

數學閒話 玩玩看數獨金字塔

文 / 圖：田銘莒

在數學的小天地裡，各種精美絕倫的長篇高論可謂比比皆是，相形之下，數學遊戲看起來只是些小玩意兒罷了。閒暇時，我喜歡一邊聽音樂，一邊翻翻講述數學遊戲的書。數學遊戲可謂千奇百怪，各顯神通。先說說時下人氣最旺的數獨吧！數獨一詞發源於日文，意謂數陣中的每個位置，只有一個數字可填。報紙上也每天刊登數獨，還分難易等級呢！可是我怎麼看，就是覺得沒那麼容易填哪！

論到數獨的思想起源，玩家便不能不提到正交方陣，屬於組合數學的範圍。其中各數字排列於行列之間，以其不重複性，提供解題思路。正是基於這種數字的不重複性，此遊戲要求玩家在每行、每列、每個九宮格裏，都須填入1、2、3、4、5、6、7、8、9等數字，不可重複。但是現在流行的數獨並不是只有九乘九形式那一種而已，其他類似的玩法還不少，比方說還有六乘六、八乘八、十二乘十二、十六乘十六，以及各種其他形式的數獨。不管正方形數陣的大小，其規則總是玩家先選好一個基數，使大正方形的長邊、寬邊各有此基數個空格，於是大正方形共有此基數平方個空格，其中每列、每行，還有每個基數大小的限定區域內，玩家須填入一到此基數的各數字，是連續自然數，不可重複。這個規則的出現可以說明，正交方陣是此遊戲的靈感泉源。在此

我想提到最簡單的一種數獨，即四乘四形式，是為縮小版數獨，共有十六個小正方形，除每行、每列外，更有在每個角落佔全面積四分之一的中正方形，玩家須在各小正方形格子裡填入1、2、3、4等數字，不可重複，如圖1。無聊時俺自己亂填一番，湊出兩個答案，如圖2。

以四乘四形式而言，既然正方形數獨是這樣玩的，那麼三角形數獨又當如何擺弄呢？因為三角形不若正方形可以有行、列之分，我想按照幾何學表述，玩家必須採用底、高的觀察取向才是。所以三角形數獨的數字排列，玩家可取其三條底線位置如圖3。任一底線各格子填入數字為1、2、3、

