

維修員假期因素對於多機台失效模式績效之 影響

The Effect of Repairmen Vacation Issue on the Performance of Multi-server Failure Models

王風帆 Fong-Fan Wang
修平科技大學工業工程與管理系

Department of Industrial Engineering and Management, Hsiuping University of
Science and Technology

(Received October 15, 2009; Final Version May 20, 2010)

摘要：文獻上記載多種多機台失效模式，然而欠缺系統性比較，本研究根據機台間是否有共同失效及修復週期，維修員是否有假期等因素，比較三種多機台失效模式。其中機台間沒有共同失效及修復週期模式可能有所謂的機器干涉現象，我們探討維修員假期因素對於機器干涉現象的影響，並發展及延伸必要的數學模式，經由數值案例本研究比較三種假期模式量化資訊，最後我們提出在作業管理角度下此類問題的最佳化決策。

關鍵詞：多機台、失效模式、機器干涉、假期

Abstract: There are several multi-server failure models in the literature. However, no systematic comparisons between models are available. This research tries to compare three types of multi-server failure models by categorizing if there are common failure and repair cycles and if repairman is allowed for vacation. Machine interference problems may arise when no common failure and repair cycles are allowed. We study the aggravated effect of machine interference problems that may arise if repairman is allowed for vacation. We derive and extend necessary mathematic models for our

本文之通訊作者為王風帆，e-mail: frank@mail.hust.edu.tw。

本研究承國科會計劃 NSC 98-2221E-164-016 部份經費補助，特此致謝。

comparative study. Through numeric studies our models provide decision makers quantitative information about the vacation effect. Finally, we state how the optimal policy may be obtained from the viewpoint of operations management.

Keywords: Multi-server, Failure Model, Machine Interference, Vacation

1. 前言

一般供應系統變動因素包括供給與需求的變異，例如終端顧客訂單變異往往造成上游訂單變異增加之長鞭效應，而供應系統的供給變異，往往造成供應系統績效不如預期，例如訂單前置時間拉長、缺貨增加等。本研究探討的是供給端製造機器無法正常營運對績效影響。在不喪失一般性原則之下我們使用多機台失效模式來探討供給端變異，雖然現有文獻提出各種不同多機台失效模式，然而缺乏模式間對於供應系統績效差異比較，企業規劃時可能因不當引用某種失效模式，造成錯誤預測，甚至後續決策，因此引致本研究動機。

假期模式多半係假設系統中沒有待處理顧客時，機台可以暫時離開或利用空檔從事次要工作或從事預防保養作業，亦稱為相依 (dependent) 假期模式。視機台假期是集體或單獨進行又可分為同步 (synchronous) 與非同步 (asynchronous) 模式，且可分為單次 (single) 與多次 (multiple) 假期。本研究所探討之多機台失效模式屬於上述假期模式之特例，其發生不必等待系統中沒有待處理顧客時機點，而是隨時可發生，可應用在分析機台失效及修復過程，亦即先佔優先權式 (preemptive) 假期模式，換言之，我們應用文獻上所稱之獨立 (independent) 假期模式 (Vinod, 1986)。在此模式之下期望假期間隔即為平均失效間隔 (mean time to failure; MTTF)，期望假期長度則為平均修復時間 (mean time to repair; MTTR)。本研究所提多機台失效模式，係假設多部平行機台同時操作，假設機台之間為有極大關聯時，當有一部機台故障，可能造成全線停擺，問題解決後再全線啟動，亦即有共同失效及修復週期，同步失效模式可能較為適當；假設機台之間為獨立，有各自當機及修復週期，非同步失效模式可能較為適當，同步失效模式一般不考慮維修員；非同步失效模式，一般考慮維修員，然而當維修員數小於機台數時會造成機台必須等候維修之所謂機器干涉 (machine interference) 現象 (Haque and Armstrong, 2007)，Neuts (1994, P. 275) 亦提到此現象。Yang *et al.* (2005) 探討單一操作員操作多個平行機台的機器干涉現象，他們使用開放及封閉式等候網路 (open and closed queueing network) 並行建模方式解決此一複雜 G/G/1 機器干涉問題，值得注意的是該研究假設機台維修無等候問題，主要探討操作所造成干涉現象，本研究則探討維修造成干涉現象。

Medhi (1991) 回顧 M/G/1 相依假期模式有關系統中等待數及等待時間的一些隨機解構

(stochastic decomposition) 特性，例如系統中等待數可解構成一般 M/G/1 系統中等待數及假期中到達數此兩變數之加總。Kao and Narayanan (1991) 提出多機台非同步多假期模式之擬生死 (quasi-birth-and-death, QBD) 模型，並提出演算法，求出等候線人數之穩態機率及平均忙碌時間 (busy period)、期望等候時間及等候時間機率分配等系統績效。Levy and Yechiali (1976) 探討多機台多個及單一假期模式及使用機率生成函數 (generating function) 解平均等候人數及忙碌機台人數機率分配等系統績效。Zhang and Tian (2004) 提出一個限制同一時間休假機台數 (d) 必須少於所有機台數 (c) 之非同步多假期 (c, d) 擬生死模式，並推導出公式解 (closed-form solution)。獨立假期模式文獻例 Neuts and Lucantoni (1979) 等。Neuts and Lucantoni (1979) 及 Neuts (1994) 提出矩陣解析法解決外在客戶到達率變動之非同步假期問題之 QBD 模型，但未考慮維修員亦可能有假期。Kelton *et al.* (2003) 提出使用模擬解獨立假期同步問題，唯據我們所知文獻似乎尚未見獨立假期同步問題之數學模式。Wang and Su (2006) 延伸 (Neuts and Lucantoni, 1979; Neuts, 1994) 模型使能考慮維修員之假期因素，以 QBD 數學模型建模及分析。Vinod (1986) 提出單一及多機台，相依及獨立非同步假期 QBD 模式，單一機台提出公式解，多機台以解 QBD 模式常用之矩陣幾何法 (matrix geometric method; MGM) 求解等候線人數之穩態機率及相關系統績效，並提出近似解，但未考慮維修員，即不涉及機器干涉問題。

