管　理　與　系　統　Journal of Management & Systems
第十四卷 第一期　民國九十六年一月　Vol. 14, No. 1, January 2007
95-119頁　pp. 95-119

Gram-Charlier GARCH 選擇權演算法的評價與避險績效

Valuation and Hedging Performance of Gram-Charlier GARCH Option Pricing Algorithm

周恆志[1] Heng-Chih Chou　陳達新[2] Dar-Hsin Chen　巫春洲[3] Chun-Chou Wu

銘傳大學財務金融系　國立台北大學企業管理系　致理技術學院財務金融系

[1]Department of Finance, Ming Chuan University, [2]Department of Business Administration, National Taipei University, & [3]Department of Finance, Chihlee Institute of Technology

(Received May 5, 2006; Final Version October 17, 2006)

摘要：本文以 Gram-Charlier GARCH 選擇權演算法配適於臺指選擇權的市場資料，並與 BS 公式解相比較，藉以瞭解 GARCH 選擇權演算法納入高階動差資訊後的評價與避險績效。市場資料顯示臺股指數報酬率的分配具有異質波動性，而且顯著不服從常態分配，因此 BS 模型會錯估臺指選擇權的價格；Gram-Charlier GARCH 選擇權演算法考慮臺股指數的異質波動性、波動不對稱性與報酬率分配的高階動差值，評價績效顯著較佳。但是 Gram-Charlier GARCH 選擇權演算法仍有明顯的評價誤差，臺股指數的日內波動性以及選擇權市場的流動性可以顯著解釋評價誤差。此結果反應出 GARCH 模型對於刻劃股價指數波動性的過程仍有不足，有必要進一步考慮跳躍風險溢酬或流動性效應的影響。避險績效測試結果顯示 BS 模型優於 Gram-Charlier GARCH 選擇權演算法，這可能是因爲高階動差的敏感變動降低了避險參數估計的準確性，導致 GARCH 選擇權演算法呈現較差的避險績效。

關鍵詞：Gram-Charlier GARCH選擇權演算法、NGARCH模型、指數選擇權、避險績效

---

* 作者非常感謝本刊編輯的協助，以及兩位匿名審查委員的指正，並感謝中央大學財金系張傳章教授的寶貴意見。文中若有任何錯誤或疏漏，當屬作者之責。本文聯絡作者：巫春洲。

Abstract：The article applies Gram-Charlier GARCH option pricing algorithm to TAIEX options, in order to investigate the performance of the option pricing algorithm which considers the higher moments of underlying asset returns. We find that both GARCH algorithm and BS model systematically mis-price the TAIEX options. The GARCH algorithm performs better than BS model, but the pricing error of GARCH algorithm is still significant. A regression analysis shows that the explanatory factors for the pricing error of GARCH algorithm include intraday volatility of underlying index, and also the liquidity of the option markets. This implies that the GARCH algorithm with higher moments included still cannot totally capture the rapidly changing distributions of the underlying index returns, but an integrated approach incorporating jumps in return or volatility and the liquidity effect may be promising. Finally, the hedging simulation demonstrates that the Gram-Charlier GARCH algorithm is disappointing. The reason behind its poor performance may be the high variation of the daily estimate of the skewness parameter decreases the accuracy of delta estimation.

Keywords **:** Gram-Charlier GARCH Option Pricing Algorithm, NGARCH, Index Option, Hedge Performance

1. 緒論

準確評估選擇權的價格是發行商與投資人管理選擇權價格風險的關鍵。實務界最常使用Black-Scholes (BS，1973) 模型公式解評價選擇權契約，但是多數實證研究顯示BS模型的諸多假設並不符合金融市場的實際現象。尤其是股票報酬率的常態分配假設以及股票價格波動性為常數之假設，未能得到市場資料的支持；因此BS模型的評價績效並不理想，並無法滿足實務界的需求。在這樣的背景下，許多學者逐步放寬BS模型的假設，而提出符合實際資料的演算法。Merton (1976) 最先修正股票報酬的常態分配假設，他假設標的資產價格波動過程 (process) 的跳躍次數符合波氏 (Poisson) 分配而推導出在隨機跳躍過程下的選擇權評價模型。Jarrow and Rudd (1982) 則應用Gram-Charlier數列展開式描繪報酬率分配，將BS公式解所算出的選擇權價格加上一調整項來修正常態分配假設所造成的評價誤差，而此調整項恰由其標的資產報酬率分配的偏態 (skewness) 與峰態 (kurtosis) 係數所決定。Corrado and Su (1996) 也採用類似的作法，將BS評價公式對報酬率的偏態與峰態係數值加以校正，將BS公式加上一個修正項以增加評價績效。Rubinstein (1998) 進一步簡化Jarrow and Rudd (1982) 的方法，應用Edgeworth數列展開式考慮股價分配的前四階動差，估計股價隨機過程下選擇權到期時各種股價出現的機率，並結合Cox *et al*. (1979) 的二元樹評價法，提出Edgeworth二元樹演算法 (Edgeworth binomial tree)。儘管上述這些演算法考慮了標的資產報酬率分配的偏態與峰態特性，但是對於波動性的隨機過程並未多做考慮，仍然將波動性視為常數來處理，並不符合市場上觀察到的實際現象。

Engle (1982) 與Bollerslev (1986) 分別建構了ARCH/GARCH模型以捕捉波動性隨時間而改變的特性，Bollerslev *et al.* (1992) 進一步指出GARCH(1,1)已能充份掌握股票報酬率的異質變異性。其後有Nelson (1991) 的EGARCH (Exponential GARCH) 以及Engle and Ng (1993) 的NGARCH (Non-linear GARCH) 等模型以刻劃在金融市場中常被觀察到的不對稱 (asymmetric) 波動性，而使波動性的估計更爲完備。Duan (1995) 指出當標的資產的波動性服從GARCH隨機過程時，透過局部風險中立的機率測度轉換，可以有效評估選擇權的價格。其模擬結果顯示在GARCH模型下，確實有助於修正BS公式解的評價偏誤。在Duan (1995) 的GARCH選擇權評價基礎下，近年來GARCH選擇權評價演算法日益發展，例如：Hanke (1997) 以類神經網路近似GARCH過程、Duan and Simonato (1998) 的平賭法 (empirical martingale simulation)，Ritchken and Trevor (1999) 的三元樹樹狀圖演算法 (GARCH lattice) 法，Duan *et al*. (1999) 對歐式選擇權的封閉解，Duan and　Simonato (2001) 的馬可夫鏈 (Markov chain) 矩陣演算法、Heston and Nandi (2000) 的特徵函數法 (characteristic function)，以及Duan *et al.* (2003) 的Edgeworth GARCH演算法等。然而這些演算法多數需要大量的記憶空間和運算時間，其中有些演算法甚至具有適用條件的限制，因此在應用時並不符合實務需求。

在上述GARCH選擇權演算法中，Duan *et al.* (1999) 的選擇權演算法相當獨特，此法不但考慮標的資產的異質變異性，更納入報酬率分配的偏態與峰態資訊。而且對歐式選擇權有近似的封閉解，因此相較於其他GARCH選擇權評價法，此法在運算上並不需要大量的記憶空間和運算時間，頗符合實務上同時處理大量資料的需要。Duan *et al.* (1999) 是在NGARCH架構下推導出歐式選擇權評價的演算法[1]，他們的方法是拓展Jarrow and Rudd (1982) 的方法，經由Gram-Charlier數列展開式考慮在報酬率分配非常態的情形下，求出GARCH選擇權的理論價格，所以可以稱爲Gram-Charlier GARCH選擇權演算法。該演算法採用標的資產的歷史價格資料直接估計模型參數，在實務上相當容易應用。由於Gram-Charlier展開式直接引用報酬率分配實際的高階動差資訊(偏態與峰態係數值)，理論上更能求算選擇權的合理價格。模擬結果也發現這個演算法的運算速度相當快，對於短期的選擇權以及具有低波動持續性 (low volatility persistence) 的長期選擇權，其評價尤爲準確。另一方面由於此演算法如BS模型一樣有封閉解，因此就歐式選擇權而言，在估計避險比例及隱含波動性時也相當方便。但是Duan *et al.* (1999) 並未將Gram-Charlier GARCH選擇權演算法配適市場資料，因此本文選取臺灣期交所的歐式臺指選擇權市場資料，以了解Gram-Charlier GARCH選擇權演算法在實務上的適用性。

1　不對稱GARCH模型除了NGARCH之外，尙有EGARCH與GJR-GARCH模型。Duan *et al.* (1999) 也展示在局部風險中立下的EGARCH與GJR-GARCH模型，以及相對應之考慮高階動差值的選擇權評價演算公式。Duan *et al.* (2006) 更以數值模擬展示其可能性。本文採用NGARCH模型僅因爲NAGRCH模型爲一般人所熟悉，且具有操作簡單、模型參數較少的特質，並非宣稱其優越性。

過去關於GARCH選擇權演算法之實證研究，可依評價與避險應用兩方面來說明。首先在評價績效的實證方面，Duan and Zhang (2001) 曾以香港Hang Seng指數選擇權資料配適Duan and Simonato (1998) 的平賭法，其結果指出GARCH選擇權演算法的評價績效優於BS模型。巫春洲(民91) 與周恆志等 (民94) 以臺灣美式認購權證爲實證樣本，分別配適Duan and Simonato (2001) 的馬可夫鏈矩陣演算法與Duan *et al*. (2003) 的Edgeworth GARCH演算法，其結果也認爲GARCH選擇權演算法有助於提升評價績效。其次在避險績效方面，實證結果並不支持GARCH選擇權演算法的優越性。例如，Ferreira *et al.* (2005) 以西班牙IBEX-35指數選擇權爲樣本配適Heston and Nandi (2000) 的特徵函數法，其結果發現GARCH選擇權演算法的避險績效顯著比BS (1973) 的避險績效差；Yung and Zhang (2003) 與周恆志等 (民94) 則分別以S&P 500指數選擇權與股票認購權證爲樣本，同樣指出以EGARCH或NGARCH模型搭配選擇權評價的演算法之避險績效並不顯著優於BS模型。他們認爲這是因爲當演算法考慮較多價格變數時，的確比較能夠捕捉實際的價格行爲，所以較易貼近市場價格，呈現較佳的評價績效；但是這樣一個複雜的演算法在進行動態避險估計避險參數時，過多的變數反而影響避險參數的估計準度，因而影響避險績效。

