

二維原物料切割決策支援系統之設計

The Design of a 2D Stock Cutting Decision Support System

蔡榮發 Jung-Fa Tsai 黃曜輝 Yao-Huei Huang
國立台北科技大學商業自動化與管理研究所

Institute of Commerce Automation and Management, National Taipei University of
Technology

(Received June 16, 2006; Final Version January 15, 2007)

摘要：本研究主要設計一二維原物料切割決策支援系統，以輔助製造業之原物料切割，如玻璃、木板、鋼板、紙張等。運用所建構之數學模式可求得最佳的原物料切割生產方式，以提高原物料使用率及降低生產成本。此系統的設計，主要由二個子系統所組成，分別為：(1)切割組合分析子系統及(2)最佳化訂單生產分析子系統。切割組合分析子系統在找尋可能的切割組合並且加以驗證是否可行，而最佳化訂單生產分析子系統，利用切割組合分析子系統所記錄的可行切割組合計算出最佳的生產組合並且保證達最少原物料的使用量。本系統之設計，不僅提供原物料切割生產之決策支援，更可提高產品之競爭力。除了提供決策數據，本系統也設計圖形化介面以提高系統的實用性。

關鍵詞：原物料切割、決策支援系統

Abstract : This study is to design a 2D-stock cutting decision support system. The system can be applied in various manufacturing industries such as glass, wood, steel, paper etc. The formulated mathematical model is solved to find the best way of cutting and manufacturing and therefore increasing the utilization of the material and reducing the production cost. The system includes two

* 本研究感謝國科會計畫NSC-95-2416-H-027-006的研究經費補助。

subsystems: (1) The cutting combination analytic subsystem; (2) The production analytic subsystem. The cutting combination analytic subsystem is to generate possible cutting combinations and exam the feasibility of the cutting combinations. The production analytic subsystem is to find the best production combinations according to the feasible cutting combinations and minimize the utilization of raw materials to meet the order quantities of the products. The system could not only provide assistance to decision making on manufacturing but also increase the competitiveness of the product. Moreover, the graphical presentations of the cutting combinations are also presented to enhance the usefulness and applicability.

Keywords : Stock Cutting, Decision Support System

1. 緒論

原物料切割問題普遍存在於製造產業，例如：玻璃或紙張生產業者，必須從標準尺吋的原物料中進行適當產品切割以滿足客戶需求。切割方法良窳，會直接影響原物料的使用率並間接轉變為成本問題，而原物料成本的提高，會造成業者利潤下降，導致市場競爭力降低。

過去製造業者往往依據經驗法則進行原物料切割，此舉常造成原物料的切割浪費而不自知。近觀微利時代，業者彼此相互競爭，成本的高低將直接影響企業的獲利與競爭力，爲了提升原物料的使用率，業者也積極嘗試使用各種演算法來減少原物料浪費。根據過去文獻資料，在處理切割相關問題有二種方法，(1)啓發式 (Heuristic) 演算法與(2)確定性 (Deterministic) 方法。無論採用哪種方法，都以提高原物料使用率爲目的，而差異在於求解的品質與處理問題的時間。啓發式演算法可以在設定的時間內找出問題解答，但無法保證是否爲最佳解，爲了改善啓發式演算法的求解品質，建構完整的全域搜尋空間之數學規劃方法亦陸續出現，然而，爲了找尋最佳解，也因此需花費較長的時間進行求解，但保證計算的結果可以是一組最佳解。

實際上，二維切割問題會隨著產品種類、物件尺吋、形狀與擺設方向而衍生不同的問題，因此，若全盤考量現實狀況，其複雜度也會相對提高。Chen *et al.* (1993) 首先建構整數規劃模式求解二維物件排列組合問題，此模式可應用於長方體棧板裝載問題或紙張、木板及鋼板切割問題等；之後，Li and Chang (1998)、Li and Tsai (2001) 與Li *et al.* (2002) 分別提出改良模式，試圖使用較少的變數與限制式，以提高模式求解效率，並讓計算結果更加逼近於全域最佳解。由於二維切割問題之數學規劃模式的求解時間冗長，爲了在有效時間內處理這類型大規模問題，求解此問題之各種啓發式演算法也因應而生，例如：策略演算法（優選左下角(Bottom-Left) 位置，從不限定長度的矩形鋼板中，切割二維多邊形的方法）(Dowland *et al.*, 2002) 以及應用此

策略加入基因演算法進行求解之方法 (Jakobs, 1996; Liu and Teng, 1999), 但這些方法往往容易落入一個區域最佳解, 甚至, 只是一可行解 (Beasley, 2004; Fayard and Zissimopoulos, 1995; Hifi and Ouafi, 1997)。由於啟發式方法可在有效時間內求得一組較佳的可行解, 故大規模問題, 如晶圓切割 (Chien *et al.*, 2001) 以及貨櫃裝填 (Chien and Deng, 2004) 等問題大多採用此法求解。

啟發式演算法速度快的主要原因在對問題的定義缺乏完備性, 因此犧牲了求解的品質。而確定性方法對問題有較完整的定義, 所以計算結果有較優的品質。二種方法的選用, 可視問題特性與規模大小而決定。表1列示確定性方法與啟發式演算法的優、缺點。

二維原物料切割問題通常需考量產品訂購數量, 以進行最佳化原物料切割生產 (Holthaus, 2002; Labbe *et al.*, 1995; Scholl *et al.*, 1997)。這一類型研究, 所探討的不外乎是在訂購數量變動下, 計算均衡的員工分配工作量或者是在滿足訂單情況下, 尋求最低的生產成本為目標。本研究將運用確定性之數學規劃模式, 計算滿足不同訂單需求之原物料最少使用數量, 並建構一決策支援系統以圖形化介面呈現計算結果。

所設計之二維原物料切割決策支援系統, 將嵌入數學軟體 (Lingo) 並結合程式語言 (Java) 以建構此系統, 提供決策數據做為切割生產的參考依據。此系統包含二大功能。其中一項功能在處理二維原物料矩形切割生產問題, 系統的操作, 允許決策者輸入單一原物料尺寸及欲切割產品尺寸與需求數量, 接著會透過數學規劃模式計算以取得切割生產數據; 另一項功能是提供單一瑕疵原物料之矩形切割, 目的在維持切割產品的品質。最後, 也以實例說明並驗證所開發系統之實用性與可行性。

本文之下一章將探討原物料切割生產模式, 接著說明所開發系統之演算法與架構, 第四章會用實例描述系統操作方式並驗證所建構之模式與系統之正確性, 第五章則包含結論。

2. 數學模式建構

本研究運用「找尋最大化面積組合」、「矩形排列最佳化」與「生產最佳化」三個數學模式, 求解最佳原物料切割生產方式, 以下對上述三個數學模式, 分別說明如下。

2.1 找尋最大化面積組合

找尋最大化面積組合的目的在讓單一原物料的使用率達最大, 其數學模式及符號意義表示如下:

(l_0, w_0) : 原物料 (大矩形) 尺寸。

(l_z, w_z) : 切割的矩形尺寸, $z = 1, 2, \dots, Z$ 。

q_z^t : 第 z 個矩形在第 t 次的計算所產生的切割數量, $t = 1, 2, \dots, T$, $z = 1, 2, \dots, Z$ 。

Z : 表示要切割的不同矩形數量共有 Z 種。

表1 確定性方法與啟發式演算法之比較

方法	優點	缺點	適用範圍 (產業範例)
確定性方法	可以保證求解品質	複雜度高求解速度慢	小規模切割問題(玻璃、LCD)
啟發式演算法	求解速度快	無法保證求解品質	大規模切割問題(晶圓切割、貨櫃裝箱)