Patchong *et al.* (2003) 則假設作業員由正常工作時間到必須加班之延長工時狀態轉換可視為馬可夫過程，進而探討人的因素對於一標緻雪鐵龍 (Peugeot Citroën) 汽車生產組裝線績效之影響。

首先我們針對獨立假期同步問題發展數學模式，並延伸獨立假期非同步維修員假期模式，使模式亦能表達一致維修員 (identical repairman) 情況，我們引用馬可夫可調適卜瓦松過程之觀念 (Wang and Su, 2006)，使模式更有彈性。為使本研究更完整，我們亦介紹其它已知多機台失效模式數學模型作為比較，我們說明當機台數與維修員數相同時，有無考慮維修員並無不同，亦即 Neuts and Lucantoni (1979) 與 Vinod (1986) 相同。針對所有模式我們提出演算式解法，並以一簡單數值案例分析各種失效模式對績效的影響，最後我們應用數值案例說明如何在已知需求範圍，決定假期參數及資源之合理設計，使供應系統在製造不確定、變異的情況下得最佳化決策。

本研究其餘各節安排如下：第 2 節提出問題定義及假設，第 3 節詳述建模過程，第 4 節提出演算式解法，第 5 節則為數值案例之量化分析，第 6 節為結論及未來研究方向。

2. 問題定義及假設

本研究中失效與當機、假期有相同定義，訂單與顧客 (人員) 有相同定義。所探討供應系

統製造、假期及維修示意圖詳圖1。圖1每個服務結點前之等候線假設無限，其中參數說明見符號定義。其它問題假設如下：

- (1) 所有服務、當機及修復時間皆為指數分配。當機台失效時，假設維修員有空，機台將立刻被修復。
- (2) 使用先佔優先權式 (preemptive) 失效模式，意即當工件 (或機器) 正在加工 (或維修) 時，機器 (維修員) 失效發生將立刻中止現有加工 (或維修) 工作，然而被中斷工作之工件 (或機器) 可找有空之機器 (或維修員)。當機器修復 (或維修員復工) 被中斷工作之工件 (或機器) 將重新開始 (resume) 其生產 (或維修) 工作，意即被中斷前之工時無法累計。
- (3) 當系統中無等待工件 (或機器) 時，機器 (或維修員) 亦可能失效。