臺灣期交所於2001/12/24推出歐式臺指選擇權契約 (TAIEX options，代號TXO)，包括臺指買權及臺指賣權。自臺指選擇權上市交易以來，由於其較低的交易成本與多樣的多空部位操作，所以其每日成交口數的成長頗爲快速。臺指選擇權市場不但提供投資人一個投資避險的工具，同時其日益熱絡的交易也提供我們足夠的市場資訊，藉以檢驗選擇權評價模型的適用性。臺指選擇權其標的資產是臺灣證交所發行量加權股價指數 (TAIEX，以下簡稱臺股指數)，許多文獻例如周雨田等 (民91)、陳宜廷 (民92)、Kassimatis (2002)、Karanasos and Kim (2003) 以及周雨田等 (民93) 等實證研究，皆已指出臺股指數報酬率時間數列具有波動性叢聚、厚尾及不對稱性等現象。本文即以臺指選擇權的市場資料配適GARCH選擇權演算法，其結果應有助於我們瞭解臺指選擇權市場的價格行爲，以及GARCH選擇權評價法在臺指選擇權市場進行評價與避險操作的適用狀況。本文重點在於解除BS模型的諸多假設，考慮臺股指數報酬率的異質波動性、波動不對稱性，以及臺股指數報酬率分配的高階動差資訊；採用計算上更具效率的Gram-Charlier GARCH選擇權演算法，以不對稱的NGARCH 模型刻劃臺股指數的傳遞過程來探討臺指選擇權的價格行爲。因此相較於BS模型中常態分配與固定波動性的設定，理論上本文更能完整描述市場行爲，應能提供投資人較有用的參考資訊。

2. GARCH 選擇權評價方法

本節首先介紹 Duan (1995) 的風險中立機率 Q 測度之下的 GARCH 模型，其次說明本文所應用的 Gram-Charlier GARCH 選擇權分析解的演算法。

2.1 GARCH選擇權評價模式的理論架構

Duan (1995) 提出的局部風險中立評價關係[2] (locally risk-neutralized valuation relationship, LRNVR)爲GARCH選擇權評價的理論基礎。以Engle and Ng (1998) 的NGARCH模型爲例，若令 S_t 爲選擇權標的資產在時點t的價格，假設標的資產價格動態過程服從NGARCH(1,1) 模型：

$$\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) = r_t + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1} \tag{1}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\varepsilon_t - \theta)^2 \tag{2}$$

$$\varepsilon_{t+1} \mid I_t \sim N(0,1) \tag{3}$$

其中，r 是市場的無風險利率，h_{t+1} 是標的資產報酬率的條件變異數。假設報酬率方程式的干擾項 ε_t 服從 $N(0,1)$，而且參數必須滿足下列之限制條件：$\beta_0 > 0$，$\beta_1 \ge 0$，$\beta_2 \ge 0$ 以及 $\beta_1 + \beta_2(1+\theta^2) < 1$，這些限制條件是確保穩態變異數存在而且爲正定的充分條件。模型參數θ則是用來捕捉在股票市場中，價格波動性經常出現的不對稱性。不對稱的GARCH模型，常被廣泛的應用於股票市場的實證研究，就NGARCH模型而言，若實證資料配適結果顯示θ>0，則表示市場具有不對稱性。參數 λ 爲單位風險貼水，在此設定爲常數。I_t 爲資訊集合，可以視爲由 $\{S_0, h_0, \varepsilon_s; s = 0,1,2,...,t\}$所構成市場資訊，因此基於 I_t 的資訊，條件變異數 h_{t+1} 是可預測的。

根據Duan (1995) 的推導，藉由風險測度的轉換，我們可以評價標的資產S所衍生的選擇權契約。因此NGARCH(1,1) 可以利用LRNVR而轉換爲在局部風險中立機率測度的過程 (process)：

$$\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) = r_t - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}c_{t+1} \tag{4}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(c_t - (\theta+\lambda))^2 \tag{5}$$

$$c_{t+1} \mid I_t \sim N(0,1) \tag{6}$$

其中 $c_t = \varepsilon_t + \lambda$ 是一個在局部風險中立機率測度下的標準常態隨機變數。此一風險中立系統仍保留 NGARCH 所補捉的不對稱性，不對稱性參數由 θ 變爲 $\theta+\lambda$ 。因此，在 NGARCH 架構下的選擇權演算法僅有四個參數：$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 及 $\theta+\lambda$ 。Duan *et al.* (1999) 指出其他的不對稱 GARCH 模型至少需要五個參數，相較之下 NGARCH 模型只需四個參數，較爲簡捷。Duan (1995) 指出在

2　一個機率測度Q與P被稱爲是局部風險中立評價關係 (LRNVR)，必須滿足下列四個條件：(1)測度Q對測度P而言，必須是互相絕對連續；(2) $(S_{t+1}/S_t) \mid F_t$ 遵循著對數常態分配；(3) $E_Q[S_{t+1}/S_t] = e^{r_t}$；(4) $VAR_Q[\ln(S_{t+1}/S_t) \mid F_t] = VAR_P[\ln(S_{t+1}/S_t) \mid F_t]$。

NGARCH 架構下的選擇權演算法中，若參數 $\beta_1+\beta_2\left(1+(\theta+\lambda)^2\right)<1$ ，選擇穩態變異數 $h^* = \beta_0\left\{1-\beta_1-\beta_2\left[1+(\theta+\lambda)^2\right]\right\}^{-1}$ 當做 GARCH 的起始變異數(h_0)，則經由式(2)可得第一階的恆定(first order weak stationarity)。在此風險中立測度下，我們得以刻劃標的資產在選擇權到期之前的價格過程，因此即可推算選擇權的理論價格。

2.2 Gram-Charlier GARCH 歐式選擇權演算法

令K是選擇權的履約價格，T是選擇權的存續期間，Duan *et al.* (1999) 利用Gram-Charlier數列展開式推估出歐式買權在時點t時的價格近似值C_t：

$$C_t = S_t e^{\delta\sigma_{\rho_T}} \sigma_{\rho_T} N(\tilde{d}) - Ke^{-r\mathrm{T}} N(\tilde{d}-\sigma_{\rho_T}) + k_3 A_3 + (k_4-3)A_4 \tag{7}$$

其中，

$$\mathrm{A}_3 = \tfrac{1}{3!} S_t e^{\delta\sigma_{\rho T}} \sigma_{\rho T}\left[\left(2\sigma_{\rho T}-\tilde{d}\right)n(\tilde{d}) - \sigma_{\rho T}^2 N(\tilde{d})\right] \tag{8}$$

$$\mathrm{A}_4 = \tfrac{1}{4!} S_t e^{\delta\sigma_{\rho_T}} \sigma_{\rho_T}\left[\left(\tilde{d}^2 - 1 - 3\sigma_{\rho_T}(\tilde{d}-\sigma_{\rho_T}\right)n(\tilde{d}) + \sigma_{\rho_T}^3 N(\tilde{d})\right] \tag{9}$$

$$\tilde{d} = d + \delta \tag{10}$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_t T + \frac{1}{2}\sigma_{\rho_T}^2\right)}{\sigma_{\rho_T}} \tag{11}$$

$$\delta = \frac{\mu_{\rho_T} - r\,T + \frac{\sigma_{\rho_T}^2}{2}}{\sigma_{\rho_T}} \tag{12}$$

其中，k_3 及 k_4 分別是在 I_0 的條件及風險中立機率Q測度下，資產報酬率的偏態係數及峰態係數。函數 $n(\cdot)$ 及 $N(\cdot)$ 分別爲標準常態分配的機率函數及累積機率函數。我們令 $\rho_T = \ln(\frac{s_T}{s_t})$ 表示資產報酬率，則 μ_{ρ_T} 及 σ_{ρ_T} 分別是 ρ_T 在 I_0 的條件與風險中立Q測度下報酬率的平均數及標準差。因此，如同Jarrow and Rudd (1982) 一樣，(7)式表示Gram-Charlier GARCH選擇權演算法所估計的選擇權價格是由BS公式解加上調整項所構成，而調整項則決定於報酬率分配的偏態和峰態係數。此處 δ 值必須大於零方能刻劃隨機波動過程，在(12)式中若令 $\mu_{\rho_T} = r_t T - \frac{\sigma_{\rho_T}^2}{2}$ 使得 $\delta=0$ ，此時波動性爲常數，則(7)式即爲BS模型公式解。

其次我們可藉由買權賣權等價關係 (put-call parity) 推導Gram-Charlier GARCH選擇權演算法對歐式賣權在時點t時的理論價格近似值P_t：

$$P_t = S_t e^{\delta\sigma_{\rho_T}} \sigma_{\rho_T} N(\tilde{d}) - Ke^{-r_t\mathrm{T}} N(\tilde{d}-\sigma_{\rho_T}) + k_3 A_3 + (k_4-3)A_4 - S_0 + Ke^{-r_t T} \tag{13}$$

其中，A_3、A_4、k_3 及 k_4 等參數的意義同買權評價公式。實務上應用評價公式(7)與(13)式分析解估計歐式選擇權價格時，我們首先必須計算標的資產報酬率的前四個動差，即是計算 $E^Q\left[\rho_T^i \middle| I_0\right]$，i=1,2,3,4。依據(4)式進行迴圈運算 (recursive operation)，對於任何整數 l，$l\in\{1,2,3,4\}$，

$$E_0^Q\left[\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right)^l\right]=E_0^Q\left[\left(t\gamma-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}h_i+\sum_{i=1}^{t}\sqrt{h_i}\right)^l\right],\ t\in\{1,2,\ldots\} \tag{14}$$

其中 $E_0^Q[\cdot]$ 表示在 I_0 的條件及風險中立機率Q測度下的期望值。以(14)式估算資產報酬率分配前四階動差極有效率，Duan (1995) 及Duan *et al.* (1999) 皆以數值模擬展示在GARCH過程下，資產報酬率分配高階動差之估計過程，證實這是個有效率的估計法。

3. 樣本資料及研究方法

本節首先說明配適GARCH演算法與BS模型的樣本資料，其次說明模型參數的估計過程。

3.1 資料來源

本文之目的在探討Gram-Charlier GARCH選擇權演算法的評價與避險績效，並以臺指選擇權市場資料爲配適樣本。臺指選擇權在臺灣期交所上市交易初期成交量並不大，然而成長相當快速，2001年時平均每日交易量僅856口契約，2003年已達87,229口契約；不過相較於美國或歐洲市場的選擇權商品，交易量仍偏低。本文選取的樣本期間爲2002年7月至2003年6月，在這段期間內臺灣加權股價指數由2002/7/1的4969.32點下跌至2002/10/11的3850.04點，而後反彈至2003/6/20的5000點左右，平均日報酬率爲負0.023 %，而且台股指數呈現相當明顯的波動變化。ADF與PP單根檢定的統計值分別爲-25.67與-32.02，在95%的顯著水準下顯著拒絕虛無假設 (H_0:樣本具有單根)，表示台股指數報酬率數列爲穩態數列。Ljung-Box 的Q(12)統計值爲95.56，在95%的顯著水準之下，資料拒絕殘差項爲白噪音過程的虛無假說，表示台股指數報酬率數列具有異質變異性。