T ：表示相同目標值下之不同切割組合。

(Model_1)

$$\text{Max} \quad \sum_{z=1}^Z q_z^t (l_z w_z) \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{z=1}^Z q_z^t (l_z w_z) \leq l_0 w_0 \quad (2)$$

$$\sum_{z=1}^Z |q_z^{t+1} - q_z^t| \geq 1 \quad (3)$$

where q_z^t 、 $q_z^{t+1} \in$ 非負整數。

此數學模式的目標式(1)，在找出面積最大的可能切割組合。限制式(2)表示欲切割矩形面積總合不得超過此一原物料面積。由於不同的切割組合可能有相同的目標函數值，也就是可能有多重解的情況發生，故限制式(3)之目的在找出相同原物料面積下可能產生的多重解， $(q_1^t, q_2^t, \dots, q_Z^t)$ ， $t = 1, 2, \dots, T$ ， T 表示多重解之次數。

2.2 矩形排列最佳化

矩形排列問題，是在一較大的矩形內擺置一組給定的不同大小矩形，而讓大矩形的面積使用率最大，亦即浪費的面積最小。換句話說，就是在這一個大矩形內切割出最多小矩形，此模式主要用於驗證Model_1所找的排列組合是否為一可行解。依Li and Chang (1998) 提出之矩形排列最佳化數學模式，其符號意義與完整數學模式表示如下：

(p_i, q_i) ：表示第*i*個矩形的長邊(p_i)及短邊(q_i)且皆為常數， $i = 1, \dots, N$ 。

(x'_i, y'_i) ：記錄第*i*個矩形中心座標點， $i = 1, \dots, N$ 。

(x, y) ：表示求解之原物料(大矩形)面積範圍。

s_i ：表示第*i*個矩形擺設的方位，若 $s_i = 1$ ，則 p_i 平行於*x*軸，反之則平行於*y*軸， s_i 為0-1變數。

M ：表示為一極大常數值。

N ：表示矩形個數。

u_{ik}, v_{ik} ：為0-1變數，表示兩兩矩形擺設之相對位置 (如圖1所示)。

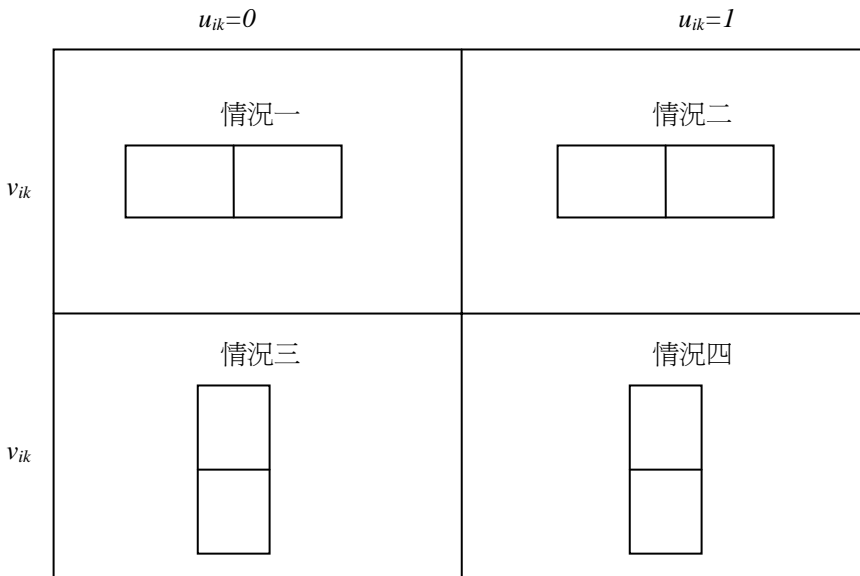


圖 1 變數 (u_{ik}, v_{ik}) 使用示意圖 (Li and Chang, 1998)

(Model_2)

$$\text{Min } xy \tag{4}$$

subject to

$$(x'_i - x'_k) + u_{ik}M + v_{ik}M \geq \frac{1}{2} [p_i s_i + q_i (1 - s_i) + p_k s_k + q_k (1 - s_k)] \tag{5}$$

$$(x'_k - x'_i) + (1 - u_{ik})M + v_{ik}M \geq \frac{1}{2} [p_i s_i + q_i (1 - s_i) + p_k s_k + q_k (1 - s_k)] \tag{6}$$

$$(y'_i - y'_k) + u_{ik}M + (1 - v_{ik})M \geq \frac{1}{2} [p_i (1 - s_i) + q_i s_i + p_k (1 - s_k) + q_k s_k] \tag{7}$$

$$(y'_k - y'_i) + (1 - u_{ik})M + (1 - v_{ik})M \geq \frac{1}{2} [p_i (1 - s_i) + q_i s_i + p_k (1 - s_k) + q_k s_k] \tag{8}$$

$$y \geq y'_i + \frac{1}{2} [p_i (1 - s_i) + q_i s_i], \quad i=1,2,\dots,N \tag{9}$$

$$x \geq x'_i + \frac{1}{2} [p_i s_i + q_i (1 - s_i)], \quad i=1,2,\dots,N \tag{10}$$

$$y'_i - \frac{1}{2}[p_i(1-s_i) + q_i s_i] \geq 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (11)$$

$$x'_i - \frac{1}{2}[p_i s_i + q_i(1-s_i)] \geq 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (12)$$

$$u_{ik}, v_{ik}, s_i \in \{0,1\} \text{ 且 } i < k \quad (13)$$

$$x, y, x'_i, y'_i \geq 0 \text{ for all } i \quad (14)$$

目標式(4)在追求最小面積的使用。限制式(5)~(8)表示所有的矩形彼此不能重疊。限制式(9)~(12)表示所有的小矩形擺放在大矩形的範圍內。

2.3 生產最佳化

生產最佳化模式主要計算在滿足訂購需求數量下，切割不同矩形所需使用最少之原物料數量，藉由通過Model_2驗證所得可行切割組合 (F 筆)，可建構其數學模式，所使用符號說明如下：

o_z ：第 z 個矩形所需切割數量， $z = 1, 2, \dots, Z$ 。

g_f ：第 f 筆可行切割組合需切割數量， $f = 1, 2, \dots, F$ 。

F ：重複執行Model_1與Model_2後，所得之可行切割組合筆數。

q_{zf} ：第 z 個矩形在第 f 筆可行切割組合的數量， $z = 1, 2, \dots, Z$ ， $f = 1, 2, \dots, F$ 。

(Model_3)

$$\text{Min} \quad \sum_{f=1}^F g_f \quad (15)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{z=1}^Z \sum_{f=1}^F q_{zf} g_f \geq o_z \quad (16)$$

where $g_f \in$ 非負整數。

目標式(15)在追求最少的原物料（大矩形）使用量，限制式(16)則在滿足不同尺寸小矩形之需求數量下，計算各個可行切割組合需使用之原物料數量。

以上所提三種模式將整合於所設計之演算法中以建構原物料切割決策支援系統，並於第四章用一實例做詳細說明。

3. 系統設計

本章節說明所設計之原物料切割決策支援系統，利用數學規劃軟體Lingo 9.0與Java開發軟體JBuilder 2005做為系統開發工具。

藉由數學軟體Lingo元件的支援，本系統的開發包含二大功能，(1)處理矩形原物料切割問題；(2)處理瑕疵矩形原物料之切割問題，目的在維持切割產品的品質並達原物料最高使用率。

3.1 矩形原物料切割問題

為求原物料最大使用率並在一塊原物料中切割出最多的需求小矩形，使用者需先輸入一組原物料(大矩形)尺吋(長與寬)以及欲從原物料中進行切割較小不同矩形的尺吋與數量。

3.1.1 矩形原物料切割方法

以最大化面積使用率 (Model_1) 的概念來找尋可能的矩形切割組合，進一步由矩形排列最佳化數學模式 (Model_2) 來進行驗證並且記錄可行的切割組合，直到停止條件成立(當Model_1找到的切割組合數為零或當所有的可能批次切割生產皆出現過時)，再利用生產最佳化模式 (Model_3)，從驗證可行的組合記錄中，計算最少原物料使用量並且滿足不同尺吋小矩形需求數量，此方法之流程如圖2所示。

3.1.2 演算法

依原物料切割方法之流程，建構此系統的演算法敘述如下：

Begin.