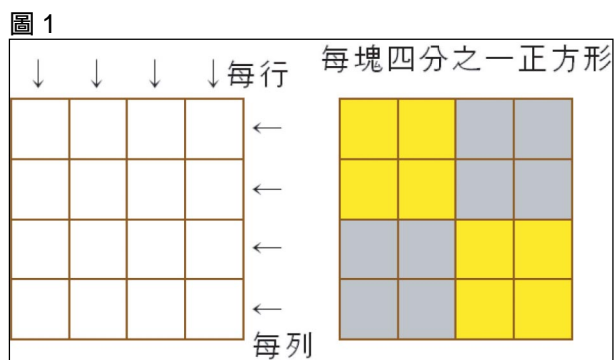


圖2

1	3	2	4	1	2	3	4
4	2	3	1	3	4	1	2
3	1	4	2	4	3	2	1
2	4	1	3	2	1	4	3

圖 3

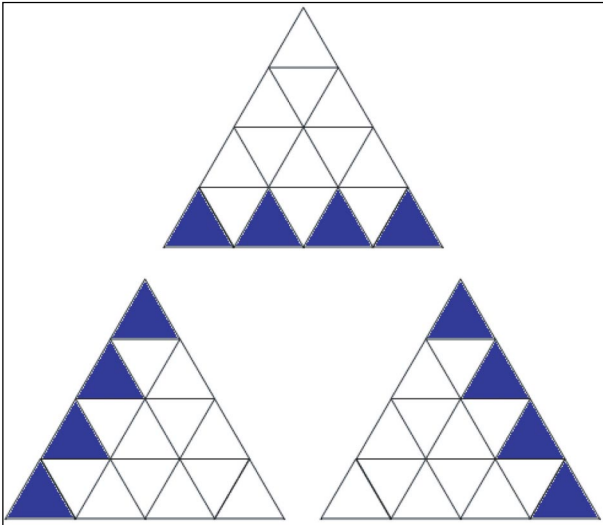


圖 4

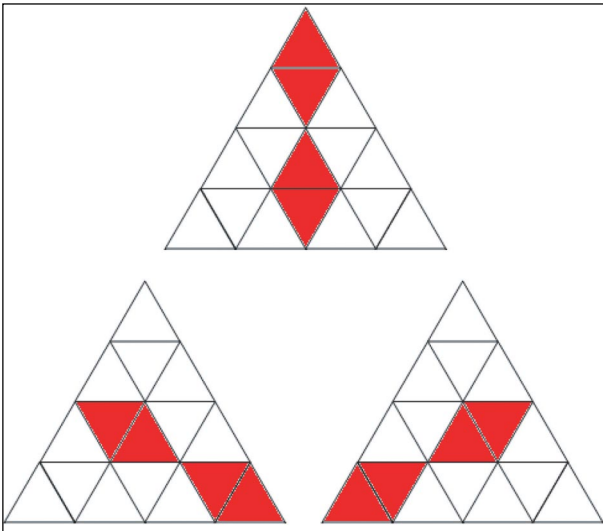
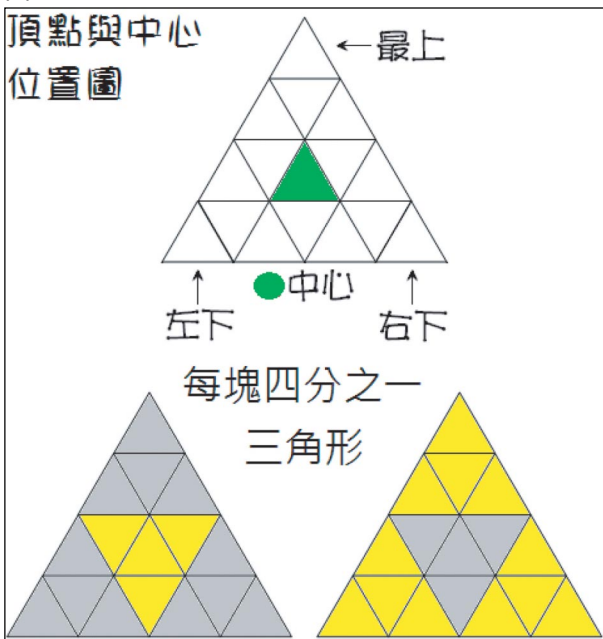


圖 5



4，不可重複。玩家可取其三根高線的位置如圖4，任一高線各格子填入數字為1、2、3、4，不可重複。此外還有三個角落與中心的四個區塊，面積都是全三角形的四分之一，如圖5，其中任一塊各格子填入數字為1、2、3、4，不可重複。

好了，遊戲規則大概是清楚了，俺接著找答案吧！我的想法是，既然是三角形數獨，玩家可以在1、2、3、4四個數中任取三個，在此三角形的三個角落格，先填入最上頂點，其次左下頂點，再次右下頂點。中心數字則是剛才被挑剩的數字。為表述明確起見，最上頂點、左下頂點、右下頂點三個數字，茲規定必須符合1、2、3、4、1、2、3、4的循環順序，亦即1而2而3、2而3而4、3而4而1、4而1而2。例如各角落格的三個數字，吾人先依序放入1、2、3，中心數字想當然爾是4啦！然後一邊猜、一邊試，俺終於拼湊出一個三角形數獨，嘍嘍嘍，叨天之幸，再接再厲喔！以下我便繼續交換數字順序與位置，然後一邊猜、一邊試，扣掉經過翻轉與旋轉可以得到的相同構