鑒於流動性之考量，本文對樣本選擇權的取樣原則，乃選取樣本期間內存續期間介於21天到90天的契約。根據Dumas *et al.* (1998) 與Heston and Nandi (2000) 的作法，我們進一步剔除價內外程度(moneyness) 大於10%或小於-10%的樣本，亦即剔除 $(S_t/K)-1>10\%$ 或 $(S_t/K)-1<-10\%$ 之樣本，其中S_t爲時點t的臺股指數，K爲臺指選擇權履約價。我們也剔除違反價格下界條件 (lower bound condition) 的樣本，亦即分別剔除 $P_t<Ke^{-r_tT}-(S_t-D_t)$，$C_t<(S_t-D_t)-Ke^{-r_tT}$ 的樣本，其中D_t是臺股指數在時點t的的股利現值，P_t與C_t分別是在時點t的臺指賣權價格與臺指買權價格。由於臺指選擇權市場之收盤時間較股票市場之收盤時間晚15分鐘，爲避免非同步交易 (non-synchronic trading) 的問題，本文以股票市場的收盤時間 (1:30p.m.) 爲準，對應取得選擇權

契約當時之成交價。而臺指選擇權價格及其標的臺股指數的資料皆取自臺灣經濟新報資料庫(TEJ)。在樣本期間內符合選樣標準的選擇權觀察值個數，買權有1,324個，賣權有1,097個。我們將樣本期間內每日最接近1:30 p.m.之買權與賣權觀察值個數、平均價格依價內外程度整理於表1。由表1我們可觀察出，無論是買權或賣權樣本，深度價外的樣本數最多，約佔所有樣本的五成；此外隨著存續期間縮短時，符合選樣標準的樣本個數越多。這些情況皆顯示本文樣本分佈頗能反映母體特性，具有足夠的代表性。

3.2 參數估計

相對於偏態係數爲零，峰態係數爲三的常態分配假設，實際的報酬率分配動差值具有期間結構 (term structure) 的性質，因此我們應用Gram-Charlier GARCH選擇權演算法評價臺指選擇權時，必須先知道臺股指數報酬率分配的動差值。因此本文利用臺股指數的歷史資料配合選擇權的存續期間，分別估計不同到期期間內臺股指數報酬率分配的前四階動差，作爲Gram-Charlier GARCH演算法評價不同到期日選擇權所需參數，並繪於圖1。我們以到期日的函數來描述動差，將平均數定義爲 $\frac{1}{n}\sum\rho_{\tau}\Big/\tau$ ，變異數爲 $VAR(\rho_{\tau})/\tau$ ，偏態係數爲 $E(\rho_{\tau}-\frac{1}{n}\sum\rho_{\tau})^{3}\Big/\sqrt{VAR(\rho_{\tau})}^{3}$ ，峰態係數爲 $E(\rho_{\tau}-\frac{1}{n}\sum\rho_{\tau})^{4}\Big/\sqrt{VAR(\rho_{\tau})}^{4}$ ，其中 ρ_{τ} 爲標的資產之對數化報酬率。由圖1我們明顯發現，臺股

表1　臺指選擇權樣本分布

	K/S_t	平均價格(點)	樣本數	佔總樣本比例
臺指買權				
深度價外	1.03-1.1	67.25	641	48.41%
價外	1.01-1.03	123.59	173	13.06%
價平	0.99-1.01	161.08	162	12.24%
價內	0.97-0.99	199.19	124	9.37%
深度價內	0.90-0.97	304.77	224	16.92%
所有買權樣本		138.63	1,324	
臺指賣權				
深度價內	1.03-1.1	329.74	179	14.95%
價內	1.01-1.03	211.68	114	9.52%
價平	0.99-1.01	172.78	163	13.62%
價外	0.97-0.99	130.37	181	15.12%
深度價外	0.90-0.97	66.55	560	46.79%
所有賣權樣本		143.85	1097	

說明：2002/7/1至2003/6/30符合本研究取樣標準的觀察值個數，買權有1,324個，賣權有1,097個。本文以 (K/S_t) 衡量各選擇權交易資料在各交易日之價內外程度。表中的平均價格單位爲點數，依據期交所臺指選擇權之契約規格，每點價值新臺幣50元。

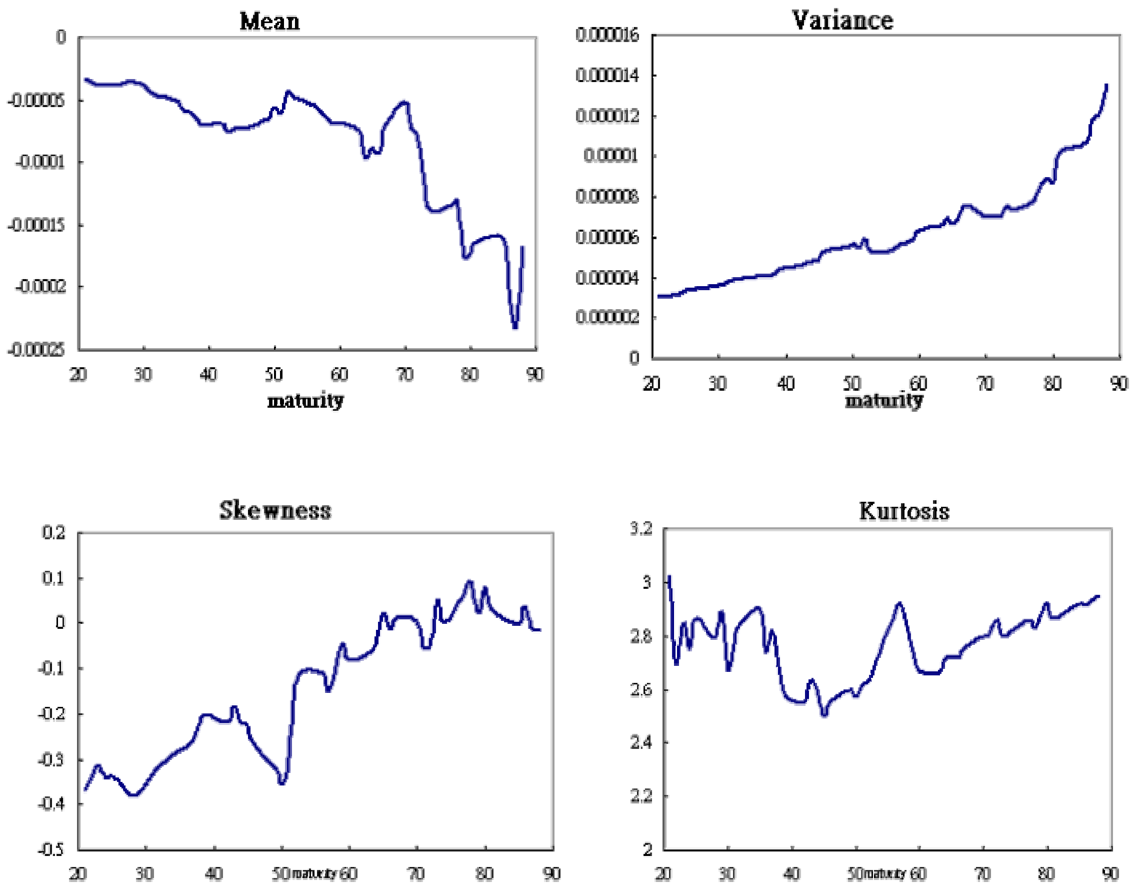

圖1　臺股指數報酬率動差的期間結構

說明: 以臺指選擇權之標的臺股指數2002/7/1前21天到90天報酬率資料，估計臺股指數報酬率的前四階動差(mean、variance、skewness、kurtosis)，作為不同到期日下Gram-Charlier GARCH選擇權演算法評價臺指選擇權時所需之參數。

指數報酬率分配的動差值明顯偏離常態分配的假設，而且呈現右偏高狹峰的現象。此與Singleton and Wingender (1986) 以及Aggarwal and Rao (1990) 的發現一致[3]。因此直觀而言，納入實際動差值的Gram-Charlier GARCH選擇權演算法理論上會有較佳的評價績效。

根據Heston and Nandi (2000) 的做法，我們以臺股指數在臺指選擇權發行日前一年的日報酬率資料，估計臺股指數報酬率數列配適NGARCH(1,1) 的模型參數，當做選擇權存續期間模型參數的起始值。無風險利率則是以臺灣銀行一年期定期存款利率替代。接著如本文第二節所述，

3　Singleton and Wingender (1986) 以1961-1980期間內個股的月資料進行取樣分析，而Aggarwal and Rao (1990) 則是以1974、1977、1980及1983年隨機取樣300檔個股的週資料進行分析，都得到報酬率服從右偏分配的發現。

NGARCH(1,1) 模型在風險中立機率測度Q之下的穩態變異數爲 $h^* = \beta_0(1-\beta_1-\beta_2(1+(\theta+\lambda)^2))^{-1}$ ，我們以此當做NGARCH(1,1)模型的起始變異數 (h_0) 。而且爲提升評價與避險績效，我們每個月重新估計一次NGARCH(1,1) 參數以反應最新的價格資訊，茲將所估計出之參數列於表2。表中顯示各月份所配適的NGARCH(1,1) 模型參數中，其 β_1 與 β_2 及其他參數值的特性和一般股票報酬率的實證研究具有一致性，亦即 $\beta_0 > 0$ ， $\beta_1 \geq 0$ ， $\beta_2 \geq 0$ 和 $\beta_1 + \beta_2\left(1 + c^2\right) < 1$ ，而且NGARCH(1,1) 在刻劃臺股指數的報酬率過程上具有統計顯著性。模型中槓桿參數與風險貼水值會影響臺股指數的未來走勢，但在風險中立測度下，我們無法個別估計此二係數；因此表2呈現的是此二參數的加總(θ+λ)。表中顯示各月份所估計的(θ+λ)皆爲正值，表示臺股指數確具有不對稱波動性，槓桿參數與風險貼水皆不可忽視，因此納入NGARCH模型的Gram-Charlier GARCH演算法理論上會有較佳的評價績效。