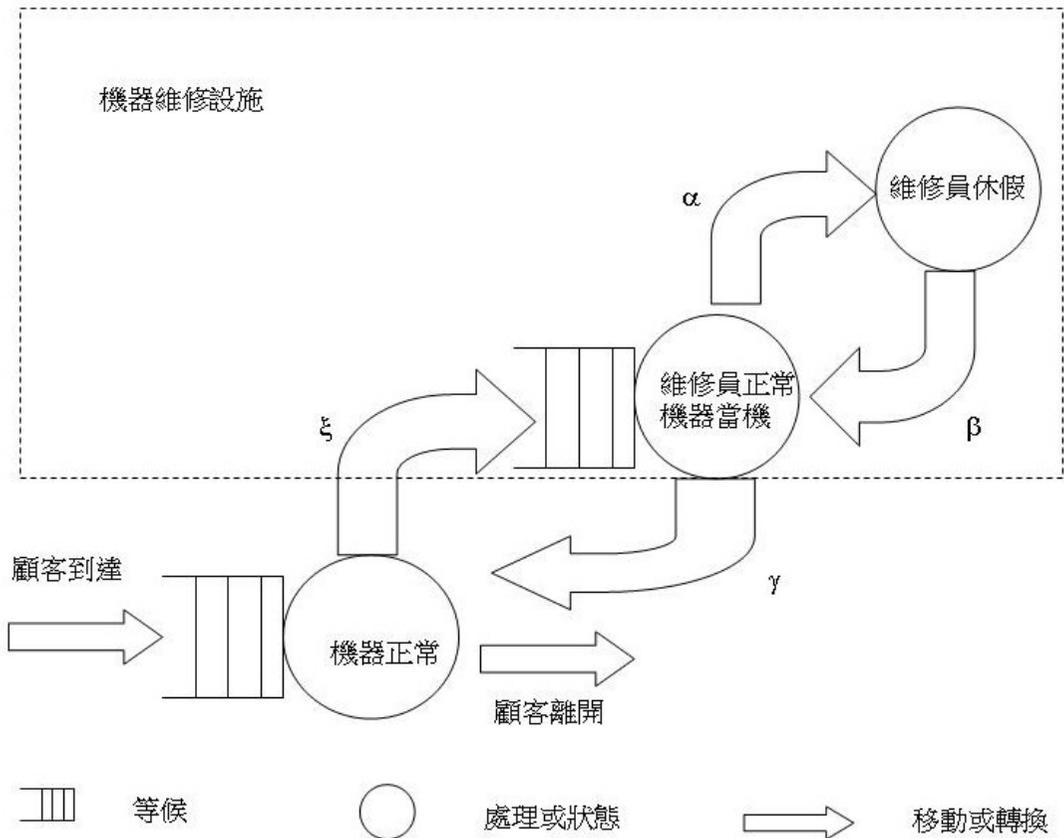


圖 1 考慮維修員假期因素之機器維修問題示意圖

以下列出本研究中所使用符號定義。

符號定義：

\tilde{Q}	假期模式系統生成矩陣
$Q^{(i)}$	假期模式 i 下機台維修系統生成矩陣
G	維修員假期生成矩陣
Λ	維修員假期可用數矩陣
\mathbf{R}	差分方程特徵函式根矩陣
ρ	系統負荷量
x_j	訂單到達數為 j 時之穩態機率
π_j	不同步模式可用機台數為 j 時之穩態機率，同步模式 π_0 表示休假之機率， π_1 表示未休假之機率
ϕ_j	可用維修員數為 j 時之穩態機率
c	機台數量，假設 $c \geq 2$
r	維修員數量，假設 $r \leq c$
W	平均系統等待時間
L	平均系統等待人數
O	平均可用機台數
F	平均修理中機台數
A	平均可用維修員數
V	平均休假中維修員數
λ	平均訂單到達率
u	每一機台平均服務率
ζ	機台平均失效率 (=1/MTTF)
γ	機台平均維修率 (=1/MTTR)
α	維修員平均休假率
β	維修員平均復工率
C_o	單位時間單位機台操作成本
C_f	單位時間單位機台維修成本
C_w	單位時間單位訂單等候成本
C_r	單位時間單位維修員任用成本
C_v	單位時間單位維修員休假成本
$E[TC]$	期望單位時間總作業成本
$E[CC]$	期望單位時間機台及維修員成本
$E[WC]$	期望單位時間訂單等候成本
$E[FC]$	期望單位時間機台維修成本
$E[VC]$	期望單位時間維修員休假成本
I	單位矩陣，大小視情況而定
e	單位行向量，大小視情況而定

3.2 非同步假期

無維修員

非同步失效模式下，Vinod (1986) 不考慮維修員，Neuts and Lucantoni (1979) 及 Neuts (1994) 考慮維修員，因此 Vinod (1986) 模式無所謂機器干涉問題，(1)之矩陣成員可表示如下：

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= Q^{(2)} - \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = Q^{(2)} - \Delta(\lambda), \\
 A_{01} &= A_{12} = \dots = A_{c-1,2} = A_0 = \Delta(\lambda), \\
 A_{j0} &= \text{diag}\{0, u, \dots, (i-1)u, iu, \dots, iu\}, 1 \leq i \leq c-1, \\
 A_{j1} &= Q^{(2)} - A_{j2} - A_{j0}, 1 \leq i \leq c-1, \\
 A_2 &= \text{diag}\{0, u, 2u, \dots, cu\} = \Delta(u), \\
 A_1 &= Q^{(2)} - (A_0 + A_2),
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中機台維修系統次矩陣可表示如下：

$$Q^{(2)} = \begin{bmatrix} -c\gamma & c\gamma & & & & \\ \zeta & -(\zeta + (c-1)\gamma) & (c-1)\gamma & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (c-1)\zeta & -(\gamma + (c-1)\zeta) & \gamma \\ & & & & c\zeta & & -c\zeta \end{bmatrix}. \tag{3}$$

從 $Q^{(2)}$ 我們得到機台維修系統穩態機率：

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \left[1 + \sum_{j=1}^c \frac{1}{j!} \left(\frac{c\gamma}{\zeta}\right)^j \prod_{\tau=0}^{j-1} \left(1 - \frac{\tau}{c}\right) \right]^{-1}, \\
 \pi_j &= \frac{1}{j!} \left(\frac{c\gamma}{\zeta}\right)^j \prod_{\tau=0}^{j-1} \left(1 - \frac{\tau}{c}\right), 1 \leq j \leq c.
 \end{aligned}$$

供應系統維持穩定的條件為

$$\rho = \left(\sum_{j=0}^c \pi_j \lambda_j\right) \left(u \sum_{j=1}^c j \pi_j\right)^{-1} < 1.$$

有維修員

依據 Neuts and Lucantoni (1979) 及 Neuts (1994)，當 $c > r$ 即造成所謂機器干涉問題。此模式下(1)之矩陣成員除機台維修系統次矩陣不同外，其餘與(2)皆相同，如下所示：

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= Q^{(3)} - \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_c) = Q^{(3)} - \Delta(\lambda), \\
 A_{01} &= A_{12} = \dots = A_{c-1,2} = A_0 = \Delta(\lambda), \\
 A_{j0} &= \text{diag}\{0, u, \dots, (i-1)u, iu, \dots, iu\}, \text{ for } 1 \leq i \leq c-1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i1} &= Q^{(3)} - \Delta(\lambda) - A_{i0}, 1 \leq i \leq c-1, \\ A_1 &= Q^{(3)} - (\Delta(\lambda) + A_2), \\ A_2 &= \text{diag}\{0, u, 2u, \dots, cu\} = \Delta(u), \end{aligned}$$

其中機台維修系統次矩陣必需考慮維修員數，表示如下：

$$\begin{aligned} Q_{j,j-1}^{(3)} &= j\zeta, 1 \leq j \leq c, \\ Q_{j,j+1}^{(3)} &= \gamma \min(r, c-j), 0 \leq j \leq c-1, \\ Q_{j,j}^{(3)} &= -j\zeta - \gamma \min(r, c-j), 0 \leq j \leq c. \end{aligned} \tag{4}$$

從 $Q^{(3)}$ 我們得到機台維修系統穩態機率 (參考 Neuts and Lucantoni, 1979 及 Neuts, 1994):

