Chiao Da Management Review
Vol. 24 No. 2, 2004
pp. 37-60

單期季節性商品之需求預測投資預算—使用貝氏估計法

The Budget of Demand Forecasting in One-Period Seasonal Goods Production Systems—A Bayesian Approach

李智明 **Chih-Ming Lee**
東吳大學企業管理學系副教授
Dept. of B. A., Soochow University

摘要: 如何正確地預測並滿足顧客的需求，為企業生存之根本。而需求預測的精確度通常和投資在預測上的人力及金錢成正相關。本文經由模型推導，探討使用貝氏估計法之單期季節性商品生產系統(報童問題)應如何訂定生產計劃及需求預測投資預算。研究發現需求預測在以下情況中十分重要：(1)當單位售價、或單位存貨處理成本、或單位商譽損失成本較大時，(2)當單位生產成本在某適當值時，(3)當生產前置成本較小時。

Abstract: How to accurately predict and satisfy customer needs is very important for a company to survive. In general, the precision of demand forecasting is closely relative to the budget invested in forecasting. In this paper, we develop a single-product and single-period model (a newsboy model) with Bayesian approach to study how the decision-maker in a seasonal goods production system to determine the production quantity and budget invested in demand forecasting. We find that when unit selling price, unit inventory disposal cost, or unit shortage cost is larger, or when unit production cost is appropriate, or when production setup cost is smaller, demand forecasting becomes more important.

關鍵字：季節性商品、需求預測、貝氏估計法

Keywords: Seasonal Goods, Demand Forecasting, Bayesian Approach

1. 前言

所謂單期季節性商品，通常指該商品之生產或需求量集中發生在一年中某一期間，且無法加以儲存至下次需求期間再度販售者。單期季節性商品普遍存在於日常生活中，例如：報紙、雜誌、飛機之訂位、季節性農產品等。廣義地說，某些生命週期極短的流行性商品(如手機)和具無法儲存特性之特殊節慶商品(如聖誕樹)，也可視為單期季節性商品。因為單期季節性商品儲存壽命(shelf life)有限，需求預測對生產或銷售該類商品之公司甚為重要。一般而言，需求預測的良否(預測誤差大小)和投資在預測上的預算密切相關。但在實務上，需求預測往往被視為不具生產力之工作，企業不但在做預測時過於草率，甚至預算也不足，結果可能造成公司營運計劃不實及財務報表失真等情形。故如何訂定合理需求預測預算，為本文所欲解決之問題。

2. 文獻探討

需求預測是整合生產與行銷的一個重要環節，而預測方法更是影響需求預測結果之重大因素。Chambers, Mullick and Smith (1971)將預測方法分成定性法(qualitative techniques)、時間序列分析(time series analysis)及因果模型(causal models)三類。決策者在選擇預測方法時，須考慮預測之目的、被預測系統之成份及動態、歷史資料之重要性，和產品的生命週期等。

此外，使用者背景也是選擇預測方法時須考慮之因素。Carbone et al. (1983)經實驗發現，使用者之技術專業(technical expertise)、主觀判斷調整(judgment adjustment)雖不會影響預測方法之績效，但對生手來說，簡單預測方法之績效較佳。接著在預測方法比較上，Korepela 與 Tuominen(1996)認為AHP(analytic hierarchy process)預測方法包含數量及非數量的變數，並使用群體決策方式，故優於傳統預測方法。Sani 與 Kingsman (1997)針對間斷型低需求量商品以模擬方式，比較十種存貨系統及五種預測方法(簡單指數平滑法一參數每兩週更新、簡單指數平滑法一參數每十八週更新、Croston's 預測方法[考慮每次需求量大小和需求量間隔時間，類似指數平滑法之預測方法]、移動平均法、代理商預測法)，他們發現代理商預測法，移動平均法和 Croston's 預測方法有較小平均悔恨值，而移動平均法和 Croston's 預測方法有較佳服務水準，整體來說移動平均法較其餘預測方法為佳。以上是單一預測方法間之

比較。Makridakis 與 Winkler (1983)則透過資料分析，發現結合多個預測方法所得組合預測值(combined forecasts)優於單一預測方法所得預測值，且組合之預測方法數目愈多，組合預測值之精確度愈高。而 Bopp(1985)也證實此一觀點，並認為在相同預算金額下，決策者應組合兩較便宜(較簡單)的預測方法，而非只使用單一且較昂貴(較複雜)的預測方法。Lawrence, Edmundson 與 O'Connor (1986)進一步發現，組合預測方法所得預測值，的確優於單一預測方法所得預測值，但只適用於短期預測或較簡單預測。且組合方式是以機械方式(如：平均數、移動平均數)而非憑直覺方式。

當從事需求預測時，通常須對需求量做某些假設或估計。例如需求量分配函數可從過去銷售資料來估計，然而如果有缺貨產生，銷售量會小於需求量，故以過去銷售資料來估計需求量，可能會造成低估情況。Lau 與 Lau (1996)提出解決需求量低估之方法，首先以 Kaplan-Meier 產品限制方法(product limit method)將可觀察需求量資料(無缺貨時銷售資料)之分配找出，再以每小時平均銷售量去推估缺貨時需求量，最後將兩者資料合併，以找出真正需求量分配函數。至於缺貨對預測精確度之影響，Wecker(1978)分析發現預測偏差(forecast bias)之大小和缺貨次數相關，而預測誤差變異數(forecast error variance)之大小、方向和需求量變異數係數(coefficient of variance)、相關係數(serial correlation)相關。例如：低變異數係數和高相關係數可導致較大預測誤差變異數。

以上文獻可作為從事需求預測者之參考，至於單期季節性商品問題，其類似於傳統之報童問題(newsboy problems)。Khouja (1999)曾針對報童問題作過詳細國外文獻探討，為避免重覆，本文不另外討論。而在國內文獻中，莊忠柱與陳淼勝(民 89)在自由分配報童問題假設下，考慮非固定訂購時點(提早訂購可享有價格折扣，但須承受預測偏差之成本)之狀況，決策者以全檢方式挑出不良品，其目標函數為使期望成本最小，但受限於缺貨率上限，決策變數為訂購量和訂購時點。林進財等(民 89)則考慮多個銷售站之多站報童問題，以模擬方法比較分散式及集中式存貨政策，研究發現最佳分散式存貨水準大於最佳集中式存貨水準之充要條件，為單位缺貨成本大於單位持有成本。在需求預測方面，李智明(民 91)對單期季節性商品需求預測之完全資訊價值加以研究，理論上完全資訊價值為需求預測預算之上限，而完全資訊價值之優點是在應用時不受限於預測方法及預測誤差函數之種類，但完全資訊