表2 臺股指數的NGARCH 模型係數估計值

$$\ln\left(S_{t+1}/S_t\right) = r_t + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\,\varepsilon_{t+1}$$
$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\varepsilon_t - \theta)^2$$
$$\varepsilon_{t+1} \mid F_t \sim \text{N}(0,1)$$

月份	β_0	β_1	β_2	$\theta+\lambda$	h^*	r_t	波動持續性
2002/07	2.99300E-05	0.833483	0.068202	0.570585	0.000453	0.025	0.923889
2002/08	2.87350E-05	0.839029	0.065954	0.607903	0.000547	0.025	0.929356
2002/09	3.16070E-05	0.82489	0.07027	0.591924	0.000306	0.025	0.919780
2002/10	3.58210E-05	0.84306	0.045806	0.894112	0.000382	0.025	0.901150
2002/11	2.75660E-05	0.839358	0.070567	0.546372	0.000372	0.025	0.930991
2002/12	7.20100E-06	0.911085	0.029408	0.115053	0.000299	0.025	0.977058
2003/01	6.08010E-06	0.425301	0.004638	0.852875	0.000289	0.025	0.976267
2003/02	5.02793E-06	0.41038	0.00495	0.672379	0.000142	0.025	0.979184
2003/03	8.33810E-06	0.348454	0.004095	0.727639	0.000344	0.025	0.969842
2003/04	8.46710E-06	0.422978	0.003455	0.530388	0.000283	0.025	0.968902
2003/05	8.34039E-06	0.39247	0.002896	0.4090653	0.000371	0.025	0.970373
2003/06	6.83580E-06	0.434987	0.002968	0.3446041	0.000232	0.025	0.974474

說明： β_0 ， β_1 ， β_2 ， $\theta+\lambda$ 爲NGARCH模型參數的估計值。 h^* 代表臺股指數的穩態變異數， $h^* = \beta_0\left[1-\beta_1-\beta_2(1+(\theta+\lambda)^2)\right]^{-1}$ ，在此當做臺股指數在NGARCH模型之下變異數的起始值。 r 爲無風險利率，我們採用臺指選擇權發行時臺灣銀行一年期定存利率。股票指數的波動持續性 (volatility persistence) 是以股票指數的GARCH模型參數計算 $\beta_2(1+(\lambda+c)^2)+\beta_1$ 值來衡量。

本文以BS模型評價臺指選擇權時，採用臺指選擇權發行前一年的臺股指數市場資料，以估計臺股指數的歷史波動性 (historical volatility)。同時為提升評價與避險績效，我們每個月重新估計一次臺股指數的波動性以反應最新的價格資訊。BS公式對臺指買權的理論價格為 $C_t = S_t e^{-q\tau} \cdot N(d_1) - K e^{-r_t\tau} N(d_2)$ ，臺指賣權的理論價格為 $P_t = K e^{-r_t\tau} N(-d_2) - S_t e^{-q_t\tau} N(-d_1)$ ，其中， $d_1 = \left[\ln(\frac{S_t e^{-q_t\tau}}{K}) + (r_t + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)\tau\right] \Big/ \hat{\sigma}\sqrt{\tau}$ ， $d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{\tau}$ ， S_t 為臺股指數在時點t的收盤價格，K為臺指選擇權之履約價格，r為無風險利率，τ為臺指選擇權的存續期間 (年)， $N(\cdot)$ 為標準常態分配的累積機率函數，q為臺股指數的年股利率。我們假設股利率為常數，並以實際股利率代入評價模型。根據Harvey and Whaley (1992) 的做法，在時點 t 時股價指數的年股利率 q_t 的估計式為 $q_t = \frac{1}{T}\ln\left[S_t + \sum_{i=1}^{n} D_i e^{r_i(T-T_i)}\right) \Big/ S_t]$ ，其中，D_i與T_i分別為臺指選擇權到期前股價指數第i次股利發放金額與發放時間，n是股利發放次數，S_t是加權股價指數，T是臺指選擇權距到期日之天數，r_i為第i次股利發放時的無風險利率。

4. 實證結果分析

4.1 評價績效分析

為探討Gram-Charlier GARCH選擇權演算法應用於臺指選擇權評價的結果，以及相對於BS模型的評價績效，我們分別逐一紀錄Gram-Charlier GARCH選擇權演算法與BS模型理論價格與選擇權市價的價差，計算均方根誤差 (root mean square error, RMSE)、平均誤差絕對值 (mean value of absolute valuation error, MAE) 及平均誤差百分比 (mean value of percentage error, MPE) 等三種評價誤差指標，以評比理論模型或演算法的評價績效。三種評價誤差指標的計算方式說明如下：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(\hat{O} - O)^2} \tag{15}$$

$$MAE = \frac{1}{n}\sum|\hat{O} - O| \tag{16}$$

$$MPE = \frac{1}{n}\sum\frac{(\hat{O} - O)}{O} \tag{17}$$

其中，O為選擇權市場價格， $\hat{O}$ 為根據Gram-Charlier GARCH選擇權演算法或BS模型所求算出之選擇權理論價格，n表示選擇權樣本個數。這三種評價誤差指標中，RMSE為最普遍用來衡量評價誤差的指標，由於RMSE對於較大的評價誤差會給予較高的權重，因此會產生誤差加乘的效果；而MAE則對於不同的評價誤差給予相同的權重；最後MPE則對於不同價內價外程度的選擇權評價誤差，給予不同的權重。例如，當選擇權處於深度價內時，由於其價格較高，同樣的評價

誤差值會有較低的百分比誤差，此時MPE所給予的權重較低；而當選擇權處於深度價外時，MPE所給予的權重較高。

Gram-Charlier GARCH選擇權演算法與BS模型對臺指買權與臺指賣權之評價績效列於表3，表中數字是以各月份來區分。首先觀察評價誤差 RMSE與MAE，我們可以發現一般而言GARCH演算法有相對較小的評價誤差。以臺指買權爲例，GARCH演算法的平均RMSE僅是BS模型平均RMSE的86.5%，而且GARCH演算法的平均MAE僅是BS模型平均MAE的80.3%；若以臺指賣權爲例，GARCH演算法的平均RMSE僅是BS模型平均RMSE的89.7%，而且GARCH演算法的平均MAE僅是BS模型平均MAE的85.7%。其次，觀察評價誤差MPE，二評價法對買權與賣權的MPE皆爲負值，表示不論對臺指買權或賣權，此二評價法皆系統性低估選擇權價格，其中GARCH演算法低估的幅度相對較小。就估計的標準誤而言，GARCH演算法的各項評價誤差指標之標準誤皆較小，表示GARCH演算法呈現較穩定的評價績效。本文將GARCH選擇權演算法與BS模型對臺指選擇權的評價誤差做配對t檢定，以分析二者的評價績效是否有差異。在5%的顯著水準下，多數月份樣本契約的差異性檢定顯示GARCH演算法的評價績效顯著優於BS模型。這個結果符合預期，顯示Gram-Charlier GARCH選擇權演算法除了考慮標的資產的異質變異性，亦納入高階動差資訊，因此對臺指選擇權的評價績效確實優於傳統的BS模型。而且，NGARCH模型的不對稱參數爲正數，顯示臺灣股票市場臺股指數的槓桿風險溢酬對臺指選擇權價值的重要性。本文樣本期間內臺股指數的前三月是明顯的空頭走勢，而後四個月偏向多頭走勢，理論上對價格波動性有不同程度之影響，因此未考慮波動不對稱性的BS模型會有較大的評價誤差。相對而言，NGARCH模型考慮臺股指數多空資訊對波動性的不對稱影響，呈現較小的評價誤差。

接著，我們將理論模型的評價誤差依據選擇權的價內外程度區分整理於表4。由表中可看出在不同之價內外程度下，GARCH演算法之MAE、RMSE及MPE皆較小於BS模型，而且皆有較低的標準誤，顯示GARCH演算法之評價績效較BS模型優異；其中對於價內與價外的選擇權，GARCH演算法的相對優異性尤爲明顯。這個結果表示相對於BS模型的笑狀波幅結構 (volatility smile)，GARCH演算法較能刻劃臺股指數的波動性過程，因此可以顯著改善對價內與價外選擇權的評價績效。我們亦利用箱型圖 (box-and-whisker plots) 來檢驗GARCH演算法及BS模型評價誤差MPE分佈的屬性。我們依照價內、價平及價外程度，經由其最小值、第一個四分位數、中位數、第三個四分位數及最大值，以觀察其評價誤差之分佈情形。圖中的水平線代表中位數，箱型圖的長度代表第一個及第三個四分位數的距離，而連接箱型圖的上、下影線即分別爲最大值及最小值與箱型圖間的距離。由圖2可以發現BS模型不論在買權或賣權部分，在不同的價內外程度，其評價誤差的分佈情形皆較GARCH演算法來得散亂，顯示BS模型之評價績效較不穩定。同時，GARCH演算法之評價誤差皆小於BS模型，顯示GARCH演算法確實優於BS模型。此外，箱型圖亦呈現在各種價內外程度下，BS模型與GARCH演算法皆系統性低估了臺指選擇權的價格，而其中GARCH演算法低估的程度相對較輕微。