圖 6

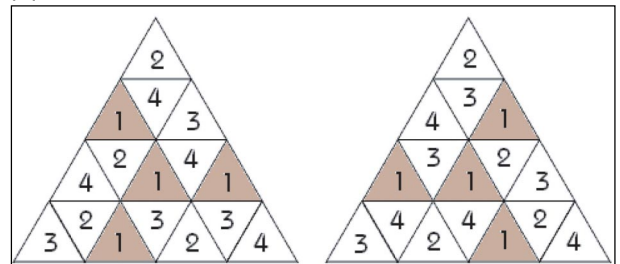


圖 7

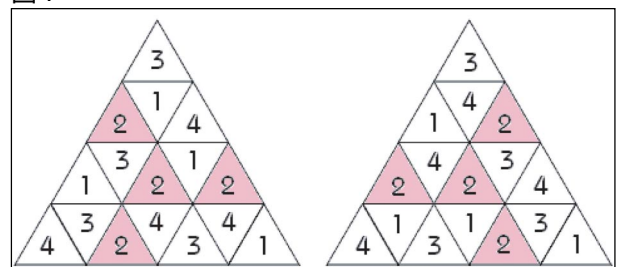


圖 8

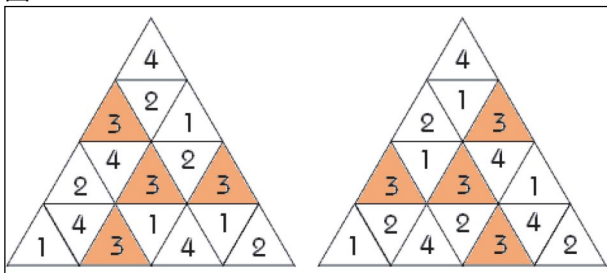
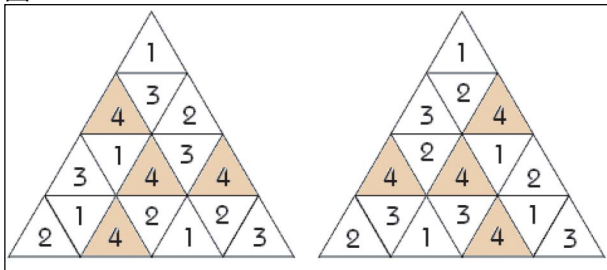


圖 9



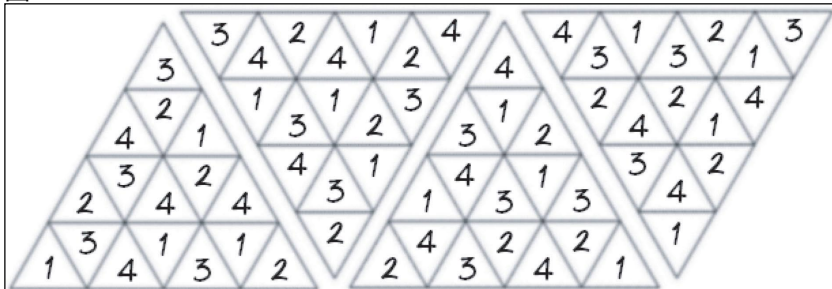
造。俺終於拼湊出八個三角形數獨的答案，如圖 6、圖 7、圖 8、圖 9。

圖 6、圖 7、圖 8、圖 9 的答案從角落來看是很像似，但是以中心數字來看，可是不太一樣囉！而且看官您細看便能發現，一些答案是以中心數字做同數左旋，一些答案是以中心數字做同數右旋，如同電風扇的葉片一般旋轉。此處我以左旋表示逆時針旋轉，以右旋表示順時針旋轉。