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[\sum_{j=0}^{c-r+1} \frac{1}{j!} \left(\frac{r\gamma}{\zeta} \right)^j + \sum_{j=c-r+2}^c \frac{1}{j!} \left(\frac{r\gamma}{\zeta} \right)^j j^{-c+r-1} \prod_{\tau=1}^{c-r+1} \left(1 - \frac{\tau}{r} \right) \right]^{-1}, \\ \pi_j &= \frac{1}{j!} \left(\frac{r\gamma}{\zeta} \right)^j \pi_0, \quad 0 \leq j \leq c-r+1, \\ \pi_j &= \frac{1}{j!} \left(\frac{r\gamma}{\zeta} \right)^j j^{-c+r-1} \prod_{\tau=1}^{c-r+1} \left(1 - \frac{\tau}{r} \right) \pi_0, \quad c-r+2 \leq j \leq c. \end{aligned}$$

供應系統維持穩定的條件同上。

定理 1: 當 $c = r$ ，Neuts and Lucantoni (1979) 與 Vinod (1986) 相同。

證明：顯然地，當 $c = r$ 機器干涉現象即不存在，因此有無維修員模式結果一致。比較(3)與(4)亦可發現當 $c = r$ ， $Q^{(2)} = Q^{(3)}$ 。

維修員假期因素

依據 Wang and Su (2006)，當考慮維修員假期我們必須考慮維修員平均復工率及平均失效率是否一致，當其並非一致時，令 G_j 表示第 j 維修員假期之生成矩陣 (infinitesimal generator)，假設 0 表示休假，1 表示未休假，令 α_j 表示第 j 維修員從 0 到 1 平均速率， β_j 表示第 j 維修員從 1 到 0 平均速率，引用馬可夫可調適卜瓦松過程之觀念 (Wang and Su, 2006)，見附錄 A。令 A_j 表示第 j 維修員可用數矩陣 (rate matrix)，則：

$$\begin{aligned} G_j &= \begin{bmatrix} 0 & \beta_j \\ \alpha_j & -\alpha_j \end{bmatrix}, 1 \leq j \leq r, \\ A_j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

合成維修員假期之生成矩陣及可用數矩陣則為：

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_r,$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \dots \oplus \Lambda_r.$$

其中 \oplus 表示何內克加法 (Kronecker sum)， \otimes 表示何內克乘法 (Kronecker product) (Neuts, 1994)。因此(1)中矩陣成員可表示如下：

$$A_{00} = Q^{(4)} - \lambda I_{(c+1) \times 2^r},$$

$$A_{01} = A_{12} = \dots = A_{c-1,2} = A_0 = \lambda I_{(c+1) \times 2^r} = \Delta(\lambda),$$

$$A_{i0} = \text{diag}\{u \min(i, j), 0 \leq j \leq c\} \otimes I_{2^r}, 1 \leq i \leq c-1,$$

$$A_{i1} = Q^{(4)} - A_{i0} - \Delta(\lambda), \quad 1 \leq i \leq c-1,$$

$$A_1 = Q^{(4)} - \Delta(\lambda) - A_2,$$

$$A_2 = \text{diag}(0, u, 2u, \dots, cu) \otimes I_{2^r} = \Delta(u).$$

其中機台維修系統次矩陣可表示如下：

$$Q^{(4)} = Q^{(3)} \oplus G = Q^{(3)} \otimes I_{2^r} + I_{(c+1)} \otimes G.$$

因為維修員假期會影響整個機器維修等候線的修復率，因此 $Q^{(4)}$ 上三角次矩陣參考(4)調整如下：

$$Q_{j,j+1}^{(4)} = \gamma \min((c-j)I_{2^r}, \Lambda), 0 \leq j \leq c-1,$$

$$Q_{j,j}^{(4)} = -j\zeta \times I_{2^r} - \gamma \min((c-j)I_{2^r}, \Lambda) + G, 0 \leq j \leq c.$$

從 $Q^{(4)}$ 較難如上述般得公式解，然而我們可利用 $\pi Q^{(4)} = 0$ 公式，將單位行向量取代 $Q^{(4)}$ 第一行再取其反矩陣，由所得矩陣第一列即為機台維修系統穩態機率，供應系統維持穩定的條件為

$$\rho = \lambda(u \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^{2^r} j\pi_{jk})^{-1} < 1.$$

當維修員平均復工率及平均失效率對所有維修員都一致時，可用 α 及 β 分別表示平均失效率及平均復工率，令 j 表示維修員可用數，則可略去維修員假期之何內克運算如下

$$G_{j,j-1} = j\alpha, 1 \leq j \leq r,$$

$$G_{j,j+1} = (r-j)\beta, 0 \leq j \leq r-1,$$

$$G_{j,j} = -j\alpha - (r-j)\beta, 0 \leq j \leq r,$$

$$\Lambda = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, r\}.$$

接著將 2^r 全部以 $r+1$ 取代，例如 $Q^{(5)} = Q^{(3)} \otimes I_{(r+1)} + I_{(c+1)} \otimes G$ 。其它推導同前。上述同步與非同步假期模式因有共通擬生死矩陣表示(1)，可用下節 MGM 求解 (Neuts, 1994)。

4. MGM 演算式解法

當訂單數大於等於機台數時，形成底下重覆出現的所謂差分方程特徵函式，此特徵函式為使用 MGM 求解的主要結構

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{c-1}\mathbf{R}^{i-c+1}, \quad i \geq c-1 \end{aligned}$$

根矩陣 \mathbf{R} 乃上述特徵函式最小非負解 (Neuts, 1994)。由 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ 開始，我們使用連續代換法直到 \mathbf{R} 值收斂 (Neuts, 1994)，如下所示：

$$\mathbf{R}_{k+1} = -(\mathbf{A}_2 + \mathbf{R}_k^2\mathbf{A}_0)(\mathbf{Q} - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0)^{-1}.$$