表3　**GARCH**演算法及**BS**的評價誤差－以月份分類

月份		*RMSE* BS	*RMSE* GARCH	*MAE* BS	*MAE* GARCH	*MPE*(%) BS	*MPE*(%) GARCH
臺指買權							
2002/07	平均數	9.74	7.86	8.72	7.21	-11.61	-11.28
	標準誤	(8.65)	(8.34)	(8.69)	(7.95)	(9.6)	(8.2)
	差異(%)	-9.52		-8.07		-2.84	
2002/08	平均數	10.74	7.89	9.93	7.56	-8.97	-7.45
	標準誤	(13.49)	(8.12)	(13.08)	(7.23)	(11.6)	(10.3)
	差異(%)	-13.74		-11.89		-16.95	
2002/09	平均數	12.6	11.61	11.81	10.93	-11.21	-9.14
	標準誤	(13.31)	(12.36)	(13.31)	(12.36)	(13.9)	(11.5)
	差異(%)	-7.86		-7.45		-18.47	
2002/10	平均數	12.95	11.29	12.53	11.01	-10.26	-8.9
	標準誤	(15.37)	(12.85)	(15.37)	(12.85)	(14.2)	(11.7)
	差異(%)	-12.82		-12.13		-13.26	
2002/11	平均數	16.93	16.09	16.52	15.57	-10.82	-8.62
	標準誤	(14.72)	(13.16)	(14.72)	(14.16)	(12.7)	(7.8)
	差異(%)	-4.96		-5.81		-20.33*	
2002/12	平均數	13.9	12.37	10.33	10.20	-6.91	-5.23
	標準誤	(10.56)	(10.41)	(10.56)	(10.41)	(5.7)	(5.3)
	差異(%)	-6.40		-20.31*		-24.31*	
2003/01	平均數	11.35	9.6	10.53	8.7	-9.03	-7.34
	標準誤	(12.41)	(10.25)	(11.54)	(8.89)	(7.46)	(7.19)
	差異(%)	-8.20		-8.91		-18.72*	
2003/02	平均數	12.49	11.91	12.21	11.45	-7.41	-6.36
	標準誤	(15.8)	(13.9)	(14.8)	(11.2)	(7.9)	(6.2)
	差異(%)	-6.73		-3.65		-14.17	
2003/03	平均數	11.08	10.01	8.42	7.18	-5.68	-3.98
	標準誤	(12.8)	(12.56)	(12.75)	(10.23)	(8.1)	(2.7)
	差異(%)	-5.91		-3.26		-29.93*	
2003/04	平均數	12.26	11.41	11.82	11.18	-6.27	-4.81
	標準誤	(11.77)	(9.77)	(10.26)	(10.12)	(6.9)	(5.94)
	差異(%)	-6.93		-5.41		-23.29*	
2003/05	平均數	13.62	12.99	11.3	11.15	-2.49	-1.53
	標準誤	(14.03)	(11.42)	(12.34)	(12.21)	(1.5)	(1.3)
	差異(%)	-4.63		-1.33		-38.55*	
2003/06	平均數	14.68	13.53	13.4	12.67	-6.49	-4.32
	標準誤	(7.4)	(6.3)	(8.2)	(7.6)	(5.9)	(5.2)
	差異(%)	-7.83		-5.45		-33.44*	

表3　GARCH演算法及BS的評價誤差－以月份分類 (續)

月份		RMSE		MAE		MPE(%)	
		BS	GARCH	BS	GARCH	BS	GARCH
臺指賣權							
2002/07	平均數	14.27	12.23	13.18	12.34	-9.18	-8.41
	標準誤	(12.43)	(11.67)	(10.36)	(10.04)	(10.7)	(9.42)
	差異(%)	-7.01		-6.37		-8.39	
2002/08	平均數	16.51	14.33	15.83	14.18	-7.36	-5.66
	標準誤	(14.26)	(13.76)	(14.59)	(13.19)	(6.9)	(4.3)
	差異(%)	-13.20		-10.42		-23.01*	
2002/09	平均數	14.81	13.89	13.95	13.38	-10.29	-8.82
	標準誤	(15.23)	(14.81)	(11.53)	(11.02)	(10.7)	(9.03)
	差異(%)	-6.21		-4.09		-14.29	
2002/10	平均數	15.28	13.48	14.72	13.22	-10.54	-8.32
	標準誤	(12.14)	(10.52)	(15.85)	(14.13)	(11.37)	(7.72)
	差異(%)	-11.78		-10.19		-21.06*	
2002/11	平均數	9.11	7.53	8.52	7.39	-7.53	-6.31
	標準誤	(10.05)	(8.74)	(8.94)	(8.25)	(5.6)	(4.4)
	差異(%)	-17.34*		-13.26		-16.20	
2002/12	平均數	16.25	14.67	15.83	14.32	-14.53	-11.62
	標準誤	(14.37)	(13.57)	(15.08)	(13.01)	(12.81)	(11.92)
	差異(%)	-9.72		-9.54		-20.03*	
2003/01	平均數	14.33	13.75	13.05	12.78	-8.33	-6.17
	標準誤	(10.59)	(9.38)	(8.87)	(8.59)	(8.03)	(7.27)
	差異(%)	-4.05		-2.07		-25.93*	
2003/02	平均數	14.62	14.02	14.48	13.92	-11.71	-9.62
	標準誤	(15.75)	(16.79)	(16.79)	(15.75)	(15.2)	(10.6)
	差異(%)	-4.10		-3.87		-17.85	
2003/03	平均數	16.92	14.71	16.32	13.82	-9.33	-8.7
	標準誤	(15.25)	(13.74)	(16.71)	(15.32)	(12.4)	(9.7)
	差異(%)	-13.06		-15.32		-6.75	
2003/04	平均數	12.98	11.86	11.65	11.13	-9.58	-8.89
	標準誤	(12.83)	(11.94)	(13.35)	(13.21)	(9.62)	(8.76)
	差異(%)	-8.63		-4.46		-7.20	
2003/05	平均數	19.99	18.25	19.65	17.99	-7.21	-5.42
	標準誤	(15.32)	(14.34)	(14.67)	(13.65)	(6.62)	(5.01)
	差異(%)	-8.70		-8.45		-24.83*	
2003/06	平均數	17.46	15.28	15.14	14.33	-7.98	-5.71
	標準誤	(15.73)	(14.73)	(15.89)	(14.47)	(5.14)	(4.55)
	差異(%)	-12.49		-5.35		-28.45*	

說明：“差異(%)”爲GARCH及BS平均誤差的百分比差異，若（差異%）爲負值即表平均而言GARCH的評價績效優於BS模型。“＊” 表示在5%之顯著水準下，GARCH評價法之評價績效顯著優於BS模型。

表4 GARCH與BS的評價誤差-以價內外程度分類

K/S_t		RMSE BS	RMSE GARCH	MAE BS	MAE GARCH	MPE(%) BS	MPE(%) GARCH	Wins
臺指買權								
全部樣本	平均數	18.66	16.14	16.57	13.31	-8.20	-6.48	0.7034*
	標準誤	(15.25)	(15.13)	(12.01)	(11.57)	(7.82)	(6.12)	
	差異(%)	-13.50		-19.67*		-20.97*		
<0.97 ITM	平均數	13.15	11.72	12.19	10.48	-6.93	-5.44	0.7819*
	標準誤	(13.72)	(12.28)	(14.21)	(1.57)	(6.28)	(5.13)	
	差異(%)	-10.87		-14.02		-21.55*		
0.97-1.03 ATM	平均數	18.81	18.04	18.68	17.17	-7.69	-6.75	0.6192*
	標準誤	(13.17)	(14.46)	(13.42)	(14.27)	(6.02)	(5.56)	
	差異(%)	-4.09		-8.08		-12.22		
>1.03 OTM	平均數	12.73	11.78	11.94	10.55	-7.49	-5.99	0.7286*
	標準誤	(11.32)	(10.27)	(11.56)	(10.38)	(6.35)	(5.61)	
	差異(%)	-7.46		-11.64		-20.02*		
臺指賣權								
全部樣本	平均數	16.94	15.21	15.59	13.37	-8.02	-6.64	0.7018*
	標準誤	(13.7)	(13.4)	(12.8)	(11.1)	(9.7)	(5.4)	
	差異(%)	-10.21		-14.24		19.02*		
<0.97 OTM	平均數	15.73	13.85	14.95	12.25	-8.32	-6.53	0.7423*
	標準誤	(14.1)	(13.7)	(12.7)	(10.5)	(8.1)	(7.5)	
	差異(%)	-11.95		-18.06*		-21.51*		
0.97-1.03 ATM	平均數	12.74	11.91	12.52	10.69	-5.69	-5.03	0.6372*
	標準誤	(14.7)	(12.8)	(12.5)	(10.4)	(5.8)	(5.2)	
	差異(%)	-6.52		-7.42		-11.60		
>1.03 ITM	平均數	18.58	16.63	17.80	15.63	-6.31	-4.54	0.7325*
	標準誤	(12.7)	(12.0)	(11.5)	(11.3)	(7.3)	(5.2)	
	差異(%)	-10.49		-12.19		-28.05*		

說明：本文以 (K/S_t) 衡量各選擇權交易資料在各交易日之價內外程度。“差異(%)” 爲GARCH及BS平均誤差的百分比差異，若 (差異%) 爲負值即表平均而言GARCH的評價績效優於BS模型。“*” 表示在5%之顯著水準下，GARCH評價法之評價績效顯著優於BS模型。*Wins*代表GARCH演算法理論價格比BS模型價格更接近市場價格的次數比例；我們檢定的虛無假設H_0：$Wins \leq 50\%$，“*” 表示在5%顯著水準內拒絕H_0，亦即GARCH演算法較接近市價的次數比例在50%以上。