Input: $(l_0, w_0), (l_z, w_z), o_z$, for $z=1,2,\dots,Z$ //輸入原物料尺吋；切割產品尺吋及數量

Process:

Obj = $l_0 w_0$ //預設目標初始值(Model_1的第1個限制式的右邊值)

Count=0 //計算每種類型的批次切割是否皆已發生的變數值

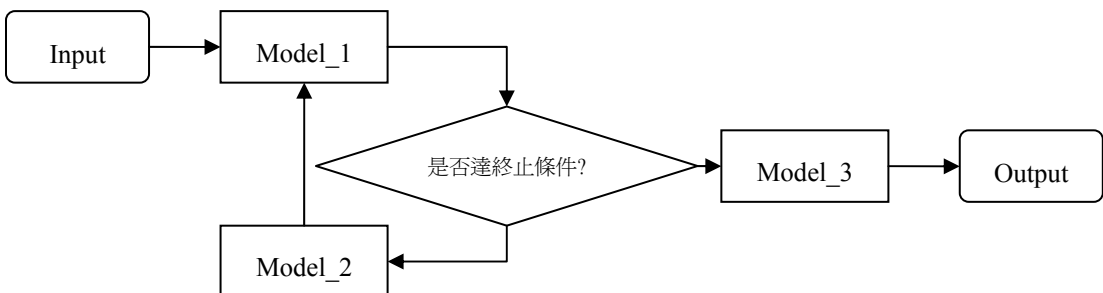


圖2 矩形原物料切割方法流程圖

```

Bcount=0 //計算批次切割是否發生的變數值
PB=1 //記錄面積最大的切割產品的輸入位置
f = 0 //記錄可行解資料筆數
Binary_Array[z]=0, for z=1,2,...,Z //判定是否為批次切割解的一維陣列變數
Do_2
  t=0,  $q_z^t = 0$ , for z=1,2,...,Z //記錄Model_1找到的可能切割組合變數
  Do_1
    Step 1: Run Model_1 //找尋可能的切割組合
    {To find  $q_z^t$  for z = 1,2,...,Z }
    Step 2: //跳離迴圈_1的條件
    {
      If(Count=Z) //當每一種批次切割皆已發生一次
      {
        PB=1
        If(  $(l_z, w_z) > (l_{PB}, w_{PB})$  ) PB=z, for z = 2,...,Z
          //記錄最大切割尺吋的資料輸入順序位置
        Bcount=0
        tempPB=0
        If(  $q_z^t < 0$ , for z = 1,...,Z )
        {
          Bcount++
          tempPB=z
        } //當批次切割情況發生時Bcount=1並且記錄批次發生的位置
        If(Bcount=1 & tempPB=PB)
        {
          Count++
          Break
        } //如果  $q_z^t$  為批次切割解並且為  $(l_z, w_z)$  中最大的尺吋則跳離迴圈_1
      }
      If(  $q_z^t \leq q_{zf}$  for z = 1,2,...,Z, f = 1,2,...,F )
      {

```



```

    delete  $q_z^t$ 
    Break
}
}
Step 3: Run Model_2 //驗證切割組合的可行性
{
  If(Model_2 =Feasible)
  {
    Count=0
    Record the cutting combination set
     $f++$ 
    If( $q_z^t < 0$ , for  $z = 1, \dots, Z$ )
    {
      Bcount++
      tempPB=z
      //當批次切割情況發生時Bcount=1並且記錄發生的位置
      If(Bcount=1)Binary_Array[tempPB]=1
      If(Binary_Array[i]>0 for  $i=1, \dots, Z$ ) Count ++
      //當Count=Z時，每一種批次切割皆已發生
       $t++$  //記錄下一筆相同目標值的記錄
    }
    Else{delete  $q_z^t$  }
  }
}
While_1(The objective value of Model_1=Obj)
Obj=The new objective value of Model_1
 $t = 0$ 
While_2 (Obj>0 & count<=Z)
If( $f > 0$ ) //當有驗證可行的切割組合存在
{
  Step 4: Run Model_3 //計算最佳化生產方式及圖形化結果顯示
}
End.

```

3.1.3 系統架構

此矩形原物料切割方法之系統架構是由切割組合分析子系統 (Model_1+Model_2) 找尋並記錄驗證可行的切割組合，再經訂單處理分析子系統 (Model_3) 計算出滿足訂單情況下，需使用原物料之最少數量。各子系統在建構完整的Lingo數學模式並交由Lingo元件 (Lingo90.jar) 執行並且記錄所有可行解的詳細數據 (純文字檔)，以圖3表示此系統的架構。

3.2 瑕疵矩形原物料之切割問題

在二維原物料切割問題中，若原物料有瑕疵點，將影響產品品質，為了解決這種問題，本研究改良了3.1節的切割組合分析子系統，在程式輸入階段，加入已知的瑕疵點及改變程式運算終止條件。