為得到邊界條件解 $x_j, i \leq c-1$ ，我們使用上述相同連續代換法 (Neuts, 1994):

$$\begin{aligned} x_0 &= [x_0(\mathbf{A}_{01} + \Delta_0) + x_1\mathbf{A}_{10}]\Delta_0^{-1}\mathbf{A}_2, \\ x_i &= [x_{i-1}\mathbf{A}_2 + x_i(\mathbf{A}_{i1} + \Delta_i) + x_{i+1}\mathbf{A}_{i+1,0}]\Delta_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq c-2, \\ x_{c-1} &= \{x_{c-2}\lambda\mathbf{I} + x_{c-1}[\mathbf{A}_{c-1,1} + \Delta_{c-1} + \mathbf{R}\Delta(u)]\Delta_{c-1}^{-1}, \end{aligned}$$

上述 Δ_0 及 $\Delta_i, 1 \leq i \leq c-1$ 分別表示 $diag(\mathbf{A}_{01})$ 及 $diag(\mathbf{A}_{i1})$ 而 $diag(\mathbf{A}_*)$ 表示原矩陣 \mathbf{A} 對角線元素所組成的矩陣。連續代換法持續運算直到收斂為止，此處收斂指前後兩運算值差在某一可接受值。 x_j 得到後經由正規化使機率和為 1，之後我們可使用期望值方法得到系統中平均等候訂單數等績效衡量如下所述。最後值得一提的是此處由於問題模型複雜度較難我們使用數值演算法而非導公式解方式求解，由於現今電腦運算速度進步使得連續代換法可以很快速的求出精確的解，如附錄 B 數學與模擬輸出比較。

定理 2： $E[L] = \left(\sum_{i=1}^{c-2} ix_i + x_{c-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2}[(c-1)\mathbf{I} - (c-2)\mathbf{R}] \right) \mathbf{e}.$

證明：使用期望值方法 $E[L] = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j\mathbf{e}$ 經過化簡，可得上式。

定理 3：平均可用機台數與平均修理中機台數比值 $\frac{O}{F} = \frac{\gamma}{\zeta}$ 。

證明：詳 Wang and Su (2006)。註：因為機台干涉原因我們尚需考慮平均等待修理中機台數，因此 $c \neq O + F$ 。

定理 4：平均休假中維修員數 $V = \frac{\alpha r}{(\alpha + \beta)}$ 。

證明：詳附錄 C。

定理 5： $\pi_j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \right)_j, 0 \leq j \leq c$ 。

證明：詳 Neuts and Lucantoni (1979)。

定理 6： $\phi_j = \left(\sum_{i=0}^c \pi_i \right)_j$ 。

證明：與定理 5 類似，因為 $Q^{(i)}$ 中含 G 。

註：平均可用機台數、平均修理中機台數及平均休假中維修員數亦可使用期望值方法求，但定理 3 及定理 4 提供更快速公式解，定理 5 及定理 6 則可作為機率交互驗證。由 Little's law: $W = L/\lambda$ 我們可得平均系統等待時間。

5. 數值案例探討

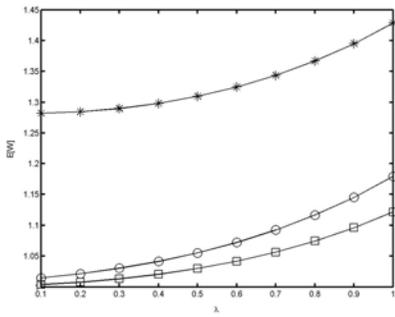
本節探討假期模式對一接單製造設施之影響，假設有一 M/M/3, $r = 3$ 之供應系統，參數設定如下： $\alpha = \beta = \gamma = \zeta = 0.5, u = 1$ 。我們以所提模式求解比較不同模式，在系統負荷量不大於 1 之情況， λ 從小到大之平均系統等待時間，所提出模式除可評估系統設計是否恰當，亦可作為最佳化設計之用，首先我們分析不同當機頻率在不同系統負荷量三種當機模式之比較，接著結合線性成本提出機台及維修員數最佳組合之設計。

5.1 績效比較

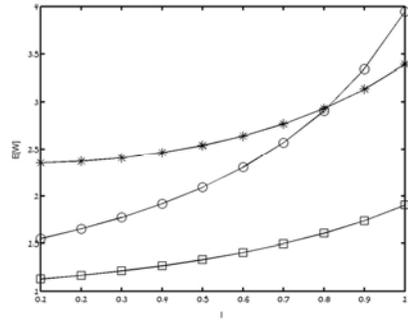
圖 2 表同步與非同步失效模式的績效比較，我們發現當 ζ 很小時 (本例中 0.05，見圖 2a)，非同步永遠比同步績效好 (不管維修員是否允許不定期休假)。且當維修員不允許休假時，兩者差距似乎不會隨 λ 改變而影響 (但是幅度隨 ζ 增大而變大)，這可能是因為當 MTTF 很大時當機效應不那麼明顯之故。但是當 ζ 逐漸增大，亦即當機愈頻繁，非同步維修員允許不定期休假有可能比同步績效差，這可從圖 2b 至 2e 看出當 ζ 逐漸增大非同步維修員允許不定期休假時， λ 在某一臨界值之前，其績效校比同步好，臨界值之後，則比同步差，且臨界值似乎隨著 ζ 增大而變小，如圖 2b 當 $\zeta = 0.3$ ，臨界值 λ 約為 0.8，圖 2c 顯示當 $\zeta = 0.5$ ，臨界值 λ 約為 0.5，圖 2d 及 2e 則顯示當 λ 很小時，臨界值 λ 變得極小。圖 2f 顯示當維修員很少 ($r = 1$)，縱使 λ 很小，非同步維修員允許不定期休假不可能比同步好。本例的結論說明，不管當機效應如何，在各種不同系統負荷量及維修員數考量下，同步假期模式績效永遠比非同步假期模式不允許維修員休假差。