且看圖 6 的答案，中心數字為 1，各葉片同數左旋者放在左邊，簡稱為左旋一；各葉片同數右旋者置於右邊，簡稱為右旋一。

且看圖 7 的答案，中心數字為 2，各葉片同數左旋者放在左邊，簡稱為左旋二；各葉

圖 10



片同數右旋者置於右邊，簡稱為右旋二。

且看圖 8 的答案，中心數字為 3，各葉片同數左旋者放在左邊，簡稱為左旋三；各葉片同數右旋者置於右邊，簡稱為右旋三。

且看圖 9 的答案，中心數字為 4，各葉片同數左旋者放在左邊，簡稱為左旋四；各葉片同數右旋者置於右邊，簡稱為右旋四。

古代數學家特別喜歡研究幾何學，老早就知道正多面體只有五種，按複雜程度說，即正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體與正二十面體，其中正六面體又名立方體。在此我是把正四面體當成金字塔看待。之前我曾經試過使用四片四階三角形魔陣構成魔術金字塔，那麼數獨金字塔也是這樣的構造嗎？也不見得喔！我想還是要實際試試看纔知道。數學遊戲嘛，不妨猜一猜！此方式實亦類似四階三角形魔陣之四片拼湊方式。據我所知，以三角形魔陣組建魔術金字塔時須注意，數字排列相同的兩個邊邊纔可互相銜接，亦即銜接處的數字必須與隔壁的格子數字相同。三角形魔陣如此這般，倒是令我想起了十六格的三角形數獨，乃是以數字 1、2、3、4 組成，也可以使其邊邊數字排列互相對應，進而立體操作一番，組成一座數獨金字塔。

玩家安排右旋一、左旋二、右旋三、左旋四等四個答案，經過必要的翻轉與旋轉，即可構成數獨金字塔。圖 10 是此數獨金字塔的平面展開圖。玩家安排左旋一、右旋二、左旋三、右旋四等四個答案，經過必要的翻轉與

圖 11

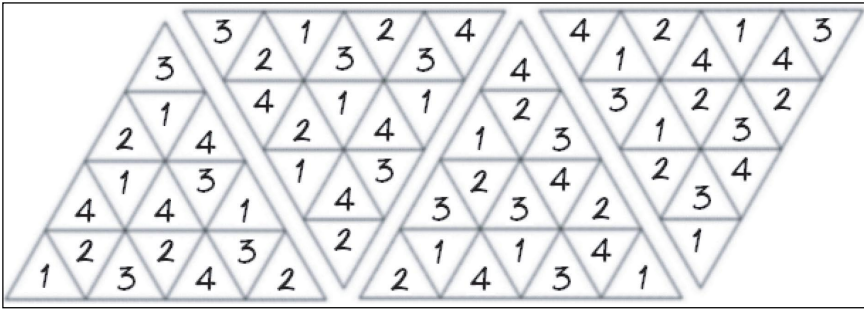


圖 12

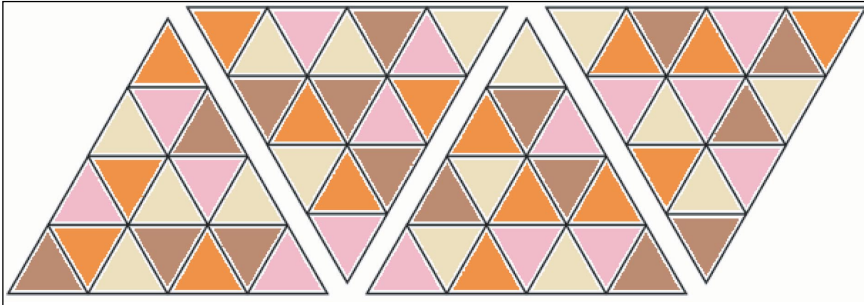
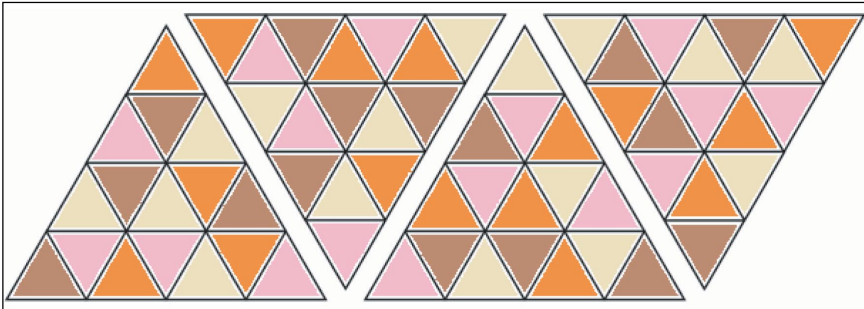


