管　　理　　與　　系　　統
第十二卷 第三期　民國九十四年七月
89 - 107頁

Journal of Management & Systems
Vol. 12, No. 3, July 2005
pp. 89-107

考慮不良品及多次訂購之外購回收性商品存貨模式

Multiple Replenishment Inventory Model for Reusable Product with Imperfect Quality

黃惠民[1]　Hui-Ming Wee
中原大學工業工程系

游兆鵬[2,3]　Jonas Chao-Pen Yu
國立中央大學工業管理研究所
德明技術學院物流管理系

羅乾鐘[1,4]　Chian-Chong Lo
中原大學工業工程系
國立聯合大學經營管理系

林正凱[1]　Cheng-Kai Lin
中原大學工業工程系

[1]Department of Industrial Engineering, Chung Yuan Christian University,
[2]Institute of Industrial Management, National Central University,
[3]Department of Logistics Management, Takming College,
[4]Department of Business Management, National United University

(Received December 9, 2004; Final Version May 30, 2005)

摘要：在自由開放的競爭市場下，有效的降低企業成本及增加產品的價值是提高競爭力的不二法門。近年來隨著環保意識的抬頭，環境成本佔企業總成本的比重日益增加。環保，就是爲了能夠達到物盡其用、不浪費資源，並減少廢料對於環境所造成的負擔。因此，如何利用資源回收與再生來降低相關的物料成本，是企業在提高市場競爭力上另一項考量的重點。本研究主要目的是以可回收性商品之存貨系統爲基本架構，考慮單一產品，針對外購商品含有不良品做探討。本研究建立數學模式與利用軟體程式作爲求解之工具，並透過數值範例說明與敏感度分析來瞭解影響系統之關鍵因素。試圖尋求出最適當之訂購次數與交貨量，以達到整體總成本最小化。

關鍵詞：不良品、可回收性商品、存貨

Abstract：In this open and competitive market, effective cost reduction and raising product value is the best way to increase competitiveness. In recent years, as the environmental protection cost has risen, the reduction in environmental cost in enterprise is becoming more and more important. One of the ways to save material cost and protect environment is to recycle resources. This study considers the reusable product that has imperfect quality. A mathematical model and a program to derive the minimum cost is developed. Numerical examples and sensitivity analysis are carried out to analyze the key factors in the system.

Keywords **:** Imperfect quality, Reusable product, Inventory

1. 前言

1.1 研究背景與動機

工商業環境競爭激烈，企業降低成本以增加在市場上的競爭力成爲必然的趨勢。然而科技越是進步，地球資源越是快速地被消耗，同時，使用後之產品廢棄物的暴增，不僅造成資源的浪費，也產生大量的垃圾，容易造成環境污染，這亦是今日全球所面臨到的嚴重問題。隨著近年來環保意識的抬頭，環境成本佔企業總成本的比重日益增加，因此，如何利用資源回收與再生來降低相關的物料成本，是企業在提高市場競爭力上另一項考量的重點。

企業利用逆向物流通路，回收可利用資源的種類大約可分爲四種包括：直接再使用、修理、再生與再製造。直接再使用係指僅需簡單清理與最小程度的維護，即可再度使用，譬如飲料瓶、容器、棧板等；修理係指將失常的產品由顧客端回收進行必要的維修；再生則係指回收商品經由分解再生處理，產出新的原物料供再度投入生產系統進行相關製造活動；最後再製造則係指將回收商品經由拆解、翻修與置換零組件等使其恢復新品狀態。不論那一種回收商品型態，包含回收商品的存貨問題相當有趣，回收商品存貨政策與新品存貨政策兩者密切攸關，兩種政策必須整合以達整體最佳化，此與傳統存貨問題大異其趣。限於篇幅，本研究選擇直接再使用回收商品存貨系統爲研究範圍。

傳統的經濟訂購量 (Economic Order Quantity, EOQ) 是由 Harris (1913) 所推導出解決存貨問題的存貨控制模式，主要考量零售商的訂購成本、持有成本等而求得總成本最低的最佳訂購數量。然而此模型的假設條件與限制太多，使其實用性大爲降低，因此許多學者相繼放寬限制條件與假設，使其更接近真實狀況的存貨模式。在傳統存貨控制模式當中假設商品都沒有不良品的產生，但實際狀況則是無論製程如何改善，都難免會有不良品的產生，故本研究將以可回收再生產的存貨系統中含有不良品的假設，去探討不良品對整體存貨模式的影響。

另外，本研究模式之範例對象爲飲料製造商之空瓶供應者。使用過的空瓶由顧客端回收後，經過清洗、消毒等流程後，與外購所得之空瓶一同賣給飲料製造商。另一範例對象則爲軍事導向。彈殼在射擊練習後回收，軍火製造者將回收之彈殼再製爲子彈，協同外購之子彈供應給部隊使用。

1.2 研究目的

本研究的主要目的在於將 Koh *et al.* (2002) 所提出的可回收性商品之存貨模式加入外購商品中考慮不良品之條件，並探討此因素對整體存貨系統之影響。此模式系統，如圖 1 表示：系統模式由下列兩種存貨系統組成：

(1) 可回收性之存貨系統：自顧客端所回收物所產生之存貨。

(2) 可供使用之存貨系統：包含回收再生修復後的產品與外購產品之存貨。

在模式中供應商爲滿足顧客需求，有三種決策可以選擇：1)外購新產品；2)回收再生產後的新產品；3)上述兩者並行。以上決策必須考量到訂購次數、訂購量與何時該訂購等等相關議題。因此本究目的與範圍如下所示：在可回收性商品的存貨模式中，加入不良品的條件，推導出一個新的存貨模式，以期符合現實狀況。而範圍是針對外購產品中有不良品的情況且其不良率爲隨機分配，在需求爲固定已知常數、單一產品、不允許缺貨與固定的規劃期間內，發展研究出一個總成本最低的存貨模式。至於其