5.2 最佳化

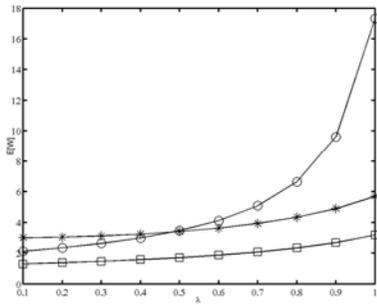
為指出研究中所提模式進一步可能應用，此處我們以簡單例子說明如何考慮不同系統負荷量下此類問題的最佳化決策。由上節分析及基本等候線理論如 (Medhi, 1991) 可知維修員數、



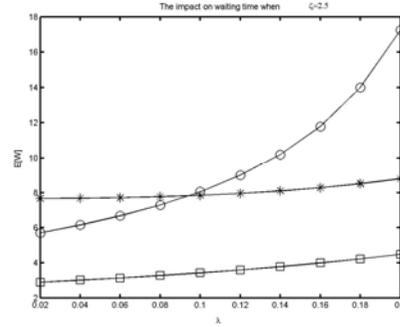
a. $\zeta = 0.05$



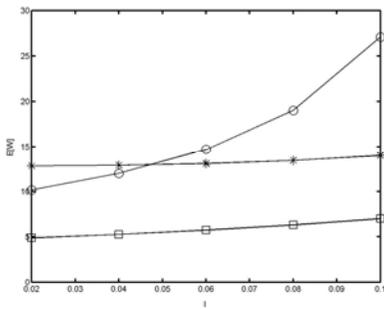
b. $\zeta = 0.3$



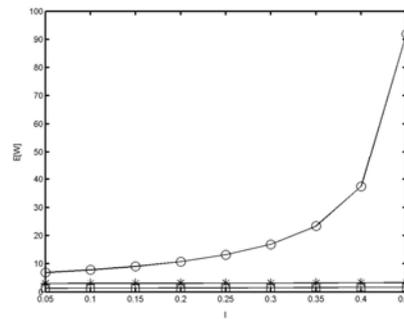
c. $\zeta = 0.5$



d. $\zeta = 2.5$



e. $\zeta = \tilde{3}$



f. $r = 1$

- : 非同步維修員沒假期模式
- : 非同步維修員有假期模式
- *— : 同步假期模式

圖 2 a-f 同步與非同步失效模式的績效比較 (非同步含維修員是否允許不定期休假)

機台數及假期參數皆會影響系統績效，我們說明休假作業擬定及產能設計之最佳化過程。圖 3 顯示維修員平均休假率對供應系統績效影響，決策者可據以制定員工休假率，例如 $E[W] < 5$ 則平均 3 天以上才可休假一次；表 1 及表 2 顯示在有限資源下維修員及機台數組合對績效之影響。

使用第 3 節及定理二至四，表 1 顯示 c 從 2 至 6，各種可行 (c, r) 組合在 $\alpha = \beta = \gamma = \zeta = 0.5$, $u = 1$ 下對 O, L, F, V 之影響，我們使用第三節所述狀態縮減 (state reduction) 技術，例如 $(c, r) = (6, 6)$ 可節省 $(6+1) * (2^{(6+1)} - (6+1)) = 847$ 狀態數，大幅提昇此類數值演算法效率。由表 1 我們發現增加維修員數縮短待修機器數，同時增加可用及修理中機器數，表 2 結合線性成本以在有限資源下搜尋機台及維修員數最佳組合，所設定目標式如下：

$$\begin{aligned} \text{Min } E[TC] &= E[CC] + E[WC] + E[FC] - E[VC] \\ &= (C_o O + C_r r) + C_w L + C_f F - C_v V \end{aligned}$$

上式 $E[CC]$ 含二成本項目：單位時間機器作業及維修員任用成本，其中前者不含失效，待修機器不計成本， $E[VC]$ 為因維修員休假扣除之任用成本，其它如定義所述。假設 $C_o = C_r = C_f = C_v = 20, C_w = 40$ ，限於等候問題很多時候無法利用凸函數等的特性方便最佳化搜尋，本例中使用窮舉法找出最佳解。雖然我們無法證明 $c > 6$ 是否較佳，在 $c < 7$ 時 $(c, r) = (4, 3)$ ， $E[TC] = 143.508$ 為資源受限下最佳解。