價值所得結論只能當作需求預測預算之重要參考。

本文之目的，在於找出售價及各項成本參數對需求預測之真正影響，以幫助決策者訂定合理需求預測預算。

3. 模型建構與求解

考慮一單一季節性商品的週期性生產系統，假定此系統每期作業程序如下：

在每期期初，行銷部門經理首先必須決定需求預測之投資金額，然後執行需求預測，再將預測結果告知生產部門經理。接著生產部門經理必須綜合需求量之預測值及過去需求記錄，來決定商品當期生產量。商品一旦生產後，須在當期銷售，每期期末未售出的商品，因季節性關係，都將被進一步地處理掉(低價求售或其他方式處理)；即每期皆無存貨。但若生產量小於需求量，未滿足需求之消費者將轉向其他生產者購買，且下次可能不再續購，造成商譽損失；即每期皆無積欠訂單情況(no backorders)。此外，我們考慮生產前置成本(setup cost)，但不考慮系統的維護(maintenance)時間及成本。

接著模型推導如下：

令 X 為隨機變數，代表每一期商品需求量，在每期期初，X 的真正結果 x 是未知的。令 $W|X=x$ 為 x 之估計變數，$W|X=x$ 的分配及精確度(誤差)可由過去的預測值及實際值記錄而得到。假設過去記錄顯示 $W|X=x$ 為 x 之不偏估計變數，即 $E(W|X=x)=x$。令 c_f 為需求預測之投資金額，因為需求預測的精確度(誤差)和投資在預測上的金額相關，故定義 $W|X=x$ 的標準差為 $\sigma(c_f)$，且 $\sigma(c_f)$ 為 c_f 之遞減函數。此外，實務上需求預測之投資金額具最小下限 c_0，故定義 $\sigma(c_f)=\infty$, $c_f<c_0$，即當需求預測之投資金額小於 c_0 時，需求預測無精確度可言(決策者不作需求預測，只使用事前資訊)，故

$$\sigma'(c_f)=\begin{cases}0, & c_f<c_0\\ \dfrac{d\sigma(c_f)}{dc_f}<0, & c_0\le c_f\end{cases} \tag{1}$$

注意本文假設 $\sigma(c_f)$ 和 c_f 相關，和真正需求值 x 及其他參數、變數無關，因若 $\sigma(c_f)$ 和 x 有關，可能使問題無法求解。假設 $W|X=x$ 為 $N(x, \sigma^2(c_f))$，定義 $g(w|X=x)$ 為 $W|X=x$ 的機率密度函數。而 X 代表每一期商品需求量，定義 $h(x)$ 為 X 的機率密度函數。在此 X 的機率分配被視成需求量之事前資訊(prior information)，可由過去的需求記錄，或以 Lau 與 Lau(1996)方法得到。假設 X 為常態分配 $N(\theta, \tau^2)$，且 $\theta >> 3\tau$ 即需求量為負數之機率可以忽略。則 W 的機率密度函數 $u(w)$ 如下：

$$u(w) = \int_0^{\infty} g(w|X = x)h(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2(c_f) + \tau^2}} \exp(-\frac{(w-\theta)^2}{2(\sigma^2(c_f) + \tau^2)})$$

故 W 為 $N(\theta, \sigma^2(c_f) + \tau^2)$。假設 $\theta >> 3(\sigma^2(c_f) + \tau^2)^{1/2}$，$c_f \geq c_0$，即預測值為負數之機率可忽略。回想 $W|X = x$ 為 x 之估計變數，即當 $W|X = x$ 之觀察值為 w，則 x 之預測值為 w。此條件變數 $X|W = w$ 可視為事後變數，其機率密度函數如下:

$$f(x|W = w) = \frac{g(w|X = x)h(x)}{u(w)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho(c_f)} \exp(\frac{-(x - \mu(c_f, w))^2}{2\rho^2(c_f)}) \quad (2)$$

$$\mu(c_f, w) = E(X|W = w) = \begin{cases} \theta, & c_f < c_0 \\ \dfrac{\sigma^2(c_f)\theta + \tau^2 w}{\sigma^2(c_f) + \tau^2}, & c_0 \leq c_f \end{cases} \quad (2a)$$

$$\rho^2(c_f) = Var(X|W = w) = \begin{cases} \tau^2, & c_f < c_0 \\ \dfrac{\tau^2\sigma^2(c_f)}{\sigma^2(c_f) + \tau^2}, & c_0 \leq c_f \end{cases} \quad (2b)$$

由上式得知事後變數 $X|W = w$ 為 $N(\mu(c_f, w), \rho^2(c_f))$。以上有關需求預測之推導為貝氏估計法，其結果類似 Crowston, Hausman 與 Kampe II (1973)。

推論一：$\min\{w, \theta\} \leq \mu(c_f, w) \leq \max\{w, \theta\}$。

證明：由(2a)知事後平均數 $\mu(c_f, w)$ 可視為事前平均數 θ 和預測值 w 之加權平均數，且兩權數和為 1。故得證。

推論一之管理涵意:預測值變異數 $\sigma^2(c_f)$ 愈大代表預測值 w 愈不精確，故給予事前平均數 θ 之權數愈大；若事前變異數 τ^2 愈大代表事前平均數 θ 愈不精確，故給予預測值 w 之權數愈大。此結果類似指數平滑法(exponential smoothing)。

推論二：$\rho^2(c_f) \leq \min\{\sigma^2(c_f), \tau^2\}$。

證明：由(2b)得證。

推論二之管理涵意:事後變異數較事前變異數和預測值變異數小，此說明本貝

氏估計法確實可減少需求不確定。

推論三：當 $c_f \geq c_0$ 時，事後標準差$\rho(c_f)$是需求預測投資金額 c_f之遞減函數。

證明：對$\rho(c_f)$求其相對 c_f之一階導數即可證明，故省略。

推論三之管理涵意:增加需求預測之投資金額 c_f可降低需求不確定性$\rho(c_f)$。

接著以時間後推方式，先考慮生產經理之決策。令 Y 為當期商品生產量。生產經理的目標是找出在總利潤最大時的最適生產量。定義階梯函數 $H(Y)=1$，若 $Y>0$；$H(Y)=0$，若 $Y\leq 0$。故系統在生產前(預測後)之期望總利潤 $E(TP_p)$如下：

$$\max_{Y\geq 0} E(TP_p) = p[\int_0^Y xf(x|W=w)dx + \int_Y^\infty Yf(x|W=w)dx] - [c_sH(Y) + c_uY$$

$$+c_d\int_0^Y (Y-x)f(x|W=w)dx + c_l\int_Y^\infty (x-Y)f(x|W=w)dx\,] \quad (3)$$

上式中 p、c_s、c_u、c_d及 c_l分別代表單位售價、生產前置成本、單位生產成本、單位存貨處理成本和單位商譽損失成本。

推論四：當生產量 $Y>0$，生產前之期望總利潤 $E(TP_p)$是 Y之凹面向下函數。

證明：請參考 Silver, Pyke, Peterson (1998)第 404 頁至第 406 頁之證明。

令 Φ 為標準常態變數之分配函數(cdf)，Φ^{-1} 為其逆函數(inverse function)。令(3)對 Y之一階導數為 0，則不考慮生產前置成本的最適生產量 Y_1如下：

$$\frac{p+c_l-c_u}{p+c_l+c_d} = \int_0^Y f(x|W=w)dx = \int_0^{k_1}\phi(z)dz \quad (4)$$

$$Y_1 = \max\{\rho(c_f)k_1 + \mu(c_f, w), 0\},\ \ k_1 = \frac{Y_1-\mu(c_f,w)}{\rho(c_f)} = \Phi^{-1}\left(\frac{p+c_l-c_u}{p+c_l+c_d}\right) \quad (4a)$$