他的存貨模式或其他影響成本績效的因素不在本研究範圍內。

2. 文獻探討

2.1 含不良品之存貨系統

傳統的EOQ存貨控制模式在今日仍舊存在，但是這些傳統的模型假設所有生產或購買的商品皆爲良品，這個與現實不符合的假設，引導了許多學者進一步去研究含有不良品情況存在的存貨模式，所以有了許多不同研究方向的文獻如下

Salameh and Jaber (2000) 針對經濟EOQ和EPQ模式之擴充，假設在不完美品質的情況下存貨的接收問題，並考慮產生的不良品需經過100%的檢驗後，不良品部份以較低的價格出售，對推導出模式與傳統成本作敏感性分析，期望系統的利潤最大化。Schwaller (1988) 研究中加入了考慮不良率是已知的假設情況下，固定以及變動的檢查成本的EOQ模式。Lee and Moinzadeh (1987) 探討了關於含有不良品的定期訂購之存貨模式。Porteus (1986) 探討不良品對EOQ模式的影響，並且提出在製程改良與品質方面要同時考慮「降低製程失去控制的機率」與「降低整備成本兩點」。Chakravarty and Shtub (1987)、Urban (1992)、Anily (1995) 等人也都提出了關於商品進貨時檢驗的步驟，並發展出數學模式也求出最佳經濟訂購量與最大利潤。

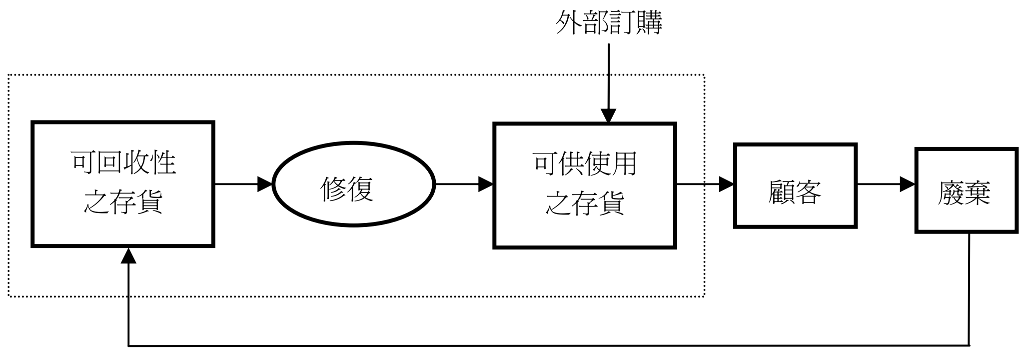

圖 1 可回收性商品存貨架構圖

資料來源：Koh *et al.* (2002)

2.2 可回收性商品之存貨系統

資源回收的議題在環保意識高漲的年代逐漸被重視著，如何控制可回收產品與修復後產品之間的存貨問題便油然而生。Richter (1996) 首先探討一個EOQ模式中顧客的需求是由本身生產的產品與廢棄物的修復共同來滿足，此模式在固定的回收週期中，以最小成本爲目的去求出最佳的修復次數與生產次數。其後，Richter (1996) 又擴充之前的模式，將固定回收週期擴充爲變動的回收週期，以最小成本爲目的去求出最佳的修理次數、生產次數與最佳的回收週期長度。Richter and Dobos (1999) 利用整數規劃來分析EOQ模式中含有廢棄物修復與本身生產的問題。Kiesmuller (2003) 研究單一物品的回收存貨系統，可提供顧客需求的產品來自兩部份：一是回收再製部份，另一部分是自己本身生產出來的產品，同時在考慮缺貨與不缺貨與動態需求及回收率的情況下，求得系統最佳的總成本。Kleber *et al.* (2002) 應用Pontryagin’s Maximum Principle去探討多物品之回收存貨系統之最佳生產與再製之策略。Koh *et al.* (2002) 主要探討一個EOQ與EPQ聯合模式，在固定的需求、與回收率的情況下，研究可回收性產品與外購新產品之間的最佳訂購數量、訂購次數與回收品修復次數。Wee and Jong (1988) 、Wee and Chen (2002) 發展外購商品多批量及多階供應鏈之存貨模式。本研究探討回收性商品 (Reusable items) 的研究整理如表1。

由表1 顯示並未有作者於回收商品模式中同時考慮產品不良率問題，而現實存貨問題中，生產或訂購過程產生不良品爲一客觀的事實，因而結合品質不良率的存貨問題，吸引眾多學者投注心力進行相關研究，因此本研究與Koh *et al.* (2002) 的文章在方法上及問題上有下列的差異：

(1) 在問題形式上如表 1 所示，延伸 Koh *et al.* (2002) 的研究，將外購產品包含不良品的實務納入模式中，但本研究僅討論單次修復次數模式，而 Koh *et al.* (2002) 的研究則包含多次修復次數模式。

表1 相關文獻探討回收性商品之主題

		Richter (1996)	Koh *et al*. (2002)	Kiesmuller (2003)	本研究
顧客需求	固定	V	V		V
	變動			V	
回收率	固定	V	V		V
	變動			V	
缺貨	有			V	
	無	V	V	V	V
產品項目	單一產品	V	V	V	V
	多產品				
模式架構	回收與外購		V		V
	回收與自製	V		V	
回收週期	固定	V	V	V	V
	變動	V			
修復次數	1次		V	V	V
	多次	V	V		
外購含不良品	有				V
	無	V	V	V	

(2) 在方法上，Koh *et al.* (2002) 首先推導出回收商品最高存貨水準 R 之分析解，再利用數值搜尋方法決定最佳回收商品修復次術與外購商品的訂購次數。而本研究則先證明 $ETCU$ (n, R) 在單次修復模式中爲凸函數，再以此條件推導出回收商品最高存貨水準與外購商品的訂購次數的最佳連續數值分析解 R^* 與 n^*，再以鄰域搜尋法決定 n 之最佳整數解。