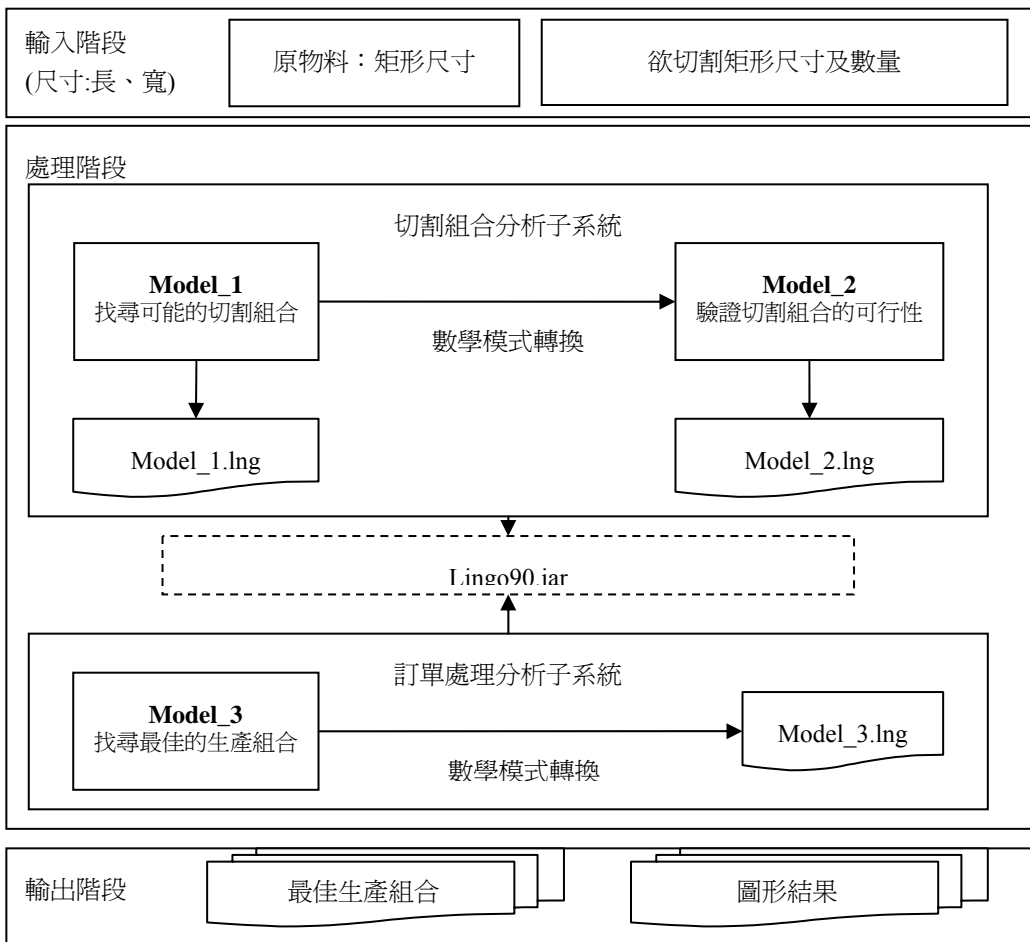


圖3 矩形原物料切割問題之系統架構圖

建構Model_2時，設定瑕疵點為已知的矩形 (p_i, q_i) 及座標點 (x'_i, y'_i) 位置，系統僅利用切割組合分析子系統從這一瑕疵原物料，找出最高使用率的切割組合，並且保證避開這些瑕疵點。而數學模式的運算僅包含Model_1及Model_2，當Model_1找到的可能切割組合數為零或Model_2驗證出第一組可行切割組合時，則程式停止運算並輸出結果。此系統之處理流程如圖4所示。

3.2.1 演算法

參照上述整合後的瑕疵矩形原物料切割方法流程，建構此系統的演算法敘述如下：

Begin.

Input : (l_0, w_0) , (l_z, w_z) , (x_d, y_d) 及 (l_d, w_d) for $d = 1, 2, \dots, D$, $z = 1, 2, \dots, Z$ //輸入原物料尺寸；切割產品尺寸及數量與瑕疵點發生的位置及大小

Process:

Obj = (l_0, w_0) //預設目標初始值(Model_1的第1個限制式的右邊值)

$t = 0$, $q_z^t = 0$, for $z = 1, 2, \dots, Z$ //記錄Model_1找到的可能切割組合變數

Do

{

Step 1: Run Model_1 //執行Model_1找尋可能的切割組合

{

To find q_z^t for $z = 1, 2, \dots, Z$

}

Step 2: Run Model_2 //驗證切割組合的可行性

If(The objective value of Model_1 \diamond Obj)

{

Obj = The new objective value of Model_1

$t = 0$

}

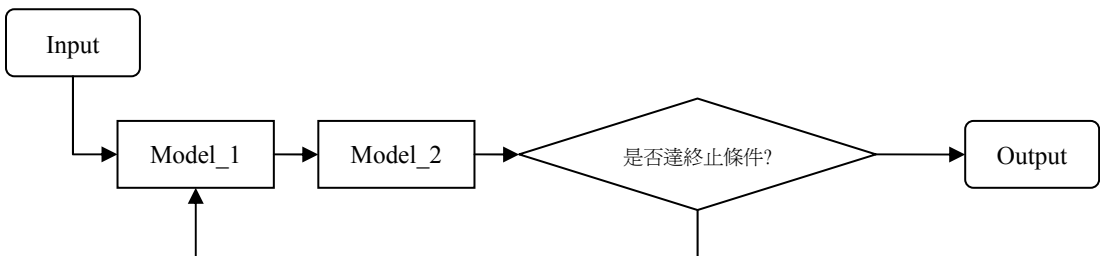


圖4 瑕疵矩形原物料之切割方法流程圖

```

Else {t++}
}
While (Obj>0 & Model_2 is infeasible)
Output:
View {Coordinates of all the feasible cutting combination sets.}
End.
    
```

3.2.2 系統架構

此功能僅利用切割組合分析子系統 (Model_1+Model_2) 處理瑕疵原物料切割問題，當找到一組可行切割解答時 (保證達最大使用率)，程式執行即宣告終止，下圖5表示此功能的系統架構。

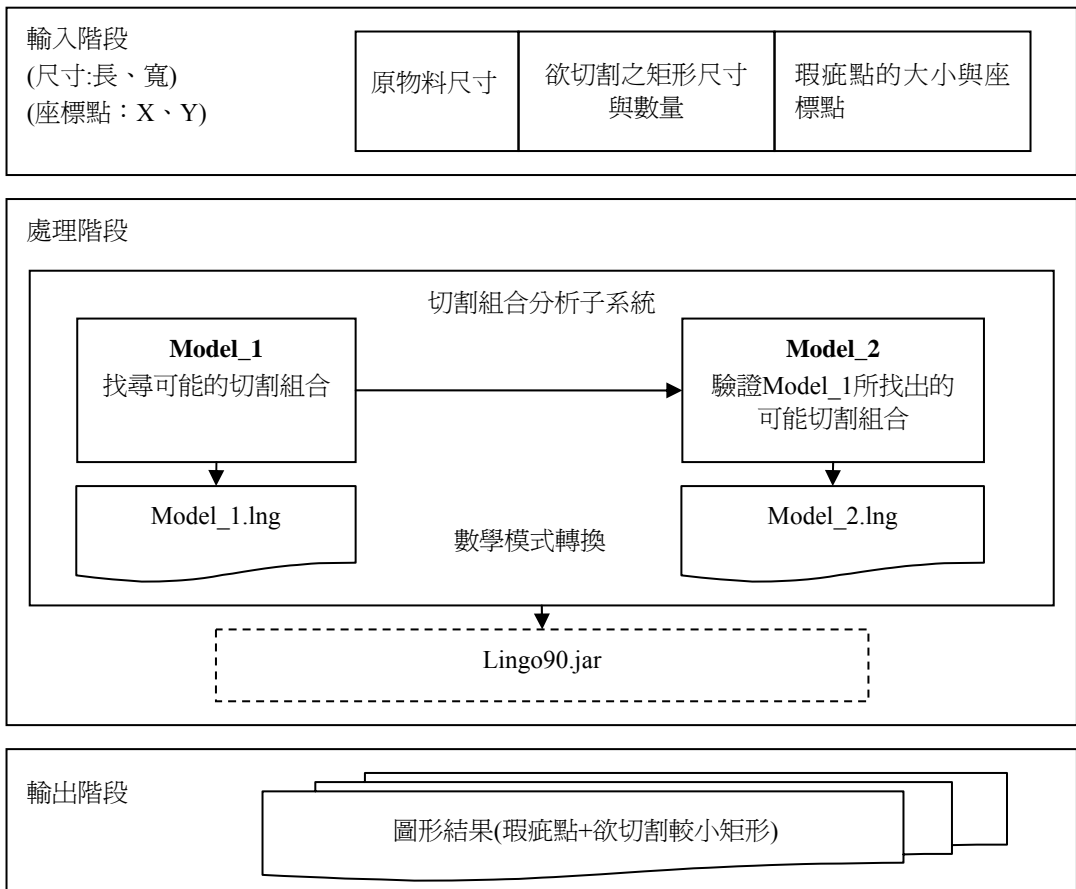


圖5 瑕疵矩形原物料之切割問題系統架構圖

4. 系統操作與範例說明

本節先以玻璃面板切割範例說明系統之操作方式，4.3節將提出幾個玻璃產業之生產範例進一步說明所設計系統於應用上之貢獻。

玻璃廠商若接獲三種規格玻璃面板的訂單，數量各需要1000片，詳細規格數據如表2所示，工廠欲採用原物料玻璃基板規格為150cm×180cm之玻璃進行切割生產，則系統操作步驟與所得結果陳述於4.1與4.2節。