當生產前置成本及 $Y=0$之不連續點被考慮時，(3)中最適生產量 Y^*如下：

$$Y^* = \arg\{\max\{E(TP_p(0)), E(TP_p(Y_1))\}\}. \quad (5)$$

其中 arg 表示在 $E(TP_p)$最大下找尋最適生產量 Y^*。

定理一：當最適生產量 $Y^*>0$ 時，Y^*是單位售價 p 和單位商譽損失成本 c_l之遞增函數，是單位生產成本 c_u和單位存貨處理成本 c_d之遞減函數，但生產前置成本 c_s對 Y^*無影響力。

證明：請參考附錄一。

定理一之管理涵意:當最適生產量 $Y^*>0$ 時，若單位售價 p 增加，為增加利潤，

應增加產量。若單位生產成本 c_u 增加，為避免侵蝕利潤，應減少產量。若單位存貨處理成本 c_d 增加，為避免存貨過多，應減少產量。若單位商譽損失成本 c_l 增加，為避免缺貨，應增加產量。而生產前置成本 c_s 對 Y^* 無影響力。理由是生產前置成本對是否生產具影響力，可是一旦決定後，其對生產量大小無影響力。

接著可將(3)以下列公式化簡。

$$\int_Q^\infty tm(t)dt = \varepsilon \int_k^\infty (z-k)\phi(z)dz + Q(1-\Phi(k)) \tag{6}$$

$$\int_k^\infty (z-k)\phi(z)dz = \phi(k) - k(1-\Phi(k)) > 0 \tag{7}$$

$$\int_k^\infty z\phi(z)dz = \phi(k),\ \ k = \frac{Q-\lambda}{\varepsilon} \tag{8}$$

上式中 T 之機率分配為 $N(\lambda, \varepsilon^2)$，其機率密度函數為 $m(t)$；Z 之機率分配為 $N(0, 1)$，其機率密度函數為 $\phi(z)$。有關於(6)、(7)及(8)請參考 Silver, Pyke, Peterson (1998)第 723 頁至第 724 頁之說明。接著由(6)、(7)、(8)及(4)，可將(3)化簡如下：

$$E(TP_p) = \begin{cases} -c_l\mu(c_f, w) < 0, & Y^* = 0 \\ (p-c_u)\mu(c_f, w) - (p+c_l+c_d)\rho(c_f)\phi(k_1) - c_s, & Y^* > 0 \end{cases}$$

(9)

定理二：

(1).當 $Y^* = 0$ 時，單位售價 p、單位生產成本 c_u、單位存貨處理成本 c_d 和生產前置成本 c_s 對 $E(TP_p)$ 沒有影響，但 $E(TP_p)$ 是單位商譽損失成本 c_l 之線性遞減函數。

(2).當 $Y^* > 0$ 時，$E(TP_p)$ 是單位售價 p 之凹面向上曲線性遞增函數，是單位生產成本 c_u、單位存貨處理成本 c_d 和單位商譽損失成本 c_l 之凹面向上曲線性遞減函數，是生產前置成本 c_s 之線性遞減函數。

證明：請參考附錄二。

定理二之管理涵意：當最適生產量 $Y^* = 0$ 時(系統不生產)，只有單位商譽損失成本會影響利潤(有缺貨發生)，故若單位商譽損失成本增加，利潤將減少。而當 $Y^* > 0$ 時，若單位售價增加，獲利空間加大，利潤將增加；若各項成本因素增加，獲利空間減少，利潤將減少。

接著，由(4a)得知 Y^* 大於 0 之必要條件如下：

$$\rho(c_f)k_1 + \mu(c_f, w) > 0 \tag{10}$$

將(2a)(2b)代入(10)，可得下式:

$$w > -\sigma^2(c_f)\{k_1 / \rho(c_f) + \theta / \tau^2\} = r(c_f) \tag{11}$$

此外，由(5)得知 Y^* 大於 0 之另一必要條件為 $E(TP_p(Y_1)) - E(TP_p(0)) > 0$。由(9)得此另一必要條件如下:

$$w > \frac{\sigma^2(c_f)}{(p+c_l-c_u)\rho^2(c_f)}\{c_s + (p+c_l+c_d)\rho(c_f)\phi(k_1)\} - \frac{\theta\sigma^2(c_f)}{\tau^2} = s(c_f) \tag{12}$$

定理三：存在一需求量預測值之門檻值 $w^* = \max\{r(c_f), s(c_f), 0\}$。

證明：因 $w > 0$，綜合(11)、(12)得證。

定理三之管理涵意:需求量預測值之門檻值 w^*(the threshold of forecast)，具下列特性：若 $w \le w^*$，$Y^* = 0$；其他，$Y^* > 0$。即若需求量預測值 w 大於門檻值 w^*，系統將生產，此時利潤可能為正數或負數，即使為負數也必大於商譽損失；若需求量預測值 w 小於或等於門檻值 w^*，系統將不生產，此時利潤等於商譽損失。門檻值之存在代表系統必須在生產(主要為前置成本)與不生產(商譽損失)間作選擇。

推論六：當 $w^* = r(c_f) > 0$ 時，$r(c_f)$是單位售價 p 和單位商譽損失成本 c_l 之遞減函數，是單位生產成本 c_u 和單位存貨處理成本 c_d 之遞增函數，而生產前置成本 c_s 對 $r(c_f)$無影響力。

證明：請參考附錄三。

推論七：當 $w^* = s(c_f) > 0$ 時，$s(c_f)$是單位售價 p 和單位商譽損失成本 c_l 之遞減函數，是單位生產成本 c_u、單位存貨處理成本 c_d 和生產前置成本 c_s 之遞增函數。

證明：請參考附錄四。

定理四：當 $w^* > 0$ 時，門檻值 w^* 是單位售價 p 和單位商譽損失成本 c_l 之遞減函數，是單位生產成本 c_u 和單位存貨處理成本 c_d 之遞增函數。起初生產前置成本 c_s 對門檻值 w^* 可能無影響力，但隨 c_s 之增加 w^* 終於遞增。

證明：由定理三及推論六、七得證。

定理四之管理涵意:門檻值愈低，顯示決策者愈願意生產。若單位售價 p 增加，為了增加利潤，決策者愈願意生產，故門檻值遞減。若單位生產成本 c_u 增加，為了避免侵蝕利潤，決策者愈不願意生產，故門檻值遞增。若單位存

貨處理成本 c_d 增加，為了避免存貨過多，決策者愈不願意生產，故門檻值遞增。若單位商譽損失成本 c_l 增加，為了避免缺貨，決策者愈願意生產，故門檻值遞減。此外在特定參數結構下，生產前置成本 c_s 對 w^* 無影響力，但隨生產前置成本增加，終究決策者愈不願意生產，故門檻值遞增。