3. 數學模式推導與說明

本研究主要以 Koh *et al.* (2002) 所推導的回收性商品之存貨系統模式爲主，進而研究當外購商品含有不良品時，且其不良率服從某種機率分配的情況下，來探討不良品對於回收性商品存貨系統之影響。模式中使用數理方法與 Maple 8 套裝軟體輔助模式的推導，並利用 Visual Fortran 6.5 及其所內含之 IMSL 數值程式庫搜尋模式之最佳解，以求得最佳的經濟訂購量與最低成本，同時將所推導之模式代入數值範例加以說明，並對重要的參數進行敏感度分析。

3.1 模式基本假設條件之說明

(1) 需求爲已知的固定常數。
(2) 討論單一商品在固定期間的存貨狀況。
(3) 外購商品中含有不良品，且不良率服從均勻分配。
(4) 每批商品皆須百分之百檢驗之程序，即每個零件皆需經過檢驗。
(5) 外購商品的訂購週期皆相同。
(6) 不良品直接捨棄，不可再利用。
(7) 每件回收的產品都可以完全恢復成新的。
(8) 回收再製後的商品百分之百爲良品。
(9) 一個週期內回收品再生一次。
(10) 商品不具有損耗性與數量折扣。
(11) 產品在進貨後可立即供給需求。
(12) 不允許缺貨之發生。
(13) 從顧客回收產品之回收率爲已知的固定常數。
(14) 工廠修復產品能力爲已知的固定常數。
(15) 採購新產品與修復舊產品的前置時間爲固定且已知。
(16) 修復回收產品比購買新產品經濟划算。
(17) 修復能力大於回收率($p > r$)。
(18) 需求率大於回收率($d > r$)。

3.2 符號定義

r：舊品回收率
R：可回收產品之最高存貨水準
p：將回收之商品修復成新品之修復能力
d：顧客需求率
Q：外購新品之訂購數量
n：外購新品之訂購次數
δ：Q中含有不良品的機率
$f(\delta)$：δ的機率密度函數
x：檢驗外購新品的速率
t：負責修復回收品之機台idle時間
t_1：外購新品的檢驗時間
T：系統運作之週期

C_s：回收再製流程之設置成本

C_{x1}：外購新品的固定檢驗成本

C_{x2}：外購新品的變動單位檢驗成本

C_o：外購新品之訂購成本

C_{h1}：回收再製產品之單位儲存成本

C_{h2}：可賣出產品之單位儲存成本

$TC\ (n,R)$：單一週期之總成本

$TCU\ (n,R)$：單位時間之總成本

$ETCU\ (n,R)$：單位時間之期望總成本

3.3 問題描述

本模式共分為兩大部分(如圖 2 所示)：一是舊品回收部分，一是外購新品部分。

在舊品回收部分，在0～t時間內，系統以回收率r持續回收舊品，此時修復回收商品之機台是閒置的狀態；在t～T時間內開始將回收之舊品修復成新品，在t～T時間內依舊以回收率r持續回收舊品，在到達T時間點時恰好將所有回收之舊品修復完畢，機台停止運作，繼續回收舊品，待t時間後才又開始加工修復舊品。

在外購新品部分，由於系統在到達t時間後才會開始修復舊品產生新品，因此在到達t時間前是藉由外購新品來滿足顧客的需求，在t時間後便停止訂購。由於外購商品中含有不良品，因此當外購商品進貨後施行檢驗之程序，經過一段時間t_1後所有產品檢驗完畢，同時將不良品挑出，使得存貨水準在t_1時瞬間減少，所減少的存貨量即為δQ。另外本研究將修復力(p)與顧客需求(d)分為$p>d$、$p<d$、$p=d$三部分分別討論。

(1) 在$p>d$部分，在t～T期間因為舊品修復力大於顧客需求，所以藉由舊品修復後的新品開始堆積，產生存貨，而此存貨可供應0～t間顧客的需求。因此外購之新品在到達t時間點時會完全用完。

(2) 在$p<d$部分，在t～T期間因為顧客需求大於舊品修復力，不足的地方便是由0～t間外購商品的部分來補足，因此外購之新品在到達t時間點時不會完全用完，所以在外購新品的數量會比$p>d$時來的多。

(3) 在$p=d$部分，在t～T期間因為顧客需求等於舊品修復力，舊品修復的新品量剛好可以滿足顧客需求，因此外購之新品數量要滿足0～t間的顧客需求，而且外購之新品在到達t時間點時會完全用完。