4.1 矩形原物料切割系統操作

系統操作步驟為：(1)輸入原物料尺寸，(2)輸入欲切割產品尺寸與數量及(3)開始計算並輸出結果，詳細過程如下所述：

- (1) 輸入原物料尺寸：長=150，寬=180，如圖 6 所示。
- (2) 輸入欲切割產品尺寸與數量，如圖 7 所示。
- (3) 確定資料輸入無誤後，進行程式計算。過程中會陸續顯示(i)可能的切割組合，(ii)驗證可行的切割組合，(iii)生產最佳化組合及原物料需使用數量及(iv)運算時間等相關數據，詳細的畫面輸出資料如圖 8 所示。

表2 玻璃面板切割生產規格

種類	長 (cm)	寬 (cm)	面積 (cm ²)	需求量
40吋	84	56	4704	1000
42吋	90	52	4680	1000
46吋	100	62	6200	1000

圖 6 輸入原物料尺寸

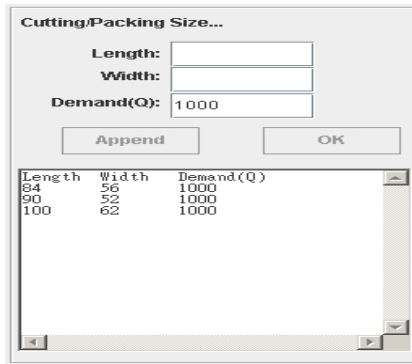


圖 7 輸入欲切割產品尺寸與需求數量

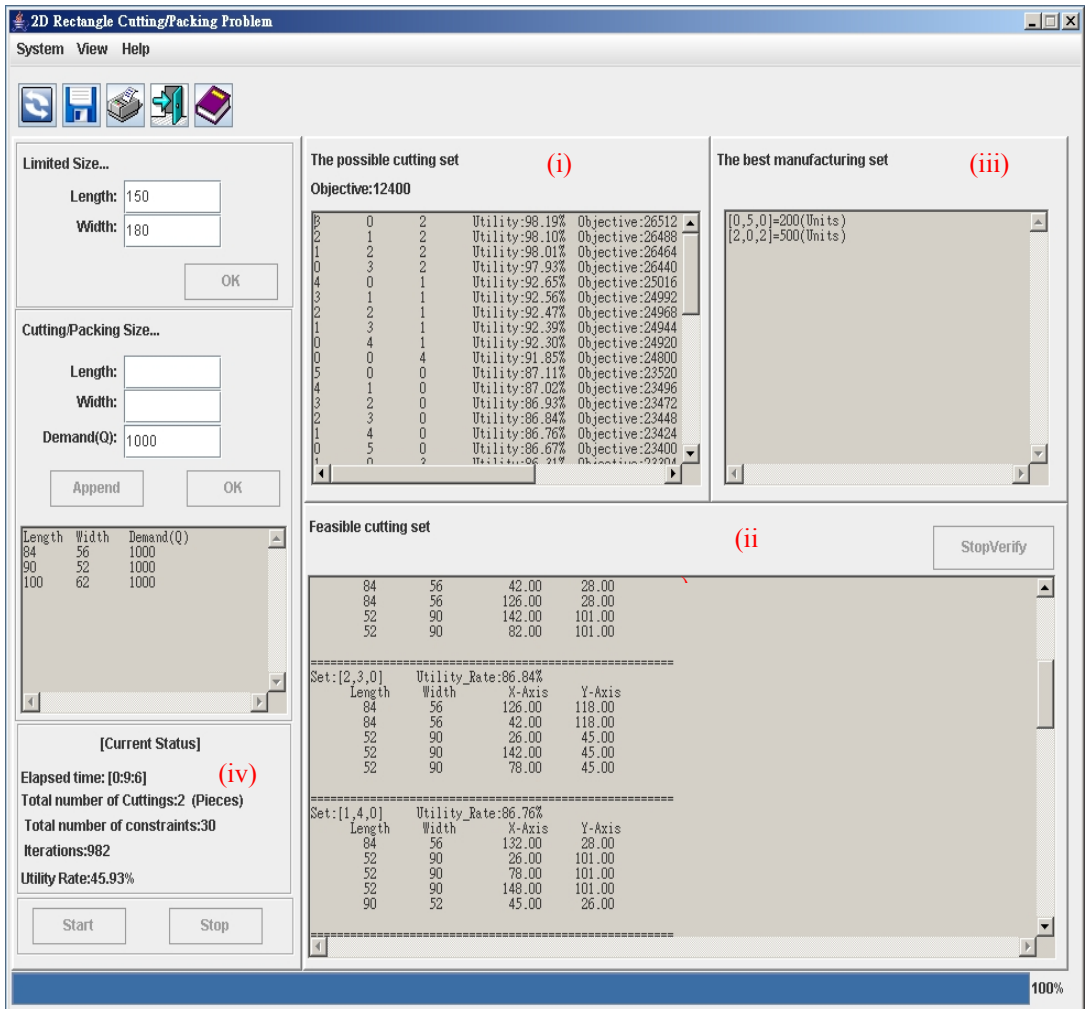


圖 8 矩形原物料切割決策支援系統主畫面

(4) 系統計算完畢後，可圖形化顯示各種可行切割組合與最佳生產組合。

- 工具列 (View→Feasible cutting set)：繪製所有可行切割組合(此例所產生的可行切割組合合計 13 組，請參照表 3)。

表 3 原物料玻璃切割問題之可行切割組合數據

組數	組合	長	寬	X軸座標	Y軸座標
1	(5,0,0)	84	56	42.00	112.00
		56	84	84.00	42.00
		56	84	28.00	42.00
		84	56	126.00	112.00
		56	84	140.00	42.00
2	(4,1,0)	56	84	140.00	42.00
		84	56	132.00	112.00
		56	84	28.00	42.00
		56	84	84.00	42.00
		90	52	45.00	110.00
3	(3,2,0)	56	84	28.00	104.00
		84	56	42.00	28.00
		84	56	126.00	28.00
		52	90	142.00	101.00
		52	90	82.00	101.00
4	(2,3,0)	84	56	126.00	28.00
		84	56	42.00	28.00
		52	90	26.00	101.00
		52	90	142.00	101.00
		52	90	78.00	101.00
5	(1,4,0)	84	56	42.00	28.00
		52	90	78.00	101.00
		52	90	26.00	101.00
		52	90	130.00	101.00
		90	52	129.00	26.00
6	(0,5,0)	90	52	45.00	116.00
		52	90	26.00	45.00
		52	90	154.00	45.00
		90	52	135.00	116.00
		52	90	78.00	45.00
7	(2,0,2)	56	84	128.00	42.00
		56	84	28.00	104.00
		100	62	106.00	115.00
		100	62	50.00	31.00

表 3 原物料玻璃切割問題之可行切割組合數據 (續)

組數	組合	長	寬	X軸座標	Y軸座標
8	(3,0,1)	56	84	128.00	42.00
		56	84	28.00	98.00
		84	56	42.00	28.00
		100	62	106.00	115.00
9	(2,1,1)	84	56	42.00	118.00
		56	84	124.00	104.00
		52	90	26.00	45.00
		100	62	102.00	31.00
10	(1,2,1)	56	84	124.00	104.00
		90	52	51.00	120.00
		52	90	26.00	49.00
		100	62	102.00	31.00
11	(0,3,1)	52	90	88.00	97.00
		90	52	121.00	26.00
		52	90	140.00	97.00
		62	100	31.00	92.00
12	(0,0,3)	100	62	50.00	93.00
		100	62	50.00	31.00
		62	100	131.00	50.00
13	(0,1,2)	52	90	26.00	45.00
		100	62	102.00	93.00
		100	62	102.00	31.00