接著考慮行銷經理之決策。從定理四及(9)，可知當 $w > w^*$，$Y^* > 0$，行銷經理之利潤如下:

$$TP_1 = (p - c_u)\mu(c_f, w) - (p + c_l + c_d)\rho(c_f)\phi(k_1) - c_s - c_f \tag{13}$$

而當 $w \le w^*$，$Y^* = 0$，行銷部門經理之利潤如下:

$$TP_2 = -[c_f + c_l\mu(c_f, w)] \tag{14}$$

(13)(14)為已知 $W = w$ 下兩種可能狀況。因為 W 之機率分配為 $N(\theta, \sigma^2(c_f) + \tau^2)$ 且 W 的機率密度函數為 $u(w)$。故行銷經理預測前之期望利潤為:

$$\max_{c_f \ge 0} E(TP_m) = \int_{w^*}^{\infty} TP_1 u(w)dw + \int_0^{w^*} TP_2 u(w)dw$$

上式可藉由(6)(7)(8)化簡如下：

$$\max_{c_f \ge 0} E(TP_m) = \{(p + c_l - c_u)\theta - (p + c_l + c_d)\rho(c_f)\phi(k_1) - c_s\}\int_{k_2}^{\infty}\phi(z)dz$$

$$+ (p + c_l - c_u)\phi(k_2)\frac{\tau^2}{\sqrt{\sigma^2(c_f) + \tau^2}} - c_l\theta - c_f,\ k_2 = \frac{w^* - \theta}{\sqrt{\sigma^2(c_f) + \tau^2}} \tag{15}$$

接著，求(15)對 c_f 之一階導數，令其為 0，即可求出最適需求預測投資金額 c_f^*，所求出之值須以(15)對 c_f 之二階導數加以驗證是否使 $E(TP_m)$ 極大。然而 c_f^* 並無確切公式(no closed form)，故其求解需借助電腦軟體。

4. 資料分析與結果

4.1 基本個案參數設定

假設某專業水產養殖公司因看好廣大北美洲消費市場，特於中美洲設立養殖場，養殖高經濟價值淡水魚蝦，就近銷往北美。該公司每期皆須進行以下作業。在每期期初，公司之行銷部門經理必須決定需求預測之投資金額，

然後執行需求預測，並將預測結果告知生產部門經理。接著生產部門經理必須根據過去銷售記錄及本期需求量之預測值，來決定當期魚蝦養殖數量。一旦魚蝦長成，必須在當期販售。否則在期末時，尚未售出的魚蝦，將以低價求售或以其他方式處理。但是如果消費者買不到當期產品，消費者將轉向其他公司購買，甚至可能下期不再續購，造成公司商譽損失。該魚蝦單位售價 p 為\$US2.2 元/磅，單位商譽損失成本 c_l 估計為\$US0.05 元/磅。生產部門估算養殖前置成本 c_s(整理養殖池和機具)為\$US350,000 元/次，單位生產成本 c_u(主要為飼料和人工成本)為\$US0.8 元/磅，期末單位存貨處理成本 c_d 為\$US0.1 元/磅。公司行銷部門依據過去銷售記錄，假設每期魚蝦之需求量為常態分配，其平均數 θ 為 300,000 磅，標準差 τ 為 60,000 磅(符合 $\theta >> 3\tau$ 假設)。回想在模型推導中，需求量預測變數 $W|X = x$ 為需求量 x 之不偏估計變數，其標準差為 $\sigma(c_f)$，而 $\sigma(c_f)$ 代表預測之誤差，為需求預測投資預算 c_f 之遞減函數。此外 $\sigma(0) = \infty$, $c_f < c_0$，而 c_0 為需求預測投資預算 c_f 之最小投資金額。若行銷部門依據過去預測值及需求預測投資預算記錄，假設 $\sigma(c_f)$ 為需求預測投資預算 c_f 之遞減函數：$\alpha = 75,000$, $\beta = 0.2$, γ=4,000, c_0 = \$10,

$$\sigma(c_f) = \begin{cases} \infty, & 0 \le c_f < c_0 \\ \alpha c_f^{-\beta} + \gamma, & c_f \ge c_0 \end{cases}$$

$$\sigma'(c_f) = \frac{d\sigma(c_f)}{dc_f} = -\alpha\beta c_f^{-\beta-1} < 0\,,\ c_f \ge c_0$$

$$\sigma''(c_f) = \frac{d^2\sigma(c_f)}{dc_f^2} = \alpha\beta(\beta+1)c_f^{-\beta-2} > 0\,,\ c_f \ge c_0$$

故 $\sigma(c_f)$ 是 c_f 之凹面向上遞減函數，此符合先前假設。而參數 α, β, γ 可以統計迴歸方法求出。注意 $\sigma(\infty) = \gamma$, 故 γ 代表存在於預測變數之先天性誤差，不會因投資預算之增加而減少。此外，本個案中 $\theta >> 3(\sigma^2(c_0) + \tau^2)^{1/2} = 78,955$，且 $\sigma(c_f)$ 為需求預測投資預算 c_f 之遞減函數，故滿足模型推導中假設，$\theta >> 3(\sigma^2(c_f) + \tau^2)^{1/2}$，$c_f \ge c_0$。注意 $\sigma(c_f)$ 有許多可能的函數型式，不過 $\sigma(c_f)$ 一定是 c_f 之遞減函數。

4.2 基本個案結果及敏感度分析

電腦結果顯示，預測前利潤 $E(TP_m)$為$60,234，投資在需求預測費用為$2,314 約為 $E(TP_m)$之 3.8%。而需求量預測值之門檻值為 233,984 磅。假設經需求預測後，需求量預測值為 310,000 磅，因其大於門檻值，故生產經理決定生產 314,636 磅，而生產前(預測後)期望總利潤 $E(TP_p)$為$65,646。注意生產量和生產前期望總利潤，會隨需求量預測值不同而改變。接著，進行模型之敏感度分析。

(1).模型對單位售價之敏感度分析

本研究將單位售價變動的範圍設為$1.2 至$4.3。若定義單位毛利率=100%*(單位售價-單位生產成本)÷單位售價，則本研究中單位毛利率約為33.3%至 81.4%，應能反應真實現象。

圖 1 及圖 2 顯示當單位售價很小時($p < \$1.6$)，廠商選擇不生產，故預測前利潤 $E(TP_m)$等於商譽損失，而投資在需求預測費用 c_f為$0。原因是單位售價過於接近單位生產成本，在沒有能力彌補生產前置成本情況下，選擇不生產，寧可遭受商譽損失。當$\$1.6 < p$ 時，廠商已有能力彌補生產前置成本，開始選擇生產，故其預測前利潤，隨著單位售價增加而成凹面向上曲線性增加；投資在需求預測費用 c_f，先成凹面向上後成凹面向下曲線性增加，當 p 大約為$2.0 時，有反曲點。