3.4 存貨模式之推導

Case(1)：$p＞d$

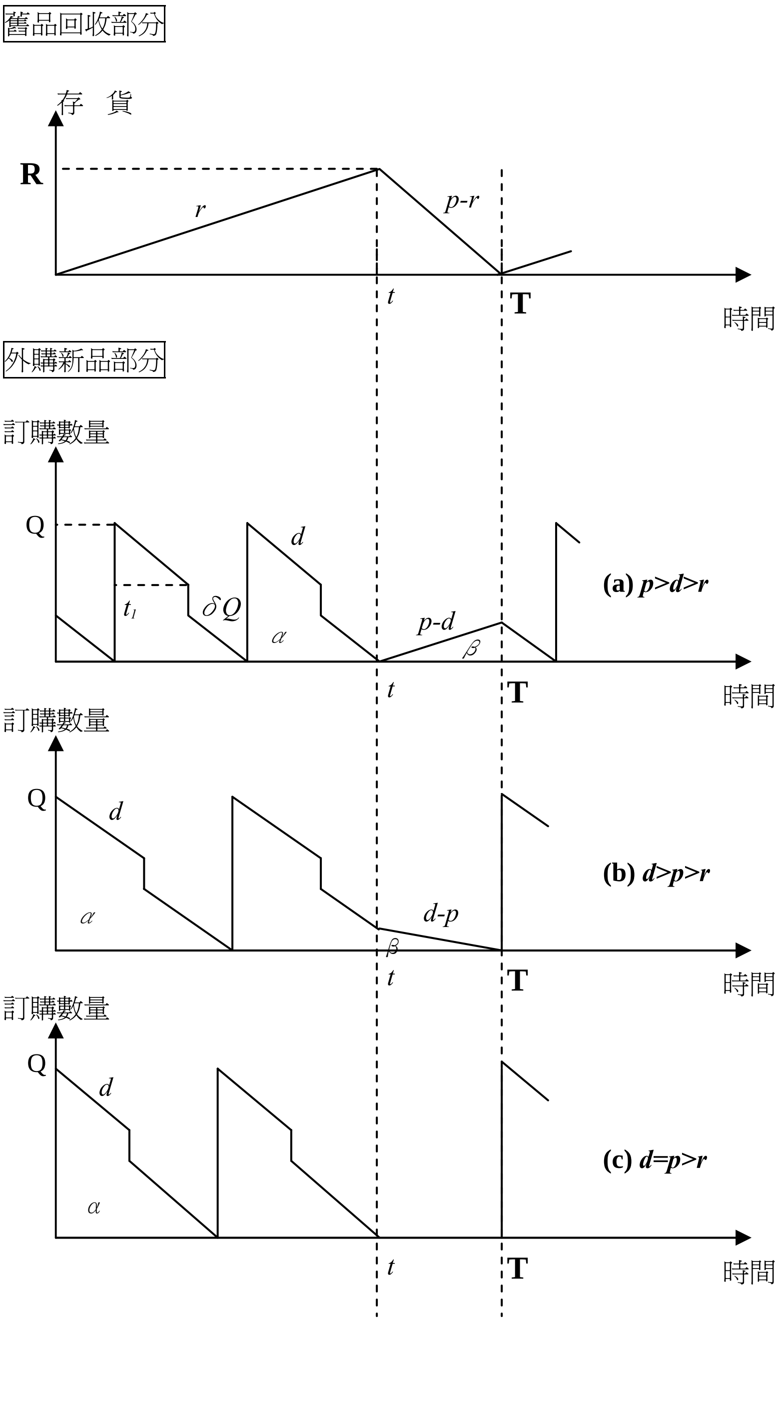

圖2 考慮不良品之回收性商品存貨系統圖

(以訂購次數爲2次爲例)

回收再製流程相關成本：

$$C_s + \frac{C_{h1}}{2}RT \tag{1}$$

外購商品相關成本：

(a) 檢驗成本

$$n(C_{x1} + C_{x2}Q) \tag{2}$$

(b) 訂購成本

$$nC_o \tag{3}$$

(c) 持有成本(n 個 α 多邊形面積)：每一 α 多邊形面積爲下列圖 3 中的斜線面積。

圖 3 中，$Q = dy/(1-\delta)$、$t_1 = dy/(x(1-\delta))$、$x_2 = (d^2y)/(x(1-\delta))$及 $x_3 = dy - (d^2y)/(x(1-\delta))$，而當 $p > d > r$ 時，由圖 2 知 $y = \left[t-(p-d)(T-t)/d\right]/n$，故 n 個 α 多邊形面積下，持有成本爲

$$\begin{aligned} & nC_{h2}\left[\frac{t_1x_2}{2} + t_1\delta Q + \frac{(t_1+y)x_3}{2}\right] \\ &= nC_{h2}\left[\frac{d^3y^2}{2x^2(1-\delta)^2} + \frac{\delta d^2y^2}{x(1-\delta)} + \frac{d^2y^2}{2x(1-\delta)} + \frac{dy^2}{2} - \frac{d^3y^2}{2x^2(1-\delta)^2} - \frac{d^2y^2}{2x(1-\delta)}\right] \\ &= nC_{h2}y^2\left[\frac{d}{2} + \frac{d^2\delta}{x(1-\delta)}\right] \\ &= \frac{dC_{h2}}{2n}\left[T - \frac{p}{d}(T-t)\right]^2\left[1 + \frac{2d\delta}{x(1-\delta)}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

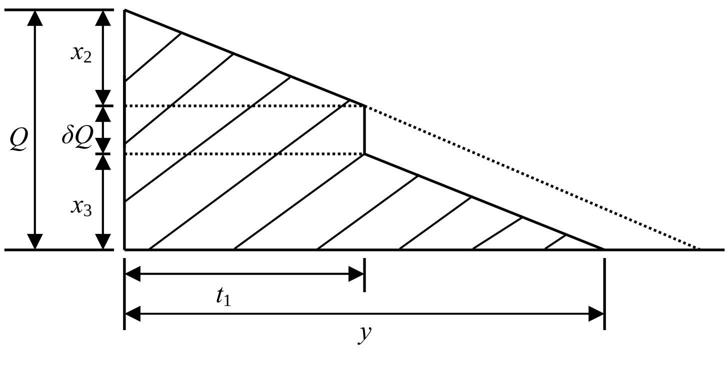

圖3　α多邊形面積

(d) 持有成本(一個β三角形面積)：圖2中當$p > d > r$時，β三角形的底爲 $p(T-t)/d$、而β的高爲 $(p-d)\ (T-t)$，所以此部份持有成本爲

$$C_{h2}\frac{p(p-d)}{2d}(T-t)^2 \tag{5}$$

由圖2可得知：

$$T = \frac{pR}{r(p-r)} \tag{6}$$

$$t = \frac{R}{r} \tag{7}$$

而每個週期總需求量爲dT、回收量爲$p(T-t)$及訂購批次爲n。考慮外購商品的不良率爲δ後，每批次訂購量爲

$$Q = \frac{d}{n(1-\delta)}\left\{T - \frac{p}{d}(T-t)\right\} \tag{8}$$

結合(1)～(8)式，可得到單一週期之總成本方程式爲：

$$\begin{aligned} TC(n,R) &= (C_s + nC_o) + \frac{C_{h1}R^2}{2r}\left(\frac{p}{p-r}\right) + \frac{C_{h2}R^2}{2dn}\left\{\frac{p(d-r)}{r(p-r)}\right\}^2\left\{1+\frac{2d\delta}{x(1-\delta)}\right\} \\ &\quad + \frac{C_{h2}R^2}{2d}\left\{\frac{p(p-d)}{(p-r)^2}\right\} + \left\{nC_{x1} + \frac{C_{x2}pR(d-r)}{r(1-\delta)(p-r)}\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