圖 13



旋轉，即可構成數獨金字塔。圖11是此數獨金字塔的平面展開圖。

嗯，我想如果玩家不要寫數字，改成在格子裡塗顏色，弄個像彩虹一般的數獨金字塔應該也是挺美觀的。至於這種四色數獨和著名的組合數學難題 四色猜想，能不能扯上關係呢？這個問題嘛，我只能雙手一攤，搖搖頭了。四色猜想是從地圖著色啟發而得的，別小看此猜想，可是典型的知難行易呀！本人才疏學淺，只能望洋興嘆，還是甯提了吧！言歸正傳，塗色後的數獨金字塔如圖 12、圖 13。為表示清楚，我採用同數同色法。

以上的建構方式，俺都使用「同數相鄰法」。然而古代建築師真正應用的常規金字塔是一座底面為正方形的四角椎，應用此構造配合同數相鄰的辦法，我試過，卻總是無法拼成。這樣也使我困擾了許久，想來想去，後來俺纔想到，山不轉，把路轉，採用「同數迴避法」便可辦到，不過投機取巧便是了。

且看圖 14 的答案，四片斜壁用的數陣是右旋一、左旋二、右旋三、左旋四。

且看圖 15 的答案，四片斜壁用的數陣是左旋一、右旋二、左旋三、右旋四。

當然囉！請列位看官看看圖12的答案，底面為一片四乘四形式，與圖 13 的答案相較，底面亦為一片四乘四形式，皆為數獨，兩者並不相同啊！

對於人類的第六感而言，我想數字一族並不是平凡的、無機的、冰冷的，每個數字都有不同的顏色、溫度、氣味，給予人們不同的遐想，甚至轉化成美術、音樂、文學的重新表現，體現在各種古文化之中。在中國文化中，數字四諧音死，所以不太受人們喜愛。不過在哲學的國度裏，可又是另一番光景啦！老子曰：域中有四大。道大，天大，地大，人亦大。佛家也提到四大皆空。而西洋哲學家很早便有元素的概念，認為土、