- 工具列 (View→The best manufacturing set): 顯示最佳生產組合(此例的最佳生產組合包括 (0,5,0) 與 (2,0,2), 如圖 9 所示。)

此案例計算時間共耗費 9 分鐘並且得到 13 組可行切割組合, 其中 (0,5,0) 與 (2,0,2) 是最佳生產方式所需使用到的 2 個組合, 分別使用原物料 200 片與 500 片玻璃, 總計 700 片。組合 (0,5,0) 表示在同一原物料下 40 及 46 吋切割 0 片, 42 吋切割 5 片, 而 X 及 Y 軸座標記錄各切割矩形擺置在原物料之位置。此系統之運算時間受所切割之小矩形個數影響, 若一塊原物料上需切割超過 20 個小矩形, 目前個人電腦將無法在有效時間內找出解答, 則需設計分散式計算方法或是整合啓發式演算法才可能於合理之計算時間內求得解答。

4.2 瑕疵矩形原物料切割系統操作

以 4.1 節的原物料及切割產品尺寸為例, 並已知存在二個瑕疵點 (X 軸: 12, Y 軸: 11.5, 長: 1, 寬: 1) 與 (X 軸: 75, Y 軸: 177, 長: 1, 寬: 3)。

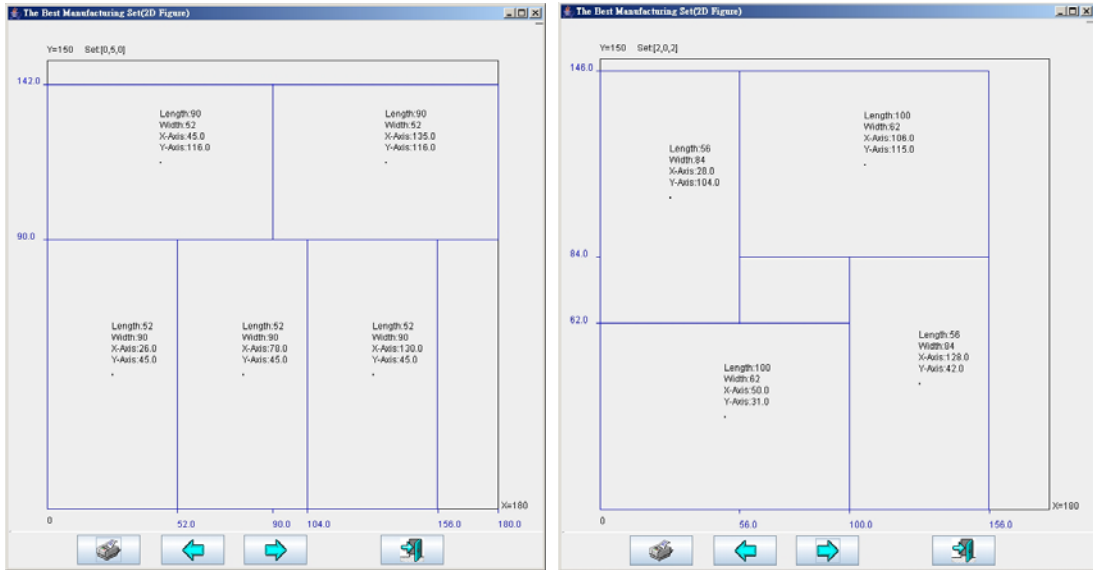


圖 9 原物料玻璃最佳切割生產組合 (0,5,0) 與 (2,0,2)

此例子的處理時間在 10 分鐘以內完成，計算結果為切割組合 (5,0,0)，也就是在這塊瑕疵的原物料中，切割 5 塊 40 吋面板可達最高使用率 (使用率：87.11%) 並且可避開瑕疵點。詳細數據如表 4 所示，系統畫面輸出結果如圖 10 所示。

4.3 範例說明

本節以 4.1 節範例說明數學模式計算的流程與結果，並採用玻璃產業切割生產平板玻璃之範例說明所設計之系統於應用上之貢獻。

表 4 瑕疵矩形原物料切割問題之數據

組合	長	寬	X軸座標	Y軸座標
(5,0,0)	56	84	28	54
	56	84	28	138
	84	56	98	28
	84	56	98	91.5
	84	56	98	147.5
瑕疵點	1	1	12	11.5
	1	3	75	177

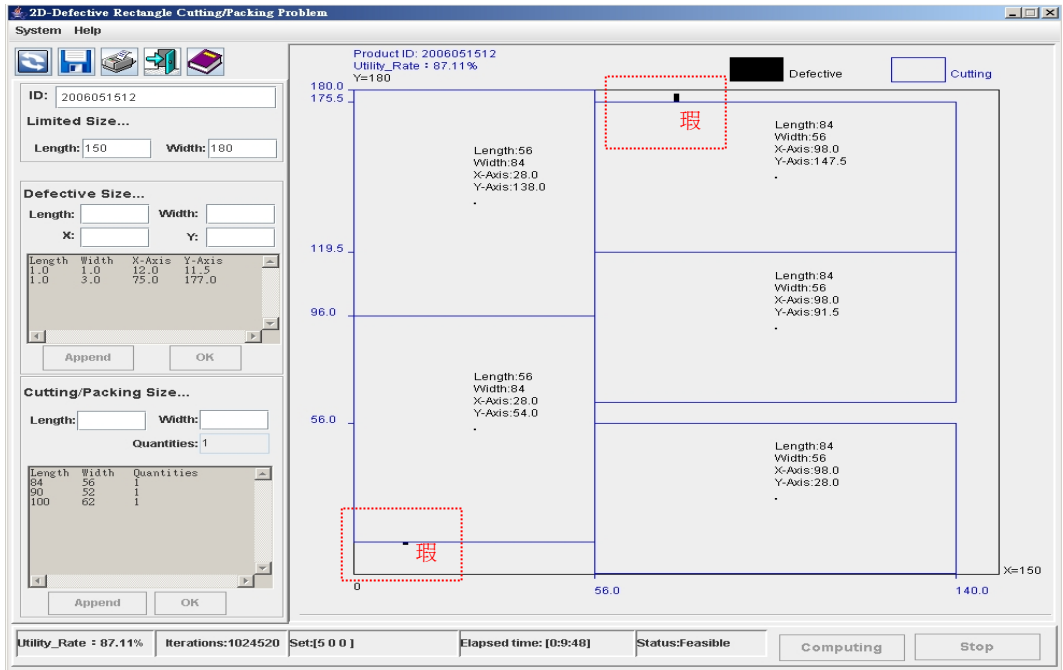


圖 10 瑕疵矩形原物料切割系統主畫面

4.3.1 數學模式運算流程

初始設定：令 $t=1$ 並使得 Model_1 之限制面積範圍 $l_0 w_0 = 27000$ (150×180)。

步驟 1：建構 Model_1 如下以找尋最大面積組合。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 4704 \times q_1^1 + 4680 \times q_2^1 + 6200 \times q_3^1 \\ \text{subject to} \quad & 4704 \times q_1^1 + 4680 \times q_2^1 + 6200 \times q_3^1 \leq 27000, \end{aligned}$$