將(9)式除以週期T，可得到單位時間的總成本方程式：

$$\begin{aligned} TCU(n,R) &= (C_s + nC_o)\left\{\frac{r(p-r)}{pR}\right\} + \frac{R}{2}C_{h1} + \frac{pR(d-r)^2}{2dnr(p-r)}\left\{1+\frac{2d\delta}{x(1-\delta)}\right\}C_{h2} \\ &\quad + \frac{rR(p-d)}{2d(p-r)}C_{h2} + \frac{nr(p-r)}{pR}C_{x1} + \frac{(d-r)}{(1-\delta)}C_{x2} \end{aligned} \tag{10}$$

因爲不良率δ爲已知機率密度函數$f(\delta)$之隨機變數，期望值E[δ]、E[1/1-δ]分別爲：

$$E[\delta] = \int_a^b \delta * f(\delta)d\delta \tag{11}$$

$$E\left[\frac{1}{1-\delta}\right] = \int_a^b \left(\frac{1}{1-\delta}\right) * f(\delta)d\delta \tag{12}$$

將(11)、(12)式代入(10)式可得單位時間之期望總成本：

$$ETCU\,(n,R)=(C_s+nC_o+nC_{x1})\left\{\frac{r(p-r)}{pR}\right\}+\frac{R}{2}C_{h1}+\frac{rR(p-d)}{2d(p-r)}C_{h2}$$

$$+\frac{pR(d-r)^2}{2dnr(p-r)}\left\{1+\frac{2d}{x}E[\frac{1}{1-\delta}]E[\delta]\right\}C_{h2}+E[\frac{1}{1-\delta}](d-r)C_{x2} \tag{13}$$

爲證明(13)式之模式有極小值，因此對單位時間的期望總成本*ETCU* (*n*,*R*)中的*n*與*R*做第二次偏微分。因爲對雙函數*n*與*R*微分，我們將利用Hessian矩陣 (Rardin, 1998) 求其結果。

因此可得到Hessian矩陣如下：

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{(d-r)^2RA_1C_{h2}}{dn^3A_2} & -(C_o+C_{x1})\left\{\dfrac{A_2}{R^2}\right\}-\dfrac{(d-r)^2A_1C_{h2}}{2dn^2A_2}\\ -(C_o+C_{x1})\left\{\dfrac{A_2}{R^2}\right\}-\dfrac{(d-r)^2A_1C_{h2}}{2dn^2A_2} & 2(C_s+nC_o+nC_{x1})\left\{\dfrac{A_2}{R^3}\right\}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中(14)式中的 $A_1=1+\dfrac{2d}{x}E\left[\dfrac{1}{1-\delta}\right]E[\delta]$ 及 $A_2=\dfrac{r(p-r)}{p}$

如果 $\begin{bmatrix}n & R\end{bmatrix}\cdot[H]\cdot\begin{bmatrix}n\\R\end{bmatrix}>0$ 代表函數*ETCU* (*n*, *R*)爲凸函數　(15)

根據(14)式與(15)式我們可以獲得如下之結果：

$$\begin{bmatrix}n & R\end{bmatrix}\cdot[H]\cdot\begin{bmatrix}n\\R\end{bmatrix}=\frac{2r(p-r)C_s}{pR}>0 \tag{16}$$

由(16)式得知在Case(1)之*p*＞*d*＞*r*的條件下*ETCU* (*n*,*R*)爲一凸函數。因此個別對(13)式之*R*與*n*做一次偏微分並令爲0，即可求得最佳可回收產品之存貨水準R^*與訂購次數n^*。

因此可得到R^*與 n^*分別爲：

$$R^*=\sqrt{\frac{2d(C_s+nC_o+nC_{x1})A_2}{A_3+\dfrac{(d-r)^2A_1C_{h2}}{nA_2}}} \tag{17}$$

其中(17)式中的 $A_3=dC_{h1}+\dfrac{r(p-d)C_{h2}}{(p-r)}$

$$n^* = \frac{R(d-r)}{A_2}\sqrt{\frac{A_1 C_{h2}}{2d(C_o + C_{x1})}} \tag{18}$$

將(17)、(18)兩式聯立，可求出n^*：

$$n^* = \sqrt{\frac{(d-r)^2 A_1 C_{h2} C_s}{A_2 A_3 (C_o + C_{x1})}} \tag{19}$$

由於n必須為正整數(訂購次數)，因此將n取高斯符號$[n]$，並將$[n]$、$[n]\pm1$、 $[n]$ ±2代入(17)式求出個別的R^*，再分別代入(13)式便可求出單位時間的最佳期望總成本$ETCU(n^*,R^*)$。

另外，為了避免缺貨，所以在外購商品部份，在t_1時間內的良品數量必須大於或等於需求量，限制方程式為：

$$(1-\delta)Q \geq dt_1 = \frac{dQ}{x} \longrightarrow \delta \leq 1 - \frac{d}{x} \tag{20}$$

Case(2)：$d \geq p$

回收再製流程相關成本：

$$C_s + \frac{C_{h1}}{2}RT \tag{21}$$

外購商品相關成本：

(a)檢驗成本

$$n(C_{x1} + C_{x2}Q) \tag{22}$$

(b)訂購成本

$$nC_o \tag{23}$$

(c)持有成本(n個α多邊形面積 – 1個γ三角形面積)：α多邊形面積(斜線面積)與最後第n個α多邊形須減掉之γ三角形面積 (虛斜線面積) 如圖4所示。

圖4中 $y = [t + (d-p)(T-t)/d]/n = [t - (p-d)(T-t)/d]/n$ ，可知Case(2)與Case(1)有相同的y，故Case(2)的α多邊形面積與Case(1)亦相同，而由圖4，γ三角形的底為$(d-p)(T-t)/d$、而γ的高為$(d-p)(T-t)$，所以n個α多邊形減掉1個γ三角形面積下，持有成本為

$$\frac{dC_{h2}}{2n}\left[T - \frac{p}{d}(T-t)\right]^2\left[1 + \frac{2d\delta}{x(1-\delta)}\right] - \frac{(d-p)^2(T-t)^2 C_{h2}}{2d} \tag{24}$$