圖 14

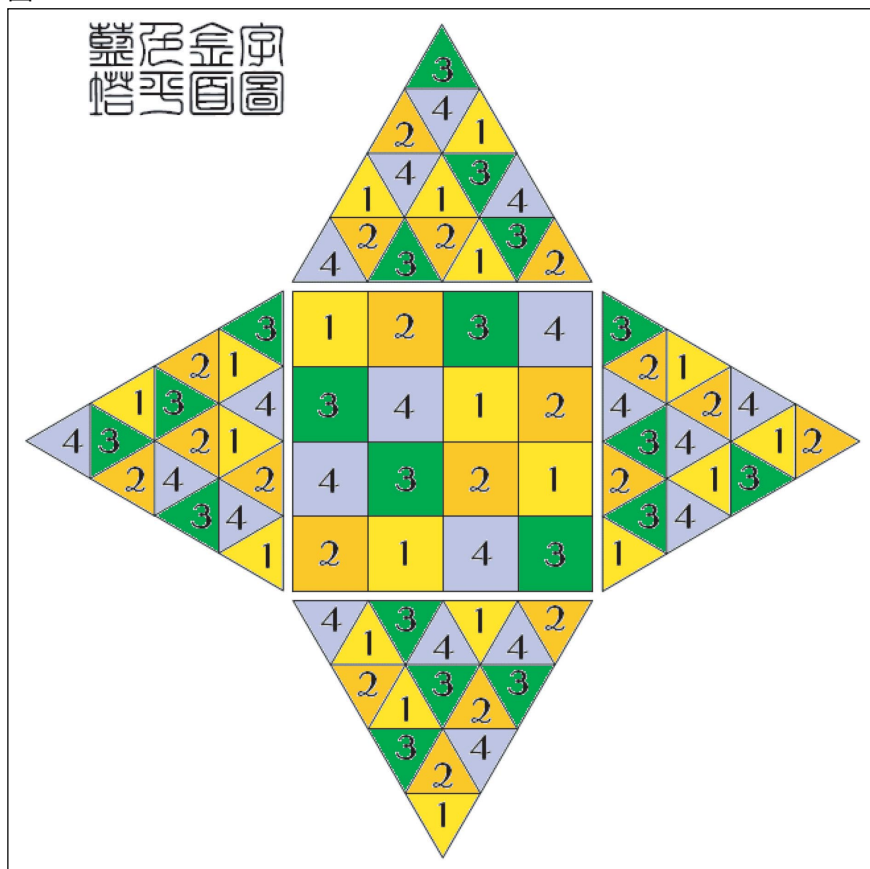
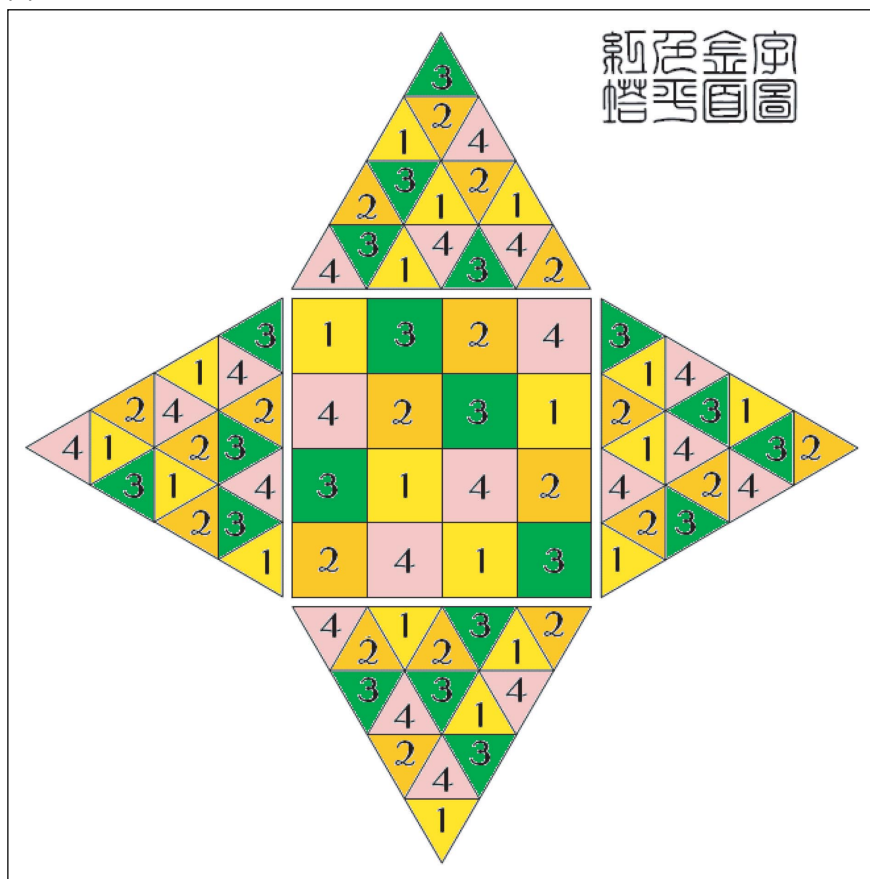


圖 15



氣、水、火是構成宇宙的四大元素，此殆化學系統的思想濫觴。

以哲學家的觀點來看，數字四在數學裡似乎代表了理性的極限，聰明的數學家阿貝爾(原文 Abel，念作 Y 与 卅儿)早已證明，四次以下方程纔有公式解，五次以上方程沒有公式解。聰明的數學家發明了複數之後，又持續發展了四元數，可謂玄之又玄，引人遐思。至今四色猜想與四元數一樣，是一對永遠令人驚歎、費解及流連忘返的數學謎題。我猜或許彼此之間互為鎖鑰，共同保守了永恆的秘密。蓋天玄地冥者，神妙之機難述，立乎金塔之上，誠亦未可知乎？友聲

作者簡介

田銘莒

電工78級，退伍後求學於中山大學電機工程研究所，曾致力探討注音翻譯法，並對數學產生濃厚興趣。曾服務於鋼鐵業及工研院，目前從事敬業樂群、誨人不倦的教育工作。