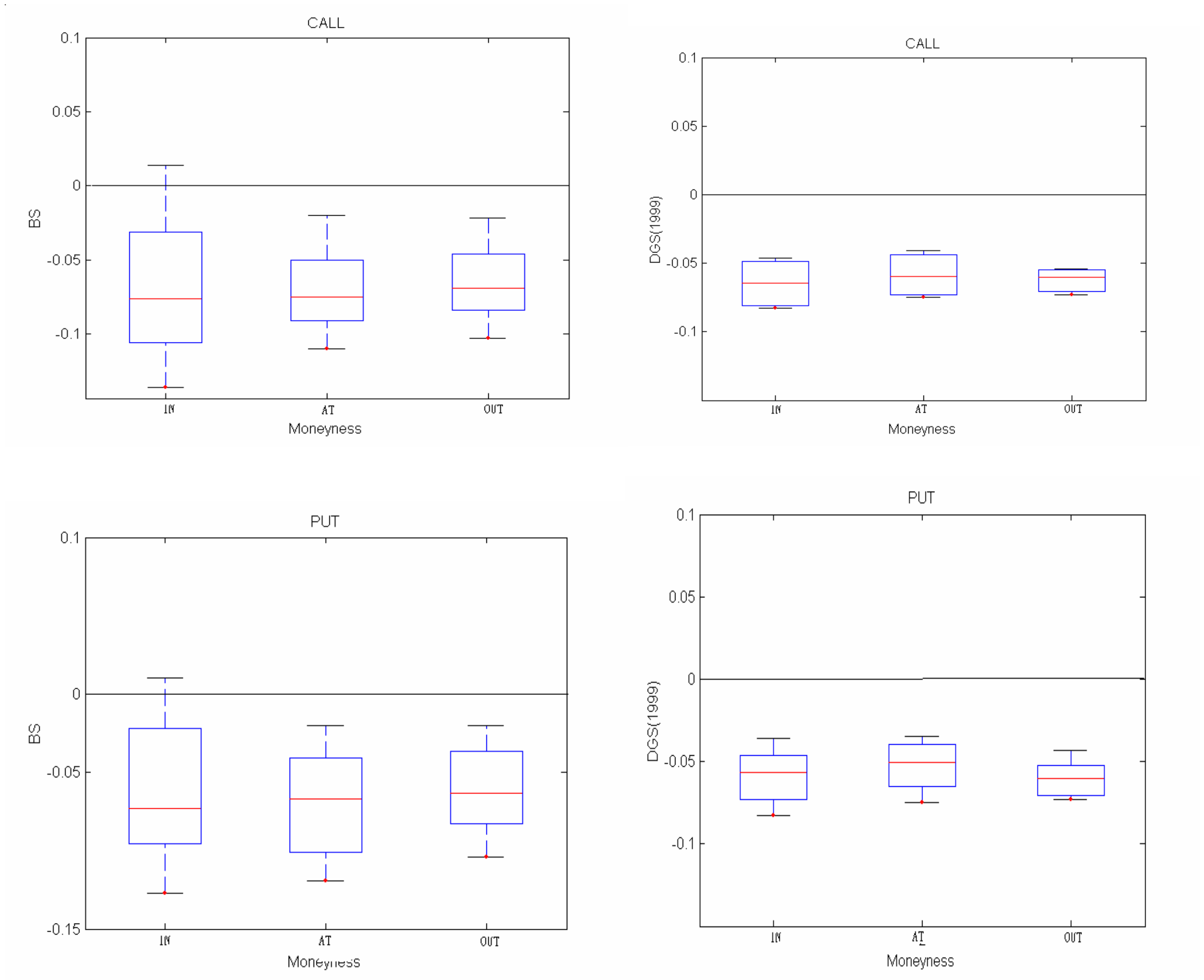

圖2　Gram-Charlier GARCH與BS對臺指選擇權的評價誤差箱型圖

說明：箱型圖中的水平線代表中位數 (median)，箱型圖的長度代表第一個及第三個四分位數的距離，而連接箱型圖的上、下影線即分別爲最大值及最小值與箱型圖間的距離。圖中顯示二評價模型皆系統性低估市場價格，而DGS (1999) Gram-Charlier GARCH演算法之評價誤差中位數與變異皆較小，顯示Gram-Charlier GARCH演算法評價績效較穩定。

其次，BS模型在評價上表現不佳可能是由於某些極端誤差 (outliers) 所造成的，因此我們記錄GARCH演算法理論價格較BS模型理論價格更接近市場價格的次數比例，亦即估計上相對接近市場實際價格的次數比例，以$Wins$代表此比例值，結果列於表4中。以臺指買權爲例，相較於BS模型，GARCH演算法較接近市價的次數比例在65%以上，平均爲72.34%。在5%顯著水準下，樣本結果皆拒絕虛無假設H_0：$Wins \leq 50\%$，亦即平均而言GARCH演算法的理論價較接近市價的次數比例在50%以上；臺指賣權也呈現同樣的結果。因此GARCH演算法的評價績效優於BS模型，這個結果與其他評價誤差指標的分析結果具有一致性。綜言之，本文以多種指標分析GARCH演

算法對臺指選擇權的評價績效，結果顯示Gram-Charlier GARCH選擇權演算法由於納入較高階動差的資訊，且以NGARCH模型傳遞異質變異的價格資訊，因此相對於BS模型其評價績較為優良。這個結果支持Duan and Zhang (2001) 與Heston and Nandi (2000) 對GARCH選擇權演算法的實證觀察。但是Gram-Charlier GARCH選擇權演算法仍然系統性低估臺指選擇權價格，這表示儘管GARCH模型有助於刻劃臺股指數的特性，但仍然無法完全捕捉其波動性過程，以致於GARCH演算法仍呈現不可忽略的評價誤差。

4.2 評價誤差之原因分析

基於上述實證結果，本節進一步探討造成模型理論價格與市價差異之原因。首先，本文分析標的資產的波動持續性4 (volatility persistence) 對Gram-Charlier GARCH選擇權演算法評價誤差造成的影響。Duan *et al*. (1999) 與Duan *et al*. (2003) 以標的資產的波動持續性解釋GARCH選擇權評價法之誤差，並以標的資產的GARCH模型參數計算 $\beta_2(1+(\lambda+c)^2)+\beta_1$ 值來衡量波動持續性，且以0.85為界，若 $\beta_2\left(1+(\lambda+c)^2\right)+\beta_1>0.85$ ，則將該標的資產歸類為高波動持續性的族群，反之則僅具有低波動持續性。Duan *et al*. (2003) 模擬發現當標的資產具有高度的波動持續性時，GARCH選擇權演算法的評價績效較差。我們觀察表2發現樣本期間內臺股指數各月份的波動持續性皆在0.85以上，顯示它們具有高度的波動持續性，這應是造成GARCH法對臺指選擇權評價誤差仍大的原因之一。

接著，根據Bakshi *et al*. (1997) 與Pena *et al*. (2002) 的分析架構，本文也採用線性迴歸模型分析理論價格之誤差百分比與各解釋變數的關係。我們考慮的六個變數分別是屬於選擇權本身的特性 (option specific) 或市場相關因素 (market dependent)，包括選擇權的存續期間、臺股指數日內波動性、臺股指數報酬率分配的偏態及峰態係數、選擇權的履約價格以及選擇權市場流動性。本文以全部期間的樣本資料分別對買權與賣權建構以下的迴歸模型:

$$PPD_t = b_0 + b_1\tau_t + b_2\sigma_t + b_3k_{3_t} + b_4k_{4_t} + b_5 lnK + b_6 SP_t + \varepsilon_t \qquad (18)$$

其中，PPD_t (percentage price difference) 是時點t時選擇權理論價與市價之百分比價差，即 $PPD_t=\frac{\hat{O}_t-O_t}{O_t}$ ，其中 $\hat{O}_t$ 與O_t分別為時點t時選擇權的理論價與市價， τ_t 為選擇權在時點t時的存續期間(年)。 σ_t 為在時點t時臺股指數報酬率之的年化日內波動性，我們先計算臺股指數交易日內每十五分鐘報酬率，再求其價格波動性，最後再予以年化而得。 k_3 及 k_4 分別為臺股指數報酬率之偏態與峰態係數，K為臺指選擇權的履約價格。 SP_t 是時點t時選擇權市場的流動性，我們以

4 若本期標的資產的價格波動性受前期波動性影響較大，而受新資訊影響較小時，則稱標的資產具有高波動持續性，反之則為低波動持續性。

選擇權的買賣價差 (relative bid-ask spread) 衡量流動性，亦即 $SP_t = (ask_t - bid_t)/O_t$ ，其中 ask_t 與 bid_t 分別代表選擇權在時點 t 時的賣價與買價，O_t爲時點 t 時選擇權市價。價差原因迴歸分析的結果整理於表5，由表中可清楚得知，迴歸模型的判定係數都在65%以上，且F值顯著，表示這六個解釋變數構成的迴歸模型對評價誤差有足夠的解釋能力[5]。

接著就個別解釋變數而言，相較於BS模型的評價誤差，臺股指數報酬率之偏態與峰態係數對Gram-Charlier GARCH演算法的評價誤差已經無顯著解釋能力，表示報酬率分配實際的偏態與峰態係數已經反映在Gram-Charlier GARCH演算法的評價績效上。然而日內波動性 σ_t 與市場流動性 SP_t 對GARCH演算法的評價誤差仍有顯著解釋能力。其中，日內波動性的係數顯著爲負數，表示經由歷史資料估計參數的GARCH模型仍然尚未能適切表達臺股指數的價格波動性，所以GARCH演算法的理論價格仍低估市價。此一結果意味著必須進一步探索臺股指數的價格過程，以瞭解其是否呈現跳躍特性，做爲發展跳躍模型、進而配適市場資料的實證基礎。因此就邏輯順序而言，本文的實證結果支持引入更複雜的跳躍模型來進行臺指選擇權的評價分析工作。Bakshi *et al.* (1997)、Pan (2002)、Anderson *et al.* (2002)、Eraker *et al.* (2003) 皆指出標的資產的

表5　理論模型價差百分比與解釋變數的迴歸模型

模型: $PPD_t = b_0 + b_1\tau_t + b_2\sigma_t + b_3k_{3_t} + b_4k_{4_t} + b_5 lnK + b_6SP_t + \varepsilon_t$

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	F值	$adj-R^2$
臺指買權									
GARCH	-3.3632	-2.5728	-6.6671	0.5247	-0.6740	3.5397	0.4225	64.45	0.7151
	(<0.0001)**	(<0.0001)**	(<0.0001)**	(0.1213)	(0.1523)	(0.0914)	(<0.0001)**	(<0.0001)**	
BS	-5.7654	3.6762	2.4844	0.3353	-0.4472	0.5398	0.2295	36.69	0.6503
	(0.0015)**	(<0.0001)**	(0.0245)*	(<0.0001)**	(0.0097)**	(<0.0001)**	(0.0016)**	(<0.0001)**	
臺 指 賣 權									
GARCH	1.0224	-0.2921	-2.9282	1.3397	-0.1095	-0.0851	0.4323	87.38	0.7563
	(0.0169)**	(0.6544)	(0.0097)**	(0.1402)	(0.5518)	(0.0622)	(<0.0001)**	(<0.0001)**	
BS	-8.9526	-0.5587	3.6917	-0.0509	0.2234	0.9319	0.1646	27.34	0.6467
	(<0.001)**	(0.3305)	(0.0009)**	(<0.0001)**	(<0.0001)**	(<0.0001)**	(0.0066)**	(<0.0001)**	

說明：PPD_t 是選擇權模型理論價與市價的百分比價差，τ_t 爲選擇權的存續期間(年)。σ_t 爲臺股指數日內波動性，k_3 及 k_4 分別爲臺股指數之偏態與峰態係數，K 爲臺指選擇權的履約價格。SP_t 是時點時選擇權市場的流動性。括號內爲 p-value，“ * ” 與 “ * * ” 分別代表 5%與 1%的顯著水準。$adj-R^2$ 爲調整後判定係數。

5　爲瞭解各解釋變數間是否存在共線性關係，我們分別計算各解釋變數間的相關係數，限於篇幅未予列出。其中，買權以履約價格與買賣價差的相關係數0.43絕對值最大，賣權則以標的資產波動性與偏態係數的相關係數-0.64絕對值最大。由於各解釋變數之間的相關係數絕對值皆小於原迴歸模型的判定係數，因此此複迴歸模型並無統計上的共線性現象。

跳躍風險溢酬 (jump risk premium) 是選擇權評價時不可忽視的因素。然而結合波動性跳躍與高階動差資訊的GARCH選擇權演算法發展未臻成熟，例如Duan *et al.* (2006) 提出GARCH-Jump模型同時考慮波動性跳躍與報酬率跳躍，然而並未考慮報酬率分配的高階資訊。而且在實際應用上有許多實證資料配適上的困難[6]，仍有待進一步突破。