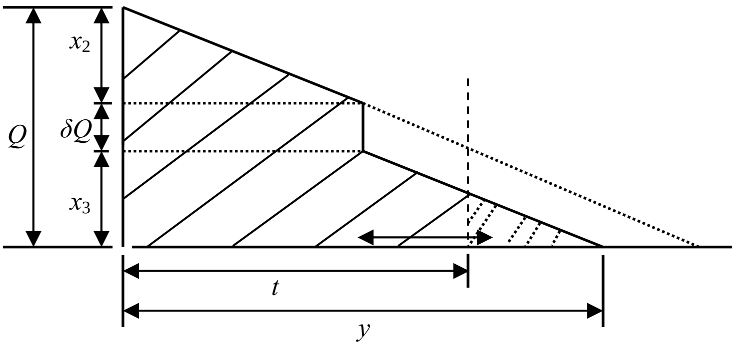

圖4　*α*多邊形與*γ*三角形的面積

(d)持有成本(β三角形面積)：圖2中當$d > p > r$時，β三角形的底為 $(T-t)$、而β的高為 $(d-p)\,(T-t)$，所以此部份持有成本為

$$C_{h2}\frac{(d-p)}{2}(T-t)^2 \tag{25}$$

因此我們可得到單位時間的總成本方程式：

$$\begin{aligned}TCU(n,R) &= (C_s + nC_o)\left\{\frac{r(p-r)}{pR}\right\} + \frac{R}{2}C_{h1} + \frac{pR(d-r)^2}{2dnr(p-r)}\left\{1+\frac{2d\delta}{x(1-\delta)}\right\}C_{h2} \\ &\quad - \frac{rR(d-p)^2}{2dp(p-r)}C_{h2} + \frac{rR(d-p)}{2p(p-r)}C_{h2} + \frac{nr(p-r)}{pR}C_{x1} + \frac{(d-r)}{(1-\delta)}C_{x2}\end{aligned} \tag{26}$$

再將(11)、(12)式代入(26)式可得單位時間之期望總成本：

$$\begin{aligned}ETCU(n,R) &= (C_s + nC_o + nC_{x1})\left\{\frac{r(p-r)}{pR}\right\} + \frac{R}{2}C_{h1} + \frac{rR(d-p)}{2d(p-r)}C_{h2} \\ &\quad + \frac{pR(d-r)^2}{2dnr(p-r)}\left\{1+\frac{2d}{x}E[\frac{1}{1-\delta}]E[\delta]\right\}C_{h2} + E[\frac{1}{1-\delta}](d-r)C_{x2}\end{aligned} \tag{27}$$

根據(14)之證明，我們同樣可以證明(27)式在Case(2)之$d > p > r$的條件下亦為一凸函數。因此個別對(27)式之R與n做一次偏微分並令為0，即可求得最佳可回收產品之存貨水準R^*與訂購次數n^*。因此可分別得到R^*與n^*為：

$$R^* = \sqrt{\frac{2d(C_s + nC_o + nC_{x1})A_2}{A_4 + \dfrac{(d-r)^2 A_1 C_{h2}}{nA_2}}} \tag{28}$$

其中(28)式中的 $A_4 = dC_{h1} + \dfrac{r(d-p)C_{h2}}{(p-r)}$

$$n^* = \frac{R(d-r)}{A_2}\sqrt{\frac{A_1 C_{h2}}{2d(C_o + C_{x1})}} \tag{29}$$

將(29)、(30)兩式聯立，可求出n^*：

$$n^* = \sqrt{\frac{(d-r)^2 A_1 C_{h2} C_s}{A_2 A_4 (C_o + C_{x1})}} \tag{30}$$

由於n必須爲正整數(訂購次數)，因此將n取高斯符號[n]，並將[n]、[n]±1、 [n] ±2代入(28)式求出個別的R^*，再分別代入(27)式便可求出單位時間的最佳期望總成本$ETCU(n^*,R^*)$。

另外，爲了避免缺貨，所以在外購商品部份，在t_1時間內的良品數量必須大於或等於需求量，限制方程式爲：

$$(1-\delta)Q \geq dt_1 = \frac{dQ}{x} \longrightarrow \delta \leq 1 - \frac{d}{x} \tag{31}$$

3.5 數值範例說明

本節範例使用Salameh and Jaber (2000) 的例題加以擴充修改，將以下已知的參數值代入本研究所推導的存貨模式，並利用Visual Fortran 6.5及其所內含之IMSL 數值程式庫搜尋模式之最佳解，以決定最佳訂購次數及訂購量，進而求出單位時間的最佳期望總成本。範例以$p>d$做討論，所需用到參數說明如下：

顧客需求率d＝50,000 units/year,　回收再製之修復能力p＝80,000 units/year,

舊品回收率r＝10,000 units/year,　檢驗外購新品的速率x＝1 unit/min,

回收再製流程之設置成本C_s＝200 $/setup for recycle process,

外購新品之訂購成本C_o＝100 $/order for new items,

回收再製產品之單位儲存成本C_{h1}＝1 $/recoverable unit/year,

可賣出產品之單位儲存成本C_{h2}＝5 $/serviceable unit/year,

外購新品的檢驗固定成本C_{x1}＝100 $/ order for new items,

外購新品的單位檢驗變動成本C_{x2}＝0.5 $/unit,

此存貨系統每天運作八小時，一年工作365天，我們即可知每年的檢驗速率爲，

x＝1×60×8×365＝175,200 unit/year,

假設不良率δ爲一個隨機變數 (random variable)，服從均勻分配 (uniformly distribution) 且其機率密度函數(p.d.f)爲：

$$f(\delta)=\begin{cases}25, 0\le\delta\le 0.04\\ 0, otherwise\end{cases} \tag{32}$$