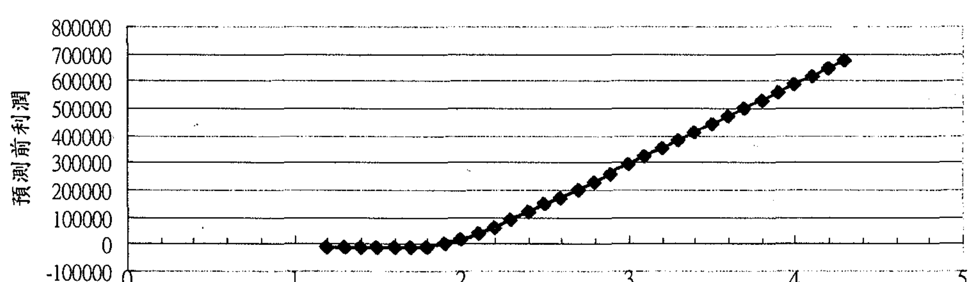

圖1：單位售價對預測前利潤之影響

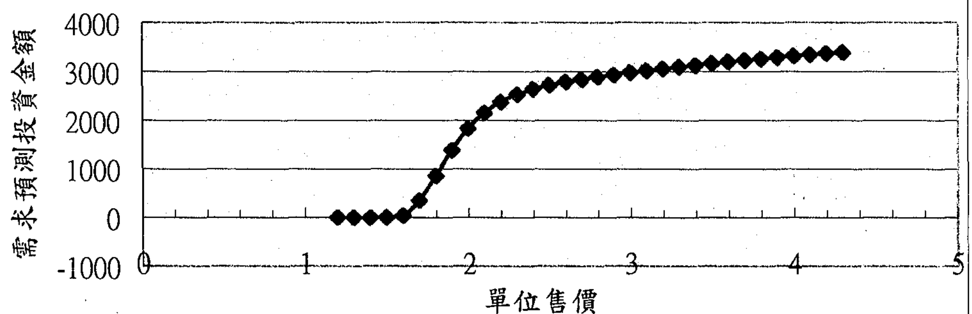

圖2：單位售價對需求預測投資金額之影響

綜合以上分析，當單位售價很接近單位生產成本(單位毛利率單薄)，需求預測不十分重要。而當單位售價較大時(單位毛利率較大)，需求預測十分重要。以上現象是合理的，因為當單位售價很接近單位生產成本，決策者不必作需求預測，即可知不生產，故需求預測不十分重要。而當單位售價較大時，獲利空間較大，精確需求預測可增加利潤。

(2).模型對單位生產成本之敏感度分析

本研究將單位生產成本變動的範圍設為\$0.05 至\$1.60，在此情形下，單位生產成本 c_u 和單位售價 p 之比約為 0.023 至 0.73，應屬合理範圍。

圖 3 顯示當 $c_u <$ \$1.4 時，廠商之預測前利潤 $E(TP_m)$隨著單位生產成本增加而成凹面向上曲線性減少。其原因是毛利率逐漸微薄，故利潤逐漸下滑。當\$1.4 $< c_u$ 時，單位生產成本過於接近單位售價，在沒有能力彌補生產前置成本情況下，選擇不生產，寧可遭受商譽損失。故預測前利潤 $E(TP_m)$保持固定且為負數。圖 4 顯示當 $c_u <$ \$1.2 時，廠商投資在需求預測費用 c_f，隨著單位生產成本增加而先成凹面向下曲線性增加，再成凹面向下曲線性減少，而當 c_u 約為\$0.75 時，投資在需求預測費用 c_f有極大值。當\$1.2 $< c_u <$ \$ 1.4 時，投資在需求預測費用 c_f，成凹面向上曲線性減少，在 c_u 約為\$1.2 時，有反曲點。當\$1.4 $< c_u$時，投資在需求預測費用 c_f為 0。以上投資在需求預測費用變動之原因是：當單位生產成本逐漸增加時，毛利率逐漸微薄，利潤逐漸下滑，起初狀況並不明確，需求預測可幫助決策，故 $c_u <$ \$0.75 時，投資在需

求預測費用遞增。當\$0.75 < c_u < \$1.4 時，狀況逐漸明確，故投資在需求預測費用遞減。而當 c_u 約為\$0.75 時，投資在需求預測費用有極大值。當\$1.4 < c_u 時，明顯地選擇不生產，故投資在需求預測費用為 0。

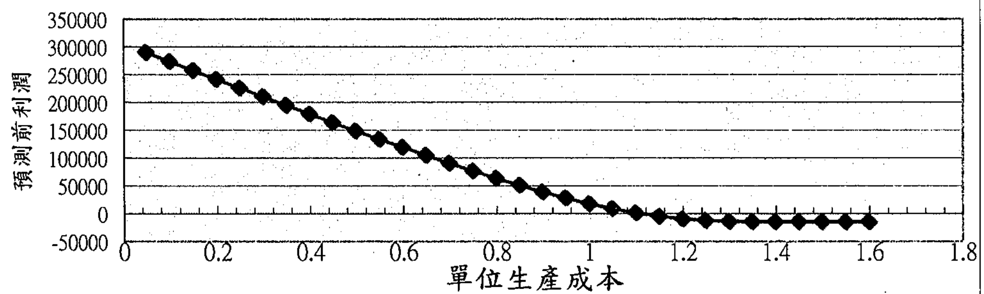

圖3：單位生產成本對預測前利潤之影響

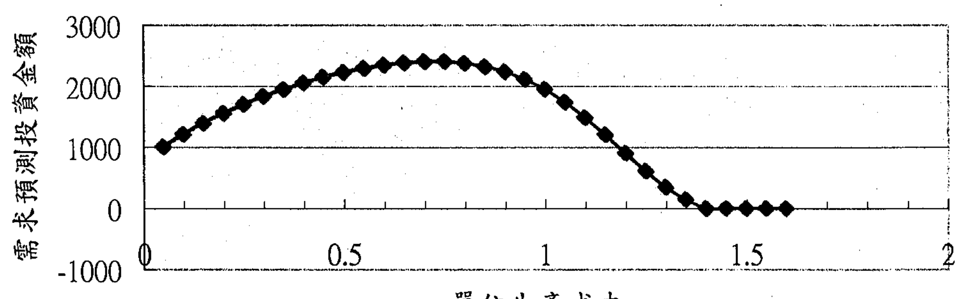

圖4：單位生產成本對需求預測投資金額之影響

綜合以上分析，當單位生產成本很接近或遠小於單位售價時，需求預測不重要，因為明顯地選擇不生產或生產，作決策容易。但當單位生產成本小於但不很接近單位售價時(本例中，當單位生產成本和單位售價之比約為 0.34)，需求預測十分重要，因需求預測費用在此有極大值。

