2003, pp. 207-243.