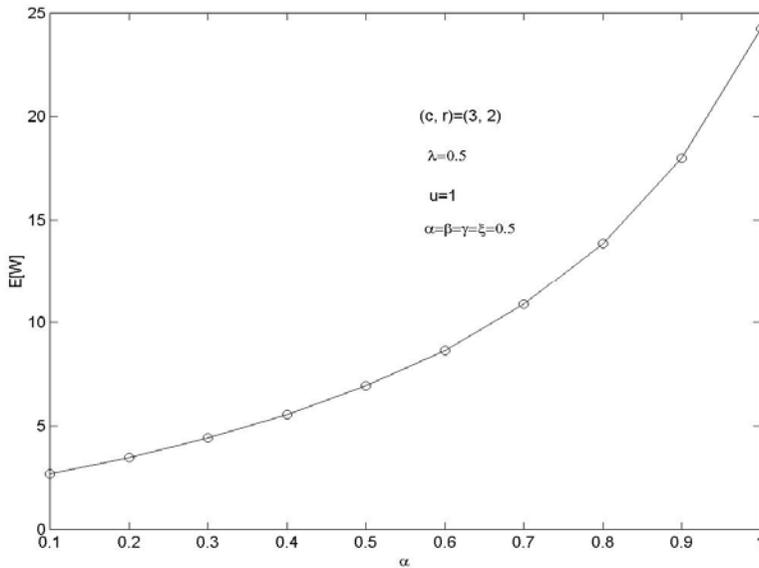


圖 3 維修員假期模式之維修員平均休假率對供應系統績效影響

表 1 維修員及機台組合對供應系統績效影響

c	r	ρ	O	L	F	V
2	2	0.7143	0.7000	5.3041	0.7000	1.0000
3	2	0.5753	0.8692	3.4628	0.8692	1.0000
3	3	0.4449	1.1240	1.7322	1.1240	1.5000
4	2	0.5256	0.9514	3.1638	0.9514	1.0000
4	3	0.3820	1.3089	1.5288	1.3089	1.5000
4	4	0.3205	1.5602	1.0607	1.5602	2.0000
5	2	0.5079	0.9845	3.1007	0.9845	1.0000
5	3	0.3536	1.4139	1.4710	1.4139	1.5000
5	4	0.2849	1.7549	0.9975	1.7549	2.0000
5	5	0.2495	2.0042	0.7995	2.0042	2.5000
6	2	0.5022	0.9957	3.0877	0.9957	1.0000
6	3	0.3412	1.4656	1.4537	1.4656	1.5000
6	4	0.2665	1.8760	0.9742	1.8760	2.0000
6	5	0.2267	2.2057	0.7720	2.2057	2.5000
6	6	0.2038	2.4537	0.6724	2.4537	3

Note: When $r = 1$, L approaches infinite for all settings of c

表 2 維修員及機台組合對供應系統成本影響

c	r	ρ	E[CC]	E[WC]	E[FC]	E[VC]	E[TC]
2	2	0.7143	54.0000	212.1640	14.0000	20.0000	260.1640
3	2	0.5753	57.3840	138.5120	17.3840	20.0000	193.2800
3	3	0.4449	82.4800	69.2880	22.4800	30.0000	144.2480
4	2	0.5256	59.0280	126.5520	19.0280	20.0000	184.6080
4	3	0.3820	86.1780	61.1520	26.1780	30.0000	143.5080
4	4	0.3205	111.2040	42.4280	31.2040	40.0000	144.8360
5	2	0.5079	59.6900	124.0280	19.6900	20.0000	183.4080
5	3	0.3536	88.2780	58.8400	28.2780	30.0000	145.3960
5	4	0.2849	115.0980	39.9000	35.0980	40.0000	150.0960
5	5	0.2495	140.0840	31.9800	40.0840	50.0000	162.1480
6	2	0.5022	59.9140	123.5080	19.9140	20.0000	183.3360
6	3	0.3412	89.3120	58.1480	29.3120	30.0000	146.7720
6	4	0.2665	117.5200	38.9680	37.5200	40.0000	154.0080
6	5	0.2267	144.1140	30.8800	44.1140	50.0000	169.1080
6	6	0.2038	169.0740	26.8960	49.0740	60.0000	185.0440

6. 結論與未來研究方向

本研究主要貢獻為提出一些包含維修員因素之失效分析模式，可作為決策者探討不同失效模式之量化分析，所介紹數學模式可快速分析供應系統績效，甚至是後續作業參數擬定及產能設計最佳化之用，本研究相對於其它已有的文獻創新的論點如下：我們整理、比較現有先佔優先權式 (preemptive) 假期模式文獻，除推導同步假期模式以補文獻不足外亦指出在某些情況下現有文獻會導致相同結果。另外，我們亦提出一些新的定理，方便計算及模式正確性驗證。

經由數值案例解析我們發現不管當機效應如何明顯，在各種不同系統負荷量考量下，同步假期模式績效永遠比非同步無維修員假期模式差，另一發現是隨當機效應逐漸明顯，可能存在臨界值，當系統負荷量超出該臨界值，使用非同步維修員假期模式績效有可能低於同步假期模式。

本研究所提供管理意涵為：當機台之間為獨立且無維修員假期因素，使用同步失效分析可能高估系統績效且隨當機效應愈明顯時高估愈顯著 (參照圖 2 a~f)。當機台之間為獨立且考慮維修員假期因素，使用同步失效分析可能低估系統績效。從數值案例分析可知不同模式對於期望系統等待時間可能有很大差異，使用者在分析現有系統時應慎重，避免不當建模及分析所造成之錯誤決策。作業管理者在時代趨勢下考慮維修員假期之人性化因素同時應善加分析其對系統績效可能帶來之負面效應，擬定適當休假作業，使企業營運績效維繫同時亦能兼顧員工權益，經由所提模式亦可提供機器、人員、顧客等待三方整體考量之最佳產能設計。

雖然本研究著重在學術發展而非實例應用，或許有人會質疑同步失效模式和非同步失效模式是因應機台不同的特性來分別使用，因此質疑績效比較的意義。實務上一般從業人員若不是以較嚴謹之數學建模作分析，而是使用模擬預測系統績效，假設這些模擬軟體無法提供不同模式的假期模式供選擇，決策者可能因忽略不同失效模式對系統績效影響的程度造成決策錯誤，本研究第 5 節數值案例有助了解此一立論。