$q_1^1, q_2^1, q_3^1 \in$ 非負整數。

所得結果為 $A=3, B=0, C=2$ ，利用率=98.19%，目標值=26512，但此組答案不一定為可行切割組合，需經過 Model_2 驗證。

步驟 2：判斷步驟 1 所得之結果是否達停止條件或此切割組合可直接刪除。此切割樣式(3, 0, 2)需進行驗證。

步驟 3：建構 Model_2 如下，並驗證切割組合(3, 0, 2)。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & X \times Y \\ \text{subject to} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P1=84, Q1=56, P2=84, Q2=56, P3=84, Q3=56, P4=100, Q4=62, P5=100, Q5=62, \\
&X1-X2+U12\times M+V12\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P2\times S2+Q2\times(1-S2)), \\
&X2-X1+(1-U12)\times M+V12\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P2\times S2+Q2\times(1-S2)), \\
&Y1-Y2+U12\times M+(1-V12)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P2\times(1-S2)+Q2\times S2), \\
&Y2-Y1+(1-U12)\times M+(1-V12)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P2\times(1-S2)+Q2\times S2), \\
&X1-X3+U13\times M+V13\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P3\times S3+Q3\times(1-S3)), \\
&X3-X1+(1-U13)\times M+V13\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P3\times S3+Q3\times(1-S3)), \\
&Y1-Y3+U13\times M+(1-V13)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P3\times(1-S3)+Q3\times S3), \\
&Y3-Y1+(1-U13)\times M+(1-V13)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P3\times(1-S3)+Q3\times S3), \\
&X1-X4+U14\times M+V14\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&X4-X1+(1-U14)\times M+V14\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&Y1-Y4+U14\times M+(1-V14)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
&Y4-Y1+(1-U14)\times M+(1-V14)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
&X1-X5+U15\times M+V15\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
&X5-X1+(1-U15)\times M+V15\times M \geq 0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
&Y1-Y5+U15\times M+(1-V15)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
&Y5-Y1+(1-U15)\times M+(1-V15)\times M \geq 0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
&X2-X3+U23\times M+V23\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P3\times S3+Q3\times(1-S3)), \\
&X3-X2+(1-U23)\times M+V23\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P3\times S3+Q3\times(1-S3)), \\
&Y2-Y3+U23\times M+(1-V23)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P3\times(1-S3)+Q3\times S3), \\
&Y3-Y2+(1-U23)\times M+(1-V23)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P3\times(1-S3)+Q3\times S3), \\
&X2-X4+U24\times M+V24\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&X4-X2+(1-U24)\times M+V24\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&Y2-Y4+U24\times M+(1-V24)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
&Y4-Y2+(1-U24)\times M+(1-V24)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
&X2-X5+U25\times M+V25\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
&X5-X2+(1-U25)\times M+V25\times M \geq 0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
&Y2-Y5+U25\times M+(1-V25)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
&Y5-Y2+(1-U25)\times M+(1-V25)\times M \geq 0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
&X3-X4+U34\times M+V34\times M \geq 0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&X4-X3+(1-U34)\times M+V34\times M \geq 0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)+P4\times S4+Q4\times(1-S4)), \\
&Y3-Y4+U34\times M+(1-V34)\times M \geq 0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3+P4\times(1-S4)+Q4\times S4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Y4-Y3+(1-U34)\times M+(1-V34)\times M \geq 0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3+P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
& X3-X5+U35\times M+V35\times M \geq 0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
& X5-X3+(1-U35)\times M+V35\times M \geq 0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
& Y3-Y5+U35\times M+(1-V35)\times M \geq 0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
& Y5-Y3+(1-U35)\times M+(1-V35)\times M \geq 0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
& X4-X5+U45\times M+V45\times M \geq 0.5\times(P4\times S4+Q4\times(1-S4)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
& X5-X4+(1-U45)\times M+V45\times M \geq 0.5\times(P4\times S4+Q4\times(1-S4)+P5\times S5+Q5\times(1-S5)), \\
& Y4-Y5+U45\times M+(1-V45)\times M \geq 0.5\times(P4\times(1-S4)+Q4\times S4+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
& Y5-Y4+(1-U45)\times M+(1-V45)\times M \geq 0.5\times(P4\times(1-S4)+Q4\times S4+P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
& X \geq X1+0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)), Y \geq Y1+0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1), \\
& X1-0.5\times(P1\times S1+Q1\times(1-S1)) \geq 0, Y1-0.5\times(P1\times(1-S1)+Q1\times S1) \geq 0, \\
& X \geq X2+0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)), Y \geq Y2+0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2), \\
& X2-0.5\times(P2\times S2+Q2\times(1-S2)) \geq 0, Y2-0.5\times(P2\times(1-S2)+Q2\times S2) \geq 0, \\
& X \geq X3+0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)), Y \geq Y3+0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3), \\
& X3-0.5\times(P3\times S3+Q3\times(1-S3)) \geq 0, Y3-0.5\times(P3\times(1-S3)+Q3\times S3) \geq 0, \\
& X \geq X4+0.5\times(P4\times S4+Q4\times(1-S4)), Y \geq Y4+0.5\times(P4\times(1-S4)+Q4\times S4), \\
& X4-0.5\times(P4\times S4+Q4\times(1-S4)) \geq 0, Y4-0.5\times(P4\times(1-S4)+Q4\times S4) \geq 0, \\
& X \geq X5+0.5\times(P5\times S5+Q5\times(1-S5)), Y \geq Y5+0.5\times(P5\times(1-S5)+Q5\times S5), \\
& X5-0.5\times(P5\times S5+Q5\times(1-S5)) \geq 0, Y5-0.5\times(P5\times(1-S5)+Q5\times S5) \geq 0, \\
& U12, U13, U14, U15, U23, U24, U25, U34, U35, U45, V12, V13, V14, V15, V23, V24, \\
& V25, V34, V35, V45, S1\sim S5 \in 0-1 \text{ 變數}, X1\sim X5, Y1\sim Y5, X, Y \geq 0.
\end{aligned}$$

切割樣式 (3,0,2) 的執行結果為一組不可行切割組合，故刪除此切割組合。

重複以上三個步驟直到停止條件成立並找出所有可行切割組合為止。所得可行切割組合列示於表 3。

步驟 4：執行 Model_3 以求得最佳生產方式。

$$\begin{aligned}
& \text{Min } G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8+G9+G10+G11+G12+G13 \\
& \text{subject to} \\
& (G1\times 5)+(G2\times 4)+(G3\times 3)+(G4\times 2)+(G5\times 1)+(G6\times 0)+(G7\times 2)+(G8\times 3)+(G9\times 2)+(G10\times 1)+ \\
& (G11\times 0)+(G12\times 0)+(G13\times 0) \geq 1000, \\
& (G1\times 0)+(G2\times 1)+(G3\times 2)+(G4\times 3)+(G5\times 4)+(G6\times 5)+(G7\times 0)+(G8\times 0)+(G9\times 1)+(G10\times 2)+ \\
& (G11\times 3)+(G12\times 0)+(G13\times 1) \geq 1000, \\
& (G1\times 0)+(G2\times 0)+(G3\times 0)+(G4\times 0)+(G5\times 0)+(G6\times 0)+(G7\times 2)+(G8\times 1)+(G9\times 1)+(G10\times 1)+
\end{aligned}$$

$$(G11 \times 1) + (G12 \times 3) + (G13 \times 2) \geq 1000,$$

$G1 \sim G13 \in \text{非負整數}$ 。

所得計算結果之目標值為 700 (片)，最佳解為 $G6=200$ (片)， $G7=500$ (片)，其餘切割樣式皆為 0 (片)。

4.3.2 應用範例

本節以玻璃產業所生產的平板玻璃為例，比較傳統批次切割生產方法與本研究所設計之切割生產方法。由於平板玻璃廣泛的在我們日常生活使用，如建築、汽車等產業。為因應標準作業流程，工廠所生產的玻璃都有一固定標準規格，部分規格如表5所示，而這些原物料須進一步切割，便可使用於建築的採光裝潢與汽車的擋風玻璃等等。