另外爲避免缺貨，必須滿足(20)式：

$$\delta\le 1-\frac{d}{x} \longrightarrow \delta\le 1-\frac{50000}{175200} \longrightarrow \delta\le 0.715$$

所以根據(11)與(12)式，可知當不良率假設在0 $\le\delta\le$ 0.04範圍時，

$$E[\delta]=\int_0^{0.04}25\delta d\delta=0.02$$

$$E[\frac{1}{1-\delta}]=25\int_0^{0.04}(\frac{1}{1-\delta})d\delta=1.02055$$

故由(19)式可以得到最佳訂購次數爲

$$n^*=\sqrt{\frac{(50000-10000)^2*1.01*5*200}{8750*71428.57*(100+100)}}=3.6$$

因爲n必須爲正整數(訂購次數)，所以將n＝1、n＝2、n＝3、n＝4、n＝5分別代入(17)式，可求得：R_1＝593、R_2＝992、R_3＝1,358、R_4＝1,700、R_5＝2,020，再分別代入(13)式，可求得：

$ETCU(1, R_1)$＝32,221　　$ETCU(2, R_2)$＝31,000　　$ETCU(3, R_3)$＝30,722

$ETCU(4, R_4)$＝30,702　　$ETCU(5, R_5)$＝30,789

由上可得知最佳週期期望總成本爲30,702，當n^*＝4、R^*＝1700。

由表2可知，當n＝4時，舊品回收之存貨水準爲1,700，外購新品數量爲1,983，回收再生產成本爲1,879元，檢驗成本爲22,469元，訂購成本爲2,058元，持有成本爲4,296元，可使期望總成本30,702元爲最小值。

3.6 敏感度分析

爲了解不同參數對於期望總成本之最佳解的影響程度及變動情況，本節特別針對$p>d$模式中所有的參數作敏感度分析，並對其分析後所顯示之情形加以說明。

現將3.5數值範例中所有參數組合爲一固定的中心集合（Φ），Φ＝{d，p，r，x，C_s，C_o，C_{h1}，C_{h2}，C_{x1}，C_{x2}}，其中心值 (爲下列各表中以粗體字型表示之值) 取{50,000，80,000，10,000，175,200，200，100，1，5，100，0.5}。接著將中心集合內之目標參數作Θ={-30%，-20%，-10%，

表2 R、Q、回收再生產成本、檢驗成本、訂購成本、持有成本、期望總成本隨著n變化的情形($p>d$)

n	R	Q	回收再生產成本	檢驗成本	訂購成本	持有成本	期望總成本
1	593	2,765	3,249	21,887	1,476	5,609	32,221
2	992	2,313	2,261	22,176	1,765	4,798	31,000
3	1,358	2,111	1,968	22,344	1,933	4,477	30,722
4	1,700	1,983	1,879	22,469	2,058	4,296	30,702
5	2,024	1,888	1,877	22,573	2,162	4,177	30,789
6	2,330	1,812	1,916	22,664	2,253	4,092	30,925

0%，+10%，+20%，+30%}的幅度變化，且固定其他的參數，並以程式找出其最佳之期望總成本，並以期望總成本爲基礎，定義由中心集合所求得的最佳期望總成本$ETCU^*$，而改變參數所求得的期望總成本爲$ETCU$，並計算在不同參數之敏感度數值：

$$\frac{ETCU - ETCU^*}{ETCU^*} \times 100\%$$

其相關彙整資料如表3所示其相關參數之變異圖繪製於圖5。

根據表3與圖5可以歸納出所有參數對於$ETCU$的影響及分析如下：

(1) 期望總成本$ETCU$對於各參數的相關性不同可分爲兩種情形：

正相關：d、p、C_s、C_o、C_{h1}、C_{h2}、C_{x1}、C_{x2}

負相關：r、x

表3 敏感度分析之變異表($p>d$)

	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%
d	-30.40%	-20.19%	-10.06%	0%	9.93%	19.84%	29.65%
p	-1.03%	-0.60%	-0.26%	0%	0.21%	0.38%	0.50%
r	5.55%	3.72%	1.84%	0%	-1.89%	-3.81%	-5.71%
x	0.07%	0.04%	0.02%	0%	-0.01%	-0.02%	-0.03%
Cs	-1.22%	-0.79%	-0.36%	0%	0.34%	0.66%	0.99%
Co	-2.07%	-1.37%	-0.68%	0%	0.66%	1.30%	1.90%
$Ch1$	-0.84%	-0.56%	-0.28%	0%	0.28%	0.50%	0.72%
$Ch2$	-4.64%	-2.99%	-1.43%	0%	1.37%	2.69%	3.96%
$Cx1$	-2.07%	-1.37%	-0.68%	0%	0.66%	1.30%	1.90%
$Cx2$	-19.94%	-13.30%	-6.65%	0%	6.65%	13.30%	19.95%

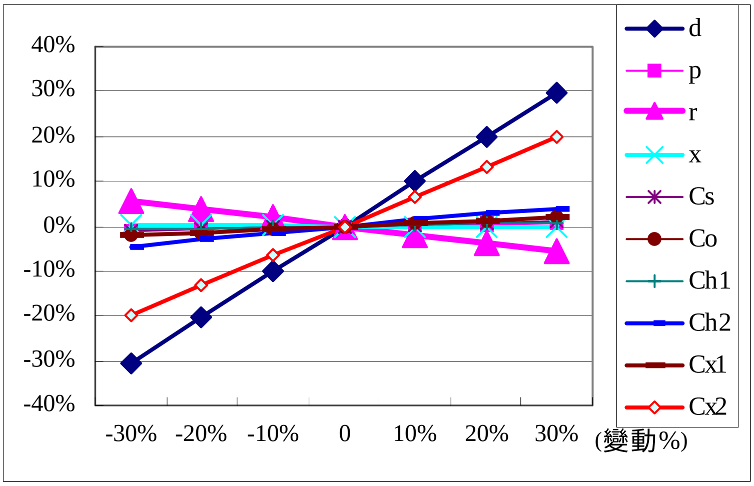

圖5　相關參數之變異圖($p > d$)