在後續研究方面可使用所提維修員假期模式之通用性於其它問題探討，例如於存貨製造 (make-to-stock) 或多階供應鏈 (multi-echelon supply chain) 系統在期望時間限制下尋求最佳化系統參數之設計，使得包括維修、庫存、製造等期望總成本最小；進一步的數理解析或更詳盡的實證量化分析以佐證本文的發現亦值得進一步探究。

附錄 A：馬可夫可調適卜瓦松過程

我們以底下圖 A.1 之二狀態馬可夫過程作說明。 σ_i 是狀態轉移速率，當狀態為 0 時，卜瓦松到達率為 λ_0 ，當狀態為 1 時，卜瓦松到達率為 λ_1 ，此處說明了可調適一詞意義。

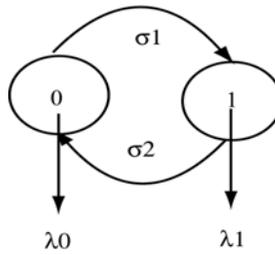


圖 A.1 二狀態馬可夫可調適卜瓦松過程

附錄 B：數學與模擬的比較

表 B.1 同步假期模式數學與模擬的比較

	$E[W]$		密合度%
	數學	模擬*	
$\lambda=0.5$	3.4032	3.4089	-0.17%
$\lambda=1$	5.6998	5.7422	-0.74%
$\lambda=1.2$	8.9786	8.9514	0.30%

註: 1. $(c, r)=(3, 2)$; 2. Simulation with ARENA for 10 replications (@100,000 time units)

表 B.2 非同步假期模式 (Neuts 模式) 數學與模擬的比較 (有維修員)

	$E[W]$		密合度%
	數學	模擬	
$\lambda=0.5$	2.0451	2.0462	-0.05%
$\lambda=1$	4.2917	4.3419	-1.16%
$\lambda=1.2$	8.1868	8.1811	0.07%

註: 1. $(c, r)=(3, 2)$; 2. Simulation with ARENA for 10 replications (@100,000 time units)

表 B.3 非同步假期模式 (Wang & Su 模式) 數學與模擬的比較 (維修員假期因素)

	$E[W]$		密合度%
	數學	模擬	
$\lambda=0.5$	6.9253	6.9247	0.01%
$\lambda=0.6$	9.5585	9.4435	1.22%
$\lambda=0.7$	15.2939	15.1320	1.07%

註: 1. $(c, r)=(3, 2)$; 2. Simulation with ARENA for 10 replications (@100,000 time units)

附錄 C：定理 4 證明

因為 G 為 CTMC，所以 $\varphi G = 0$ ，由(5)

$$\begin{aligned}
 \phi_0 \gamma \beta &= \phi_1 \alpha, \\
 \phi_0 \gamma \beta + \phi_2 (2\alpha) &= \phi_1 (\alpha + (r-1)\beta), \\
 \phi_1 (r-1)\beta + \phi_3 (3\alpha) &= \phi_2 (2\alpha + (r-2)\beta), \\
 &\vdots \\
 \phi_{r-3} (3\beta) + \phi_{r-1} (r-1)\alpha &= \phi_{r-1} ((r-2)\alpha + 2\beta), \\
 \phi_{r-2} (2\beta) + \phi_r r\alpha &= \phi_{r-1} ((r-1)\alpha + \beta), \\
 \phi_{r-1} \beta &= \phi_r r\alpha.
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

由(C.1)整理如下

$$\alpha \sum_{i=1}^r i \phi_i = \beta \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \phi_i,$$

上式可表示成 $\alpha A = \beta V$ ，因為 $A + V = r$ 經整理後可得證。

參考文獻

- Haque, L. and Armstrong, M. J., "A Survey of the Machine Interference Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 179, 2007, pp. 469-482.
- Kao, E. P. C. and Narayanan, K. S., "Analyses of an M/M/N Queue with Servers' Vacations," *European Journal of Operational Research*, Vol. 54, No. 2, 1991, pp. 256-266.
- Kelton, W. D., Sadowski, R. F., and Sturrock, D. T., *Simulation with ARENA*, McGraw Hill, Singapore, 2003.
- Levy, Y. and Yechiali, U., "An M/M/s ueue with Server's Vacations," *INFOR*, Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 153-163.
- Medhi, J., *Stochastic Models in Queuing Theory*, Academic Press, New York, 1991.
- Neuts, M. F. and Lucantoni, D. M., "A Markovian Queue with N Servers Subject to Breakdowns and Repairs," *Management Science*, Vol. 25, No. 9, 1979, pp. 849-861.
- Neuts, M. F., *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, Reprinted Edition, Dover Publications, Inc., New York, 1994.
- Patchong, A., Lemoine, T., and Kern, G., "Improving Car Body Production at PSA Peugeot Citroën,"

- Interfaces*, Vol. 33, No. 1, 2003, pp. 36-49.
- Vinod, B., "Exponential Queue with Server Vacations," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 37, No. 10, 1986, pp. 1007-1014.
- Wang, F. F. and Su, C. T., "Supply System Design under Uncertainty Constraint by Using Markov Modulated Poisson Process Modeling," *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, Vol. 23, No. 1, 2006, pp. 20-33.
- Yang, T., Lee, R. S., Chen, M. C., and Chen, P., "Queueing Network Model for a Single-Operator Machine Interference Problem with External Operations," *European Journal of Operational Research*, Vol. 167, No. 1, 2005, pp. 163-178.
- Zhang, Z. G. and Tian, N., "An Analysis of Queueing Systems with Multi-task Servers," *European Journal of Operational Research*, Vol. 156, 2004, pp. 375-389.