表 6 為某建築大樓所需之七種不同規格的玻璃板規格與數量，玻璃生產廠商接到此訂單後想用最少的原物料來切割出所需要的產品，過去工廠在切割玻璃時大都採用批次切割生產(即一次只切割某一種規格產品)，為比較說明本研究方法與過去批次生產模式之差異，本研究將兩種切割生產方式所得結果列示於表 7。表 7 中最後一列為另一筆需求訂單之比較結果。

由表7得知，運用本研究設計之系統所得結果皆較批次生產方式所得結果要好，所節省之原物料數量則依各種產品需求數量不同而異。過去玻璃工廠在切割生產玻璃產品時大都採用批

表5 平板玻璃之產品規格

品項	長 (cm)	寬 (cm)	面積 (cm ²)
反射玻璃	366	254	92964
強化玻璃	921	244	224724
膠合玻璃(建築)	366	244	89304
膠合玻璃(汽車)	220	99	21780
其它	180	150	27000

表6 某建築大樓所需七種不同規格的玻璃建材規格與數量

品項	種類	長 (cm)	寬 (cm)	面積 (cm ²)	需求量
強化玻璃	A1	505	64	29315	125
	A2	504	70	35000	76
	A3	605	80	45400	109
膠合玻璃	B1	155	83	12865	150
	B2	175	90	15750	100
	B3	210	95	19950	110
	B4	200	120	24000	120

表7 本研究方法与批次生产方法结果比较

原物料切割品項	訂單需求數量	原物料使用數量		節省數量
		批次生產	本研究方法	
強化玻璃 (244×921)cm ²	(125,76,109)	105	104	1
膠合玻璃 (244×366)cm ²	(150,100,110,120)	127	110	17
	(200,200,150,150)	187	167	20

次切割生產，由於未考慮所有切割樣式，故導致原物料未充分利用而產生許多切割後剩餘之廢料，在原物料價格越來越高的情況之下，生產成本自然居高不下，進而減少獲利並降低產品於市場上的競爭力。

本研究亦觀察在不同訂單需求數量下是否能夠達到更進一步的成本降低，為此，本研究採用 4.1 節之範例，令訂單需求數量為變數，假設訂單需求數量總數維持為 6000 個，並做了以下測試，選擇四種訂單總數量為 6000 的產品需求組合，將兩種方法所得之結果顯示於表 8，表中列示兩種切割生產方法所需使用的切割樣式與數量，以及本研究方法所能節省之原物料數量，由於此範例需切割三種產品，故批次生產方法皆使用三種切割樣式，而本研究方法則會從 13 種切割樣式中（如表 3）選擇最佳之生產組合，以最少之原物料數量生產出所需要之產品。針對此四種不同訂單需求，本研究所設計之方法都能有效減少原物料使用，所能節省之原物料數量百分比平均約 3.5%，此結果亦顯示，本研究確實提出一較佳的原物料切割生產方式，並可透過所設計之決策支援系統有效改善傳統之原物料切割生產方式，提升生產效率、降低生產成本。

表8 本研究方法与批次生产方法结果比较

訂單需求數量 (40吋,42吋,46吋)	樣式：數量 (總計)				節省數量	節省比率 (%)
	批次生產		本研究方法			
(1000,2000,3000)	G1:200 G6:400 G12:1000	(1600)	G6:400 G7:500 G12:667	(1567)	33	2.1
(2000,1000,3000)	G1:400 G6:200 G12:1000	(1600)	G6:200 G7:1000 G12:334	(1534)	66	4.3
(3000,2000,1000)	G1:600 G6:400 G12:334	(1334)	G1:400 G6:400 G7:500	(1300)	34	2.6
(2000,2000,2000)	G1:400 G6:400 G12:667	(1467)	G6:400 G7:1000	(1400)	67	4.8

5. 結論

本研究主要在設計一二維原物料切割決策支援系統，目的在提供製造業切割原物料參考依據，以取代過去採用經驗法則所造成原物料及人力成本的耗費。對於 20 種產品以內的原物料切割問題，所設計之系統皆能在合理的運算時間內求得最佳之切割生產方式，而系統的操作允許使用者自行輸入切割相關數據並考量瑕疵點之切割問題，而在輸出階段也提供圖形化的結果。此系統之優點為：(1)透過此系統之操作可以減少數學模式建置時間並提供切割座標數據、圖形化結果、切割生產最佳化數據等；(2)本系統嵌入最佳化數學軟體元件以大幅提昇其功能與操作方便性；(3)系統設計模組化，可依不同功能需求做彈性調整。未來可能之研究方向包括：整合啓發式演算法以改善系統運算效能、設計一全域最佳方法並應用此方法於不同原物料切割生產問題等。

參考文獻

- Beasley, J. E., "A Population Heuristic for Constrained Two-Dimensional Non-guillotine Cutting," *European Journal of Operational Research*, Vol. 156, 2004, pp. 601-627.
- Chen, C. S., Sarin, S., and Balasubramanian, R., "A Mixed-Integer Programming Model for a Class of Assortment Problems," *European Journal of Operational Research*, Vol. 63, 1993, pp. 362-367.
- Chien, C. F. and Deng, J. F., "A Container Packing Support System for Determining and Visualizing Container Packing Patterns," *Decision Support Systems*, Vol. 37, No. 1, 2004, pp. 23-34.
- Chien, C. F., Hsu, S. C., and Deng, J. F., "A Cutting Algorithm for Optimizing the Wafer Exposure Pattern," *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 14, No. 2, 2001, pp. 157-162.
- Dowland, K. A., Vaid, S., and Dowland, W. B., "An Algorithm for Polygon Placement Using a Bottom-Left Strategy," *European Journal of Operational Research*, Vol. 141, 2002, pp. 371-381.
- Fayard, D. and Zissimopoulos, V., "An Approximation Algorithm for Solving Unconstrained Two-Dimensional Knapsack Problems," *European Journal of Operational Research*, Vol. 84, 1995, pp. 618-632.
- Hifi, M. and Ouafi, R., "Best-First Search and Dynamic Programming Methods for Cutting Problems: The Cases of One or More Stock Plates," *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 32, 1997, pp. 187-205.
- Holthaus, O., "Decomposition Approaches for Solving the Integer One-Dimensional Cutting Stock Problem with Different Types of Standard Lengths," *European Journal of Operational Research*, Vol. 141, 2002, pp. 295-322.

- Jakobs, S., "On Genetic Algorithms for the Packing of Polygons," *European Journal of Operation Research*, Vol. 88, 1996, pp. 165-181.
- Labbe, M., Laporte, G., and Martello, S., "An Exact Algorithm for the Dual Bin Packing Problem," *Operations Research Letters*, Vol. 17, 1995, pp. 9-18.
- Li, H. L., Chang, C. T., and Tsai, J. F., "Approximately Global Optimization for Assortment Problems Using Piecewise Linearization Techniques," *European Journal of Operational Research*, Vol. 140, 2002, pp. 584-589.
- Li, H. L. and Chang, C. T., "An Approximately Global Optimization Method for Assortment Problems," *European Journal of Operational Research*, Vol. 105, 1998, pp. 604-612.
- Li, H. L. and Tsai, J. F., "A Fast Algorithm for Assortment Optimization Problems," *Computers and Operations Research*, Vol. 28, 2001, pp. 1245-1252.
- Liu, D. and Teng, H., "An Improved BL-Algorithms for Genetic Algorithm of the Orthogonal Packing of Rectangles," *European Journal of Operational Research*, Vol. 112, 1999, pp. 413-420.
- Scholl, A., Klein, R., and Jurgens, C., "BISON:A Fast Hybrid Procedure for Exactly Solving the One-Dimensional Bin Packing Problem," *Computers and Operations Research*, Vol. 24, 1997, pp. 627-645.