其次，由於市場流動性與選擇權的存續期間以及履約價格有很大的相關性，因此本文於取樣時只選取距到期日介於21天到90天的契約，並剔除深度價內價外的樣本。然而迴歸分析結果仍指出市場流動性 SP_{it} 的係數仍然顯著爲正，顯示臺指選擇權的流動性顯著影響選擇權價值。本文樣本買權與賣權的買賣價差佔選擇權成交價的比重最大值分別爲118%與125%、最小值分別爲3.6%與 6.5%，而且隨著選擇權成交價越小，此比重越大；平均而言樣本買權與賣權的買賣價差分別約佔選擇權成交價的21.14 %與19.67%。臺指選擇權的買賣價差佔選擇權成交價的比重偏大，顯示臺指選擇權市場的流動性普遍不足，因此流動性效應 (liquidity effect) 是臺指選擇權評價時不可忽視的因素。這個實證結果支持我們亦應進一步發展考慮流動性效應的評價模型，並結合GARCH來進行臺指選擇權的評價分析工作。然而就作者所知，考慮流動性效應的評價模型發展亦未成熟，在實際應用上亦有待突破。

4.3 避險實證結果分析

在避險績效之衡量方面，本文參考Ferreira *et al*. (2005) 與Yung and Zhang (2003) 的作法，僅考慮實務上最常用的delta避險。我們假設投資人的現貨部位是持有一籃子股票現貨，且其系統風險貝他值接近一，必須買進臺指賣權來避險。我們觀察避險期間 (hedging horizon) 爲1日與5日，避險部位的總損益以一口賣權與相對應的臺股指數損益總和來計算。由於delta避險爲動態避險法，必須隨著選擇權delta值的改變而調整避險部位以達delta中立，此處每1日與每5日我們重新分別計算臺指賣權在Gram-Charlier GARCH選擇權演算法與BS模型之下的delta值，並據以調整股票的部位。臺指賣權delta值是賣權價格與臺股指數價格相對變化的比率，BS模型之下臺指賣權的delta值爲$N(d_1)$，而Gram-Charlier GARCH選擇權演算法之下臺指賣權的delta值估計式如下：

$$delta = \frac{\partial P}{\partial S} \cong \frac{\hat{P}_{t+\Delta t} - P_t}{\Delta S_t} \tag{19}$$

6　例如這些演算模型皆假設可以輕易求出標的資產價格波動性，實際上卻很難由標的資產價格的間斷資料中確切地過濾出波動性變數的過程；其次是目前的統計方法對跳躍模型參數的估計仍有相當大的誤差，而且同時考慮報酬率跳躍與波動性跳躍的隨機模型，就計量方法而言，參數仍是不易估計，且難以推導出封閉解。

其中 Δt 爲每次調整避險部位的間隔時間，P_t 是臺指賣權在時點t的市場價格，$\hat{P}_{t+\Delta t}$ 是臺指賣權在時點$t+\Delta t$ 以Gram-Charlier GARCH選擇權演算法估算的理論價格，ΔS 是間隔時間 Δt 內的臺股指數變動。避險投資投資組合在時點t的總價值爲 $V(t) = P_t - delta \cdot S_t$，其中 P_t 是賣權在時點t的價格，S_t 和 $-delta$分別是臺股指數在時點t的價格及股數。則此避險投資組合在下一期($t+\Delta t$)的獲利爲：$V(t+\Delta t) - V(t) = P_{t+\Delta t} - P_t - delta(S_{t+\Delta t} - S_t) - r_t \Delta t(P_t - delta \cdot S_t) - delta \cdot D_{\Delta t}$，其中$r$爲市場無風險利率，$D_{\Delta t}$ 爲避險期間 Δt 內股票現貨部位預期收到的股利。理論上避險組合的損益 $V(t+\Delta t) - V(t)$ 應爲零，若異於零則是模型不佳所造成的避險誤差。

爲探討Gram-Charlier GARCH選擇權演算法應用於臺指選擇權的避險結果，以及相對於BS模型的績效，我們紀錄每個臺指賣權樣本在存續期間內分別以 Gram-Charlier GARCH演算法與BS模型進行delta避險的避險誤差，並計算平均避險誤差 (mean hedging error, MHE)，避險誤差的絕對值 (absolute hedging error, AHE) 以及相對於賣權市價 P_t 的避險誤差絕對值百分比 (mean percentage absolute hedging error, MAPE)。茲將GARCH演算法及BS模型之避險績效列於表6，其

表6　GARCH演算法與BS模型的delta避險績效

K/S_t	1日避險		5日避險	
	BS	GARCH	BS	GARCH
平均避險誤差(MHE)				
<0.94	-0.7145	-1.4702*	-2.4313	-3.7935*
0.94-0.97	-0.7130	-1.2208*	-2.7217	-4.3655*
0.97-1.00	-0.6855	-1.1274*	-2.3002	-3.6332*
1.00-1.03	-0.5838	-0.9033*	-2.3138	-3.5109*
1.03-1.06	-0.5963	-0.8336	-2.4876	-3.2364
>1.06	-0.5396	-0.6531	-2.3175	-3.0813
全部樣本	-0.6110	-0.9798*	-2.4089	-3.5765*
避險誤差絕對值(AHE)				
<0.94	3.0469	2.9227	3.5626	3.6743
0.94-0.97	2.5979	2.8891	3.7803	4.0586
0.97-1.00	2.2979	2.5072	3.8894	4.5189*
1.00-1.03	2.1280	2.8168*	3.7313	4.4002*
1.03-1.06	2.2332	2.7241*	3.6173	3.9284
>1.06	1.7423	2.3534*	2.6636	2.9461
全部樣本	2.8104	2.7356	3.5722	3.9866
避險誤差絕對值百分比(MAPE)				
<0.94	0.0275	0.0349	0.0768	0.1221*
0.94-0.97	0.0214	0.0453*	0.0926	0.1491*
0.97-1.00	0.0375	0.0421	0.1382	0.1591
1.00-1.03	0.0400	0.0433	0.1239	0.1631*
1.03-1.06	0.0473	0.0773*	0.1575	0.1774
>1.06	0.0760	0.0965*	0.1856	0.2020
全部樣本	0.0453	0.0576	0.1679	0.1830

說明：本文以(K/S_t)衡量各選擇權交易資料在各交易日之價內外程度。統計檢定的虛無假設是 H_0：GARCH 演算法的避險誤差等於 BS 模型的避險誤差。其中“ * ”代表在 5%的顯著水準之下，GARCH 演算法的避險誤差顯著異於 BS 模型的避險誤差。

中分別是避險誤差的MHE、AHE與MAPE，且將避險誤差的AHE與MAPE繪圖於圖3。其中，MHE指標雖然會使誤差資料的正負值相抵，但是其優點在於可以觀察模型是否有系統性偏誤，我們由表6發現MHE指標皆為負數，顯示GARCH演算法及BS模型的避險結果皆有避險不足的系統性偏誤。可能的理由是如Bakshi *et al.* (2000) 所指出，實際上指數賣權的價格走勢與臺股指數的價格走勢並非如理論所預期，仍有相當大的基差風險 (basis risk)，因此指數賣權並非適當的避險工具，所以避險績效並不佳。然而BS模型的避險誤差較小，而且在5%的顯著水準下，BS模型之避險績效顯著優於GARCH演算法。其次由表6與圖3的AHE指標可以看出：不論是1日避險或5日避險，除了深度價外 (K/S_t <0.94) 的群組外，BS模型之避險績效均優於GARCH演算法；MAPE指標亦同樣支持BS模型避險績效的優越性。

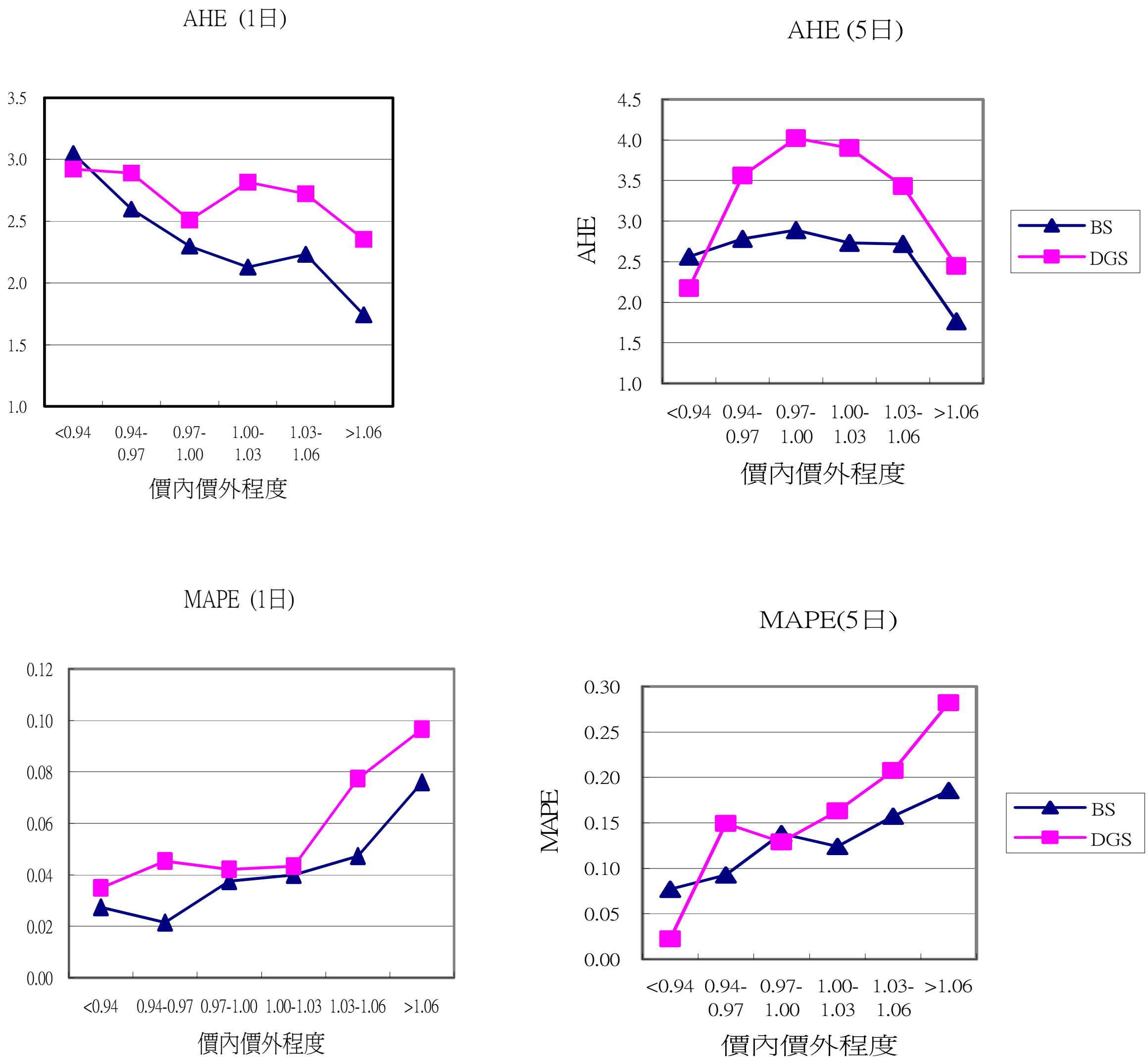

圖3　避險誤差絕對值(AHE)與避險誤差絕對值百分比(MAPE)