當增加d、p、C_s、C_o、C_{h1}、C_{h2}、C_{x1}、C_{x2}值時，期望總成本*ETCU*會跟著增加，而減少d、p C_s、C_o、C_{h1}、C_{h2}、C_{x1}、C_{x2}值時，期望總成本*ETCU*會跟著減少。

當增加r、x值時，期望總成本*ETCU*會降低，而減少r、x值時，期望總成本*ETCU*會增加。

(2) 期望總成本*ETCU*對於各參數的敏感度不同可分為三種情形：

高敏感度：d、C_{x2}

中敏感度：r、C_{h2}

低敏感度：p、x、C_s、C_o、C_{h1}、C_{x1}

由3.5節的數值範例來看，d、C_{x2}是影響期望總成本*ETCU*的主要原因。當d增大或減少30%時，期望總成本*ETCU*也會增大或減少約30%；當C_{x2}增大或減少30%時，期望總成本*ETCU*也會增大或減少約20%。而r、C_{h2}是影響期望總成本*ETCU*的次要原因。p、x、C_s、C_o、C_{h1}、C_{x1}對期望總成本*ETCU*的影響則很小。

4. 結論

工商業環境競爭激烈，企業降低成本以增加在市場上的競爭力成為必然的趨勢。然而越是在競爭的時代，越是必須重視利益、資源與環境保護。

(1) 本研究探討了考慮不良品與多次訂購之回收性商品的存貨策略，在範例中我們發現到顧客的需求率(d)與外購商品的變動單位檢驗成本(C_{x2})為影響期望總成本的關鍵參數。因此企業可以藉由更準確的預測顧客需求以及訓練人員來降低變動檢驗成本，才能使期望總成本最小化。

(2) 不論是$p>d$或是$d>p$的數值範例中，舊品的回收率(r)及檢驗速率(x)都與期望總成本呈現負相關，因此加強推動環保意識、增加舊品的回收率與訓練人員檢驗不良品的熟悉度，都是降低期望總成本的好方法。另外當$d>p$時，舊品修復力(p)也呈現負相關，也就是說在$d>p$條件下提高舊品修復力也可以降低期望總成本。但在$p=d$可以發現到x對於期望總成本的影響近乎於零，也就是當$p=d$時，不良品的檢驗速率大小不會影響到期望總成本。

(3) 雖然業界一直致力於降低生產時的不良率，但是商品中含有不良品的情況在現實中還是存在的，因此若管理具有此特性的產品實則必須考慮到此因素，但在許多回收性商品的存貨模式中常忽略此種特性，故本文之在存貨模式中加入了外購商品具有不良品之條件，使此種模式可作爲回收性商品管理之參考。

本研究重心在於以達到最小總成本爲前提下，如何在回收商品的數量與外購商品的數量間取得一個平衡點，讓資源充分利用，達到雙贏的目標。當然，模式中的方程式相當繁瑣，但藉由電腦的幫助與程式撰寫運算下，所需花費的時間大幅的降低，因此對於幫助管理存貨與制定決策，有相當正面的效益。

參考文獻

Anily, S., "Single-Machine Lot-Sizing with Uniform Yields and Rigid Demands: Robustness of the Optimal Solution," *IIE Transaction*, Vol. 27, 1995, pp. 633-635.

Chakravarty, A. K. and Shtub, A., "Strategic Allocation of Inspection Effort in a Serial, Multi-Product Production Systems," *IIE Transactions*, Vol. 19, 1987, pp. 13-22.

Harris, F. W., "How Many Parts to Make at Once," *The Magazine of Management*, Vol. 10, 1913, pp. 135-136.

Kiesmuller, G. P., "Optimal Control of a One Product Recovery System with Lead Times," *International Journal of Production Economics*, Vol. 81-82, 2003, pp. 333-340.

Kleber, R., Minner, S. and Kiesmuller, G.P., "A Continuous Time Inventory Model for a Product Recovery System with Multiple Options," *International Journal of Production Economics*, Vol. 79, 2002, pp. 121-141.

Koh, S. G., Hwang, H., Sohn, K. I. and Ko, C.S., "An Optimal Ordering and Recovery Policy for Reusable Items," *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 43, 2002, pp. 59-73.

Lee, H. L. and Moinzadeh, K., "A Continuous-Review Inventory Model with Constant Resupply Time and Defective Items," *Naval Research Logistics*, Vol. 34, 1987, pp. 457-467.

Porteus, E. L., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction," *Operation Research*, Vol. 34, No. 1, 1986, pp. 137-144.

Richter, K., "The EOQ Repair and Waste Disposal Model with Variable Setup Numbers," *European Journal of Operational Research*, Vol. 96, 1996, pp. 313-324.

Richter, K., "The Extended EOQ Repair and Waste Disposal Model," *International Journal of Production Economics*, Vol. 59, 1996, pp. 463-467.

Richter, K. and Dobos, I., "Analysis of the EOQ Repair and Waste Disposal Problem with Integer Setup Numbers," *International Journal of Production Economics*, Vol. 45, 1999, pp. 443-447.

Salameh, M. K. and Jaber, M. Y., "Economic Production Quantity Model for Items with Imperfect Quality," *International Journal of Production Economics*, Vol. 64, 2000, pp. 59-64.

Schwaller, R. L., "EOQ under Inspection Costs," *Production and Inventory Management*, Vol. 29, No. 3, 1988, pp. 22-24.

Urban, T.L., "Deterministic Inventory Models Incorporating Marketing Decisions," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 22, 1992, pp. 85-93.

Wee, H. M. and Jong, J.F., "An Integrated Multi-Lot-Size Production Inventory Model for Deteriorating Items," *Journal of Management and Systems*, Vol. 5, No. 1, 1988, pp. 97-114.

Wee, H. M. and Chen, W. T., "Integrated Multi-Suppliers Three-Echelon Inventory Model for Deteriorating Items," *Journal of Management and Systems,* Vol. 9, No. 3, 2002, pp. 331-344.