(3).模型對單位存貨處理成本之敏感度分析

本研究將單位存貨處理成本變動的範圍設為$-0.75 至$3.90，因實務上，存貨處理可能有淨收益，而單位存貨處理成本也可能大於單位售價(高污染產品)。

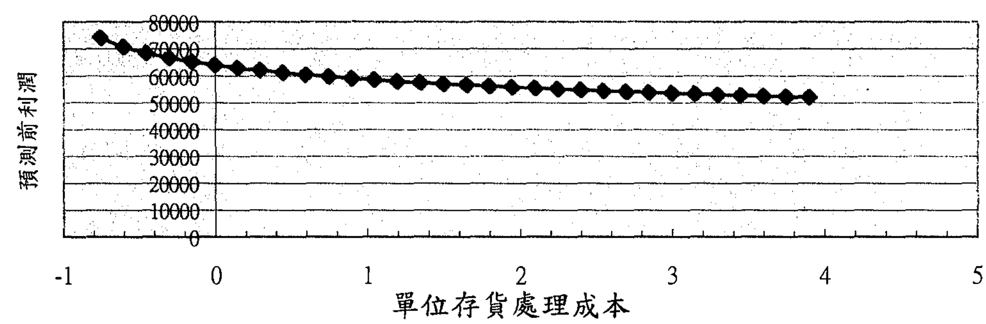

圖5：單位存貨處理成本對預測前利潤之影響

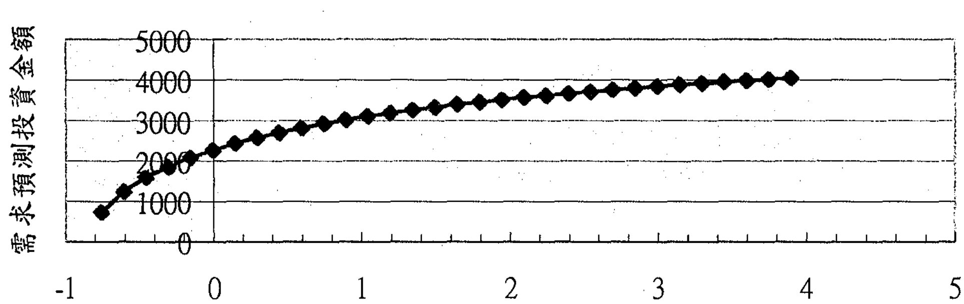

圖6：單位存貨處理成本對需求預測投資金額之影響

圖 5 及圖 6 顯示廠商其預測前利潤，隨著單位存貨處理成本增加而成凹面向上曲線性減少；而投資在需求預測費用 c_f，成凹面向下曲線性增加。其原因是單位存貨處理成本之增加，減低了獲利能力，故預測前利潤減少，但精確需求預測可避免存貨過多，故投資在需求預測費用 c_f增加。注意當$5,000,000 $< c_d$ 時(未顯示於圖 5 及圖 6)，廠商會選擇不生產，故預測前利潤 $E(TP_m)$等於商譽損失，而投資在需求預測費用 c_f為$0。其原因是單位存貨處理成本過大，寧可不生產而遭受商譽損失，再精確需求預測也無益。

綜合以上分析，當單位存貨處理成本較大時，需求預測十分重要，因為精確需求預測可避免存貨過多。當單位存貨處理成本超乎預期大時(實務中可能不致於發生)，因為預測成本高於效益，需求預測失去重要性，其投資金額為$0。

(4).模型對生產前置成本之敏感度分析

本研究將生產前置成本變動的範圍設為$0 至$1,085,000，因若生產程序很簡易，則生產前置成本可為$0。若生產程序很複雜，則生產前置成本可能很大。

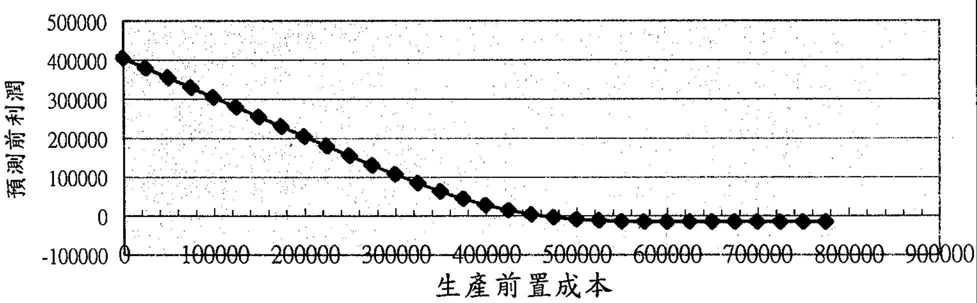

圖7：生產前置成本對預測前利潤之影響

圖 7 及圖 8 顯示當生產前置成本較小時($c_s < \$625,000$)，廠商其預測前利潤，隨著生產前置成本增加，成凹面向上曲線性減少。而投資在需求預測費用 c_f，先成微幅增加(幾乎固定)，再成凹面向下後凹面向上曲線性減少，在 c_s 大約為$275,000 時，$c_f$ 有極大值；而在 c_s 大約為$475,000 時，$c_f$ 有反曲點。其原因是當 $c_s < \$625,000$ 時，生產前置成本之增加，減低了獲利能力，故預測前利潤減少，而需求預測開始有其效益但效益逐漸降低，故投資在需求預測費用 c_f，先成微幅增加再減少。當$\$625,000 < c_s$ 時，廠商選擇不生產，故預測前利潤 $E(TP_m)$等於商譽損失，而投資在需求預測費用 c_f 為$0。其原因是生產前置成本過大，寧可不生產遭受商譽損失，再精確需求預測也無益。

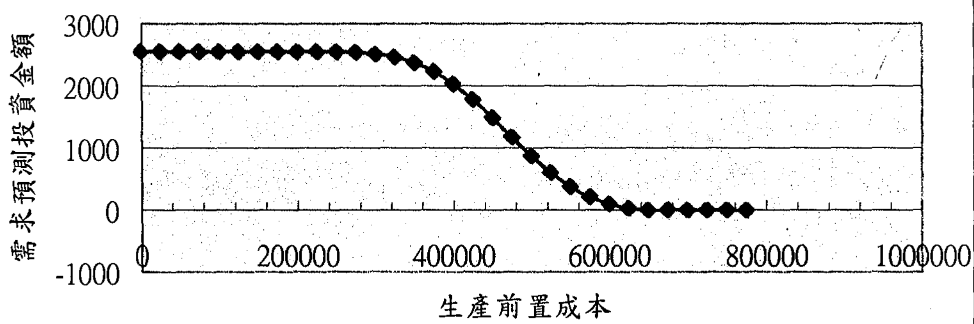

圖8：生產前置成本對需求預測投資金額之影響

綜合以上分析，當生產前置成本較小時，需求預測十分重要。但生產前置成本過大時，因為明顯地只有選擇不生產，故需求預測變得不重要。

(5).模型對單位商譽損失成本之敏感度分析

本研究將單位商譽損失成本變動的範圍設為$0 至$1.55。因若顧客不在乎買不到產品，則商譽損失為$0。另外，單位商譽損失成本一般不大於單位售價。注意為了展現單位商譽損失成本之影響，特將 c_s 之值重設為$650,000。