說明：Gram-Charlier GARCH演算法及BS模型在各不同價內外程度(K/S_t)下之避險誤差AHE與MAPE。圖中顯示BS模型的避險誤差相對較小

這個結果與Dumas *et al*. (1998)、Lam *et al*. (2002) 與Yung and Zhang (2003) 的實證結果一致：一個較為簡單且較一般化的評價模型有較佳的避險績效。本文所採用Gram-Charlier GARCH選擇權演算法儘管考慮了報酬率分配的偏態係數與峰態係數之後，對選擇權呈現較優異的評價績效；然而偏態與峰態係數並非常數，亦有其期間結構的變化特性，特別是Singleton and Wingender (1986) 與Fiorentini *et al.* (2002) 皆指出報酬率分配的偏態係數對於取樣時間長短 (time interval) 非常敏感。因此我們每次估計delta值時，偏態係數可能有大幅變化，因而影響Gram-Charlier GARCH選擇權評價法對delta值估計的準確性與避險績效，我們推測這是造成Gram-Charlier GARCH選擇權評價法避險績效不佳的原因；而簡單的BS模型反而有較準確的delta估計值與較好的避險績效。

5. 結論與建議

本文將Gram-Charlier GARCH選擇權演算法應用於臺灣期交所的臺指選擇權契約，並與BS模型公式解的評價結果相比較，藉以瞭解GARCH選擇權演算法的評價與避險績效。臺指選擇權市場資料的配適結果證實臺股指數價格報酬率的確具有異質變異性、非常態分配以及波動性不對稱等性質，而且這些性質確實會影響臺指選擇權的價值。由於BS模型採取不符合市場資料特性的假設，本文實證結果亦顯示BS模型的評價績效不佳；而Gram-Charlier GARCH選擇權演算法考慮臺股指數報酬率分配實際的高階動差值，兼以NGARCH過程捕捉臺股指數報酬率的異質變異性以及波動不對稱等性質，的確可以減少對臺指選擇權的評價誤差。同時，由於GARCH選擇權演算法納入較多即時的標的資產價格資訊，因此其評價績效相對較為穩定。

本文的結果發現Gram-Charlier GARCH演算法雖然有助於提高評價績效，但是仍然呈現明顯的評價誤差。迴歸分析的結果顯示GARCH演算法產生評價誤差的原因，除了選擇權的價內外程度、存續期間之外，臺股指數的日內波動性與選擇權市場的流動性也有顯著的解釋能力。這個配適結果的涵義為引入不對稱的NGARCH模型加上高階動差值資訊，對於刻劃臺股指數的價格過程仍有不完全之處。我們建議後續研究可以進一步納入股價指數的跳躍特性與市場流動性，並結合GARCH過程來配適臺股指數資料，以提高理論評價模型的準確性。最後，避險績效檢測的結果顯示，Gram-Charlier GARCH演算法應用在delta避險時會發生系統性偏差，簡單的BS模型反而有相對較優的避險績效，其原因可能是高階動差值期間結構的變異性會影響該演算法對選擇權delta值估計的準確性，進而減損其避險績效。

參考文獻

巫春洲，「認購權證價格行爲之時證研究」，管理學報，第十九卷第四期，民國91年，759-779頁。

周雨田，李志宏、巫春洲，「台灣期貨對現貨市場的資訊傳遞效果分析」，財務金融學刊，第十卷第二期，民國91年，1-22頁。

周雨田、巫春洲、劉炳麟，「動態波動模型預測能力之比較與實證」，財務金融學刊，第十二卷第一期，民國93年，1-25頁。

周恆志，巫春洲，「Edgeworth GARCH 選擇權演算法的實證與應用」，證券市場發展季刊，第十七卷第四期，民國94年，158-190頁。

陳宜廷，「區別臺灣股價指數報酬率之GARCH競爭模型」，經濟論文，第三十一卷第三期，民國92年，369-405頁。

Aggarwal, R. and Rao, P., "Institutional Ownership and Distribution of Equity Returns," *The Financial Review,* Vol. 25, 1990, pp. 211-229.

Anderson, T., Benzoni, L., and Lund, J., "An Empirical Investigation of Continuous-time Equity Return Model," *Journal of Finance*, Vol. 57, 2002, pp. 1239-1284.

Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., "Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction?" *Journal of Financial Studies,* Vol. 13, 2000, pp. 549-584.

Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z., "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance,* Vol. 52, 1997, pp. 2003-2049.

Black, F. and Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 1973, pp. 637-659.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,* Vol. 31, 1986, pp. 307-327.

Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F., "ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics,* Vol.52, 1992, pp. 5-59.

Corrado, C. J. and Su, T., "Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices," *Journal of Financial Research,* Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 175-192.

Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M., "Option Pricing : A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics,* Vol. 7, No. 3, 1979, pp. 229-263.

Duan, J.-C., Ritchken, P., and Sun, Z., "Approximating GARCH-Jump Models, Jump-Diffusion Processes, and Option Pricing," *Mathematical Finance,* Vol. 16, No. 1, 2006, pp. 21-52.

Duan, J.-C., Gauthier, G., Sasseville, C., and Simonato J.G., "Approximating the GJR-GARCH and EGARCH Option Pricing Models Analytically," *Journal of Computational Finance,* 2006, (Forthcoming).

Duan, J.-C., "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance, Vol.* 5, 1995, pp. 13-32.

Duan, J. C. and Simonato, J.G., "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices," *Management Science,* Vol. 44, 1998, pp. 1218-1233.

Duan, J.-C., Gauthier, G., and Simonato, J. G., "An Analytical Approximation for the GARCH Option Picing Model," *Journal of Computational Finance,* Vol. 2, 1999, pp. 75-116.

Duan, J.-C., Gauthier, G., Simonato, J. G., and Sasseville, C., "Approximating American Option Prices in the GARCH Framework," *Journal of Futures Markets*, Vol. 23, No. 10, 2003, pp. 915-929.

Duan, J.-C. and Simonato, J. G., "American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain Approximation," *Journal of Economic Dynamics and Control,* Vol. 25, No. 11, 2001, pp. 1689-1718.

Duan, J.-C. and Zhang, H., "Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach," *Journal of Banking and Finance,* Vol. 25, No. 11, 2001, pp. 1989-2014.

Dumas, B., Fleming, J., and Whaley, R. E., "Implied Volatility Functions: Empirical Tests," *Journal of Finance,* Vol. 6, 1998, pp. 2059-2106.

Engle, R., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica,* Vol. 50, 1982, pp. 987-1108.

Engle, R. and Ng, V., "Measuring and Testing of the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance,* Vol. 48, 1998, pp. 1749-1778.

Eraker, B., Johannes, M., and Polson, N., "The Impact of Jumps in Volatility and Returns, *Journal of Finance*, Vol. 58, 2003, pp. 1269-1300.

Ferreira, E., Gago, M., Leon, A., and Rubio, G., "An Empirical Comparison of the Performance of Alternative Option Pricing Models," Investigaciones Económicas, Vol. 29, No. 3, 2005, pp. 483-523.

Fiorentini, G., Leon, A., and Rubio, G., "Estimation and Empirical Performance of Heston's Stochastic Volatility Model: the Case of a Thinly Traded Market," *Journal of Empirical Finance,* Vol. 9, 2002, pp. 225-255.

Hanke, M., "Neural Network Approximation of Option Pricing Formulas for Analytically Intractable Option Pricing Models," *Journal of Computational Intelligence in Finance,* Vol. 5, 1997, pp. 20-27.

Harvey, C. and Whaley, R., "Market Volatility Prediction and the Efficiency of the S&P 100 Index Option Market," *Journal of Financial Economics*, Vol. 31, 1992, pp. 43-73.

Heston, S. and Nandi, S., "A Closed-form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies,* Vol. 13, 2000, pp. 585-625.

Jarrow, R. and Rudd, A., "Approximate Options Valuation for Arbitrary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics,* Vol. 10, No. 3, 1982, pp. 347-369.

Karanasos, M. and Kim, J., "Moments of the ARMA–EGARCH Model," *Econometrics Journal*, Vol. 6, No. 1, 2003, pp. 146-166.

Kassimatis, K., "Financial Liberalization and Stock Market Volatility in Selected Developing Countries," *Applied Financial Economics*, Vol. 12, No. 6, 2002, pp. 389-394.

Lam, K., Chang, E., and Lee, M.C., "An Empirical Test of the Variance Gamma Option Pricing Model," *Pacific-Basin Finance Journal,* Vol. 10, 2002, pp. 267-285.

Merton, R., "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics,* Vol. 3, 1976, pp. 125–144.

Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new approach," *Econometrica,* Vol. 59, 1991, pp. 347-370.

Pan, J., "The Jump-risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-series Study," *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, 2002, pp. 3-50.

Pena, J., Rubio, G., and Serna, G., "Smiles, Bid-Ask Spreads and Option Pricing," *European Financial Management*, Vol. 8, No. 4, 2002, pp. 495-513.

Ritchken, P. and Trevor, R., "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Process," *Journal of Finance,* Vol. 54, 1999, pp. 337-402.

Rubinstein, M., "Edgeworth Binomial Trees," *Journal of Derivatives,* Vol. 5, 1998, pp. 20-27.

Singleton, J. C. and Wingender, J., "Skewness Persistence in Common Stock Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 21, 1986, pp. 335-341.

Yung, H. and Zhang, H., "An Empirical Investigation of the GARCH Option Pricing Model: Hedging Performance," *Journal of Futures Market,* Vol. 23, No. 12, 2003, pp. 1191-1207.