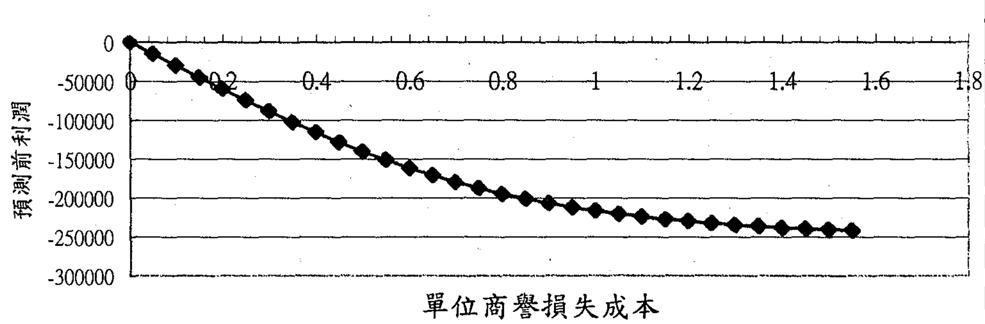

圖9：單位商譽損失成本對預測前利潤之影響

圖 9 及圖 10 顯示，當單位商譽損失成本 c_l < $0.1 時，廠商選擇不生產，故其預測前利潤，隨著單位商譽損失成本增加而成線性減少，而投資在需求

預測費用 c_f為\$0。原因是 c_l < \$0.1 時，生產前置成本相較商譽損失成本大，生產所得利潤沒有能力彌補生產前置成本，寧可不生產遭受商譽損失，再精確需求預測也無益。而當\$0.1< c_l時，廠商選擇生產，其預測前利潤，隨著單位商譽損失成本增加，成凹面向上曲線性減少，而投資在需求預測費用 c_f，先成凹面向上曲線性增加，再成凹面向下曲線性增加，當 c_l = \$0.55 時，c_f有反曲點。其原因是當\$0.1< c_l時，缺貨所引起商譽損失成本已超過生產前置成本，廠商開始選擇生產，但單位商譽損失成本之增加，降低獲利空間，故預測前利潤減少。此外，精確需求預測可減少缺貨損失，故投資在需求預測費用 c_f增加。

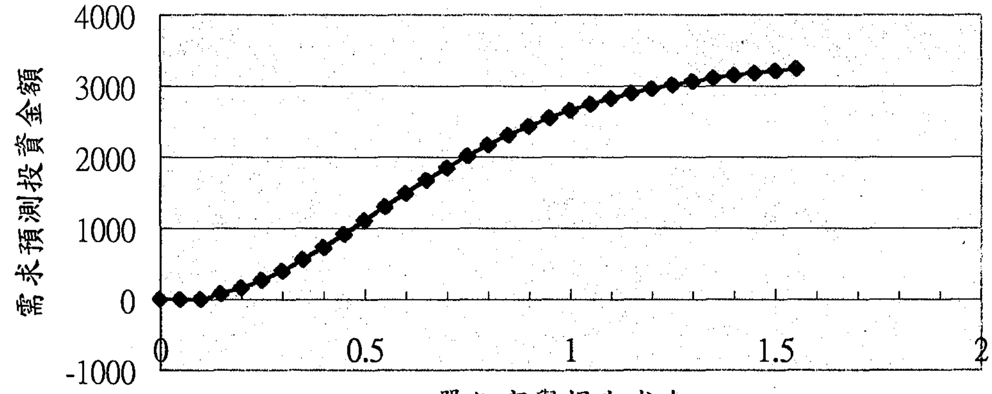

圖10：單位商譽損失成本對需求預測投資金額之影響

綜合以上分析，當單位商譽損失成本較大時，需求預測十分重要。主要原因是當單位商譽損失成本較大時，精確的需求預測可減低缺貨損失之衝擊。

5. 結論與研究限制

本文針對單期季節性商品之生產及銷售系統發展出一簡易模型，探討系統之決策者應如何訂定需求預測投資預算和生產策略。本文重要結論歸納如下：

(1).存在一門檻值。若需求量預測值大於此門檻值，系統將會生產；若需求量預預測值小於或等於此門檻值，系統將不生產。

(2).本研究發現需求預測在以下情況中十分重要：當單位售價、或單位存貨處理成本、或單位商譽損失成本較大時；當單位生產成本在某適當值時，或當生產前置成本較小時。

然而本研究之限制，除了必須滿足單期季節性商品(或報童問題)之假設外，系統還必須保有過去需求及預測值紀錄，且必須使用貝氏估計法。實務上，許多單期季節性商品之生產或銷售企業保有過去需求及預測紀錄，即使其預測方法不同，仍可改採本文之貝氏估計法，作為制定需求預測預算之參考。

最後，本文未來研究方向可分析不同預測值標準差函數(預測誤差函數)之影響，或朝實證方面進行，或發展多種或多期季節性商品模型，以期有更多發現。

6. 附錄

附錄一：定理一之證明，須利用下列 Leibnitz's theorem：

$$I(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\frac{dI(x)}{dx}=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy+f(x,y_2)\frac{dy_2(x)}{dx}-f(x,y_1)\frac{dy_1(x)}{dx}$$

由(4)以 Leibnitz's theorem 求 Y^*對 p，c_u，c_d，c_l，c_s和 c_f之一階導數得證：

$$\frac{dY^*}{dp}=\frac{dY^*}{dc_l}=\frac{c_u+c_d}{(p+c_l+c_d)^2 f(Y^*|W=w)}>0,$$

$$\frac{dY^*}{dc_u}=\frac{-1}{(p+c_l+c_d)f(Y^*|W=w)}<0,$$

$$\frac{dY^*}{dc_d}=\frac{-(p+c_l-c_u)}{(p+c_l+c_d)^2 f(Y^*|W=w)}<0$$

$$\frac{dY^*}{dc_s} = 0$$

附錄二：定理二之證明。將 $Y^* = 0$ 和 $Y^* > 0$ 分別代入(3)，再以 Leibnitz's theorem 分別求 $E(TP_p)$ 對 p，c_u，c_d，c_l 和 c_s 之一階及二階導數，利用(4)化簡，並以定理一判斷正負符號如下：

$$\frac{dE(TP_p)}{dp} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ \int_0^{Y^*} xf(x|W = w)dx + Y^* \int_{Y^*}^{\infty} f(x|W = w)dx > 0, & Y^* > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2E(TP_p)}{dp^2} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ (\int_{Y^*}^{\infty} f(x|W = w)dx)\dfrac{dY^*}{dp} > 0, & Y^* > 0 \end{cases},$$

$$\frac{dE(TP_p)}{dc_u} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ -Y^* < 0, & Y^* > 0 \end{cases},$$

$$\frac{d^2E(TP_p)}{dc_u^2} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ -\dfrac{dY^*}{dc_u} > 0, & Y^* > 0 \end{cases}$$

$$\frac{dE(TP_p)}{dc_d} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ -\int_0^{Y^*} (Y^* - x)f(x|W = w)dx < 0, & Y^* > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2E(TP_p)}{dc_d^2} = \begin{cases} 0, & Y^* = 0 \\ -(\int_0^{Y^*} f(x|W = w)dx)\dfrac{dY^*}{dc_d} > 0, & Y^* > 0 \end{cases}$$

$$\frac{dE(TP_p)}{dc_l} = \begin{cases} -\mu(c_f, w) < 0, & Y^* = 0 \\ -\int_{Y^*}^{\infty} (x - Y^*)f(x|W = w)dx < 0, & Y^* > 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2E(TP_p)}{dc_l^2}=\begin{cases}0, & Y^*=0\\ (\int_{Y^*}^{\infty} f(x|W=w)dx)\dfrac{dY^*}{dc_l}>0, & Y^*>0\end{cases}$$

$$\frac{dE(TP_p)}{dc_s}=\begin{cases}0, & Y^*=0\\ -1<0, & Y^*>0\end{cases},$$

$$\frac{d^2E(TP_p)}{dc_s^2}=0$$

附錄三：推論六之證明。首先由(11)分別求 $r(c_f)$對 p，c_u，c_d，c_l，c_s和 c_f之一階導數，利用(4)化簡，以定理一判斷正負符號如下：

$$\frac{dr(c_f)}{dp}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dk_1}{dp}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dY^*}{dp}\frac{f(Y^*|W=w)}{\phi(k_1)}<0$$

$$\frac{dr(c_f)}{dc_u}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dk_1}{dc_u}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dY^*}{dc_u}\frac{f(Y^*|W=w)}{\phi(k_1)}>0$$

$$\frac{dr(c_f)}{dc_d}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dk_1}{dc_d}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dY^*}{dc_d}\frac{f(Y^*|W=w)}{\phi(k_1)}>0$$

$$\frac{dr(c_f)}{dc_l}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dk_1}{dc_l}=-\frac{\sigma^2(c_f)}{\rho(c_f)}\frac{dY^*}{dc_l}\frac{f(Y^*|W=w)}{\phi(k_1)}<0$$

$$\frac{dr(c_f)}{dc_s}=0$$

附錄四：推論七之證明。

從定理三，$w^*=s(c_f)$之必要條件是 $s(c_f)>0$ 且 $s(c_f)-r(c_f)>0$，由(11)(12)

$$\phi(k_1) > \frac{-c_s}{(p+c_l+c_d)\rho(c_f)} + \frac{(p+c_l-c_u)\theta\rho(c_f)}{(p+c_l+c_d)\tau^2} > 0 \text{, if } w^* = s(c_f),$$

$$\phi(k_1) > \frac{-c_s}{(p+c_l+c_d)\rho(c_f)} - \frac{(p+c_l-c_u)k_1}{(p+c_l+c_d)} > 0 \quad , \quad \text{if} \quad w^* \quad = \quad s(c_f),$$

(16)

由(12)求 $s(c_f)$對 p 和 c_u 之一階導數，利用定理一、三化簡如下：

$$\frac{ds(c_f)}{dp} = \frac{\sigma^2(c_f)\{-c_s-(c_u+c_d)\rho(c_f)\phi(k_1)\}}{(p+c_l-c_u)^2\rho^2(c_f)}$$

$$-\frac{(c_u+c_d)\sigma^2(c_f)k_1}{(p+c_l-c_u)(p+c_l+c_d)\rho(c_f)}$$

$$\frac{ds(c_f)}{dc_u} = \frac{\sigma^2(c_f)\{c_s+(p+c_l+c_d)\rho(c_f)\phi(k_1)\}}{(p+c_l-c_u)^2\rho^2(c_f)} + \frac{\sigma^2(c_f)k_1}{(p+c_l-c_u)\rho(c_f)}$$

再將(16)代入上式經簡化得

$$\frac{ds(c_f)}{dp} < \frac{-c_s\sigma^2(c_f)}{(p+c_l-c_u)\rho^2(c_f)(p+c_l+c_d)} < 0$$

$$\frac{ds(c_f)}{dc_u} > 0$$

同樣地，

$$\frac{ds(c_f)}{dc_l} \doteq \frac{ds(c_f)}{dp} < 0$$

此外，由(12)求 $s(c_f)$對 c_d之一階導數，利用定理一、三化簡如下：

$$\frac{ds(c_f)}{dc_d} = \frac{\sigma^2(c_f)\{(p+c_l+c_d)\phi(k_1)+(p+c_l-c_u)k_1\}}{(p+c_l-c_u)(p+c_l+c_d)\rho(c_f)}$$

由(7)得$\phi(k_1) > -\Phi(k_1)k_1 = -(p + c_l - c_u)k_1/(p + c_l + c_d)$，將此結果代入上式得

$$\frac{ds(c_f)}{dc_d} > 0$$

接著由(12)求 $s(c_f)$對 c_s 一階導數：

$$\frac{ds(c_f)}{dc_s} = \frac{\sigma^2(c_f)}{(p+c_l-c_u)\rho^2(c_f)} > 0$$

7. 參考文獻

李智明(民 91)，「單期季節性商品需求預測之完全資訊期望價值」，*管理學報*，第十九卷第一期，59-75 頁。

林進財、張世佳、謝秀然(民 89)，「多站報童決策問題之最佳存貨水準比較」，*銘傳學報*，第十卷第二期，141-150 頁。

莊忠柱、陳淼勝(民 89)，「缺貨水準受限下具有品管機制之分配未知擴充報童問題」，*管理學報*，第十六卷，第三期，第 517-533 頁。

Bopp, A.E. (1985), "On Combining Forecasts: Some Extensions and Results," *Management Science*, 31 (12), 1492-1498.

Carbone, R., A. Andersen, Y. Corriveau and P.P. Corson (1983), "Comparing for Different Time Series Methods the Value of Technical Expertise, Individualized Analysis, and Judgmental Adjustment," *Management Science*, 29 (5), 559-566.

Chambers, C., S.K. Mullick, and D.D. Smith (1971), "How to Choose the Right Forecasting Technique," *Harvard Business Review*, July -August, 45-74.

Crowston, W.B., W.H. Hausman, and W.R. Kampe II (1973), "Multistage Production for Stochastic Seasonal Demand," *Management Science*, 19(8), 924-935.

Khouja, M. (1999), "The Single-Period (News-Vendor) Problem: Literature Review and Suggestions for Future Research," *Omega*. 27, 537-553.

Korpela, J. and M. Tuominen (1996), "Inventory Forecasting with a Multiple Criteria Decision Tool," *International Journal of Production Economics*, 45, 159-168.

Lau, H. and A.H. Lau (1996), "Estimating the Distributions of Single-Period

Items Having Frequent Stockouts," *European Journal of Operational Research*, 92, 254-265.

Lawrence, M.J., M.J. Edmundson, and M.J. O'Connor (1986), "The Accuracy of Combining Judgmental and Statistical Forecasts," *Management Science*, 32 (12), 1521-1532.

Makridakis, S. and R.L. Winkler (1983), "Averages of Forecasts: Some Empirical Results," *Management Science*, 29(9), 987-996.

Sani, B. and B.G. Kingsman (1997), "Selecting the Best Periodic Inventory Control and Demand Forecasting Methods for Low Demand Items," *Journal of the Operational Research Society*, 48(7), 700-713.

Silver, E. A., D.F. Pyke, and R. Peterson (1998), *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, John Wiley & Sons, Inc.

Wecker, W.E. (1978), "Predicting Demand from Sales Data in the Presence of Stockouts," *Management Science*, 24 (10), 1043-1054.