質數並不孤獨：孿生質數猜想

作者 王元

作者簡介

王元為中國科學院院士，從華羅庚做解析數論研究，在哥德巴赫猜想有重要貢獻。所著《華羅庚傳》獲第一屆吳大猷科普獎金籤獎。

一

自然數可以分成三類：(1) 1；(2)質數 p，即僅含1與 p 爲因數的大於1的自然數，如2、3、5、$\cdots$；(3)合成數 n，它含有兩個以上的質因數，如4、6、8、$\cdots$。

首先是歐幾里得證明了質數有無窮多，接下來的一個自然的問題是孿生質數問題。在質數集合中，我們觀察到有些質數對，如

$$(3,5)\quad(5,7)\quad(11,13)\quad(17,19)\cdots$$

它們都是質數，而其差爲2，一般說來，當 p、$p+2$ 都是質數，我們就稱它們爲一對孿生質數。所謂孿生質數猜想是說：

（1） **孿生質數對有無窮多**。

這是數學中迄今尚未解決的著名難題之一。實際上，這個猜想表明，質數不是孤獨的，永遠會有一些質數以2爲距離成對地出現！

猜想是什麼時候被提出來的呢？若以文獻記載爲準，則可追溯到法國數學家波里納克（Alphonse de Polignac，1849）。有人將它（或隱含地）歸屬於歐幾里得或艾勒托塞尼斯（Eratosthenes）。以紀念歐幾里得證明質數有無窮多及艾勒托塞尼斯用篩法構造質數表。

二

1900年，希爾伯特（David Hilbert）在第二屆國際數學家大會上，向20世紀數學家提出了23個待解決的數學問題，其中第八問題包括黎曼假說（Riemann hypothesis，簡稱RH）（見[2]）及兩個變數 x、y 的線性代數方程

（2） $ax+by=c$

在質數集合中的求解問題，其中a、b、c 爲滿足某必要條件的整數。

（a）當 $a=1$、$b=-1$、$c=2$ 時，（2）有無窮多對質數解，即孿生質數猜想。

（b）當 $a=b=1$，c 爲偶數且 $c\geq 4$ 時恆有解，即哥德巴赫猜想（Goldbach conjecture）。

1912年，藍道（Edmond Landau）在國際數學家大會的報告中提出了四個重大的數論問題供研究，孿生質數猜想與哥德巴赫猜想是其中的兩個。

1920年前後，哈第（Godfrey Hardy）、拉曼努真（Srinivasa Ramanujan）、李托伍德（John Littlewood）創立了堆壘數論的新方法——圓法（circle method）。哈第與李托伍德利用圓法對孿生質數猜想與

名詞解釋 **廣義黎曼假說**：將黎曼假說中的黎曼 ζ 函數，改用其他有數論或幾何意義的 L 函數來取代的猜想。

哥德巴赫猜想重新表述如下：

命 $\pi_2(x)$ 表示不超過 x 的孿生質數對數

及 $\gamma_2(n)$ 表示將偶數 n 表示為兩個質數之和的表示法個數，且 $\log x$ 表自然對數。則有

（3） $\pi_2(x) \sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x}$ 　與

（4） $\gamma_2(n) \sim 2\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n}{\log^2 n}$ ，其中 p 表示質數及

（5） $\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=0.6601...$

顯然（4）、（5）分別比孿生質數猜想與哥德巴赫猜想更深刻。至今尚不能證明（4）、（5），困難在於無法估計圓法中圓的「劣弧」上的積分的上界，即使假定了廣義黎曼假說（簡稱GRH）亦然。

由於（4）的右端與偶數 n 有關，即使（4）成立，也只能導致哥德巴赫猜想對充分大的偶數成立，而（3）不跟某數相關，所以有人認為（3）比（4）的提法更合理。

三

不少人用數值計算來檢查孿生質數猜想。已知小於 10^5 的自然數中有1,224對孿生質數，即 $\pi_2(10^5)=1,224$，還有以下結果：$\pi_2(10^6)=8,164$ 、 $\pi_2(3.3\times10^7)=152,892$ 、 $\pi_2(10^{11})=224,376,048$ 。還知道一些大的孿生質數對，例如 $107,570,463\times10^{2,250}\pm1$。目前所知道的最大孿生質數對是2011年發現的 $3,756,801,695,685\times10^{666,669}\pm1$。

四

關於孿生質數猜想的重大成果首先是由篩法（sieve）得到的。篩法導源於公元前250年的所謂艾勒托塞尼斯篩法。在一定範圍內的質數表就是以這個方法為基礎造出來的。

1919年，布倫（Viggo Brun）本質上改進了艾勒托塞尼斯篩法，提出了他的新篩法並成功地應用到數論中許多極困難與重要的問題，孿生質數猜想與哥德巴赫猜想就是其中最主要的兩個，而且關於這兩個猜想的結果常常是相伴產生的，所以從篩法的眼光看，這兩個問題是「姊妹問題」。

布倫證明的定理為

（6） 存在無窮多個整數 n，使 n 與 $n+2$ 分別都是不超過9個質數之積，簡記為 $(9,9)$。

我們可以類似地定義 (a,b)。孿生質數猜想就是證明 $(1,1)$。

關於哥德巴赫猜想的相應結果為「每個充分大的偶數，都是兩個質因數個數不超過9的整數之和」。我們以後不再表述哥德巴赫猜想的相應結果了。

歐拉曾證明過 $\sum_p 1/p=\infty$，這裡 p 表示質數，從而推知質數有無窮多。布倫用他的方法證明了

（7） $\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}<\infty$ ，此處 p^* 過所有的孿生質數。

如果級數 $\sum_{p^*} 1/p^*$ 發散，則孿生質數猜想就成立了。遺憾的是由 $\sum_{p^*} 1/p^*$ 的收斂，並不能得出孿生質數對的數目是有限還是無窮的結論！

不少數學家改進了布倫方法與他的結果，現在將這些成果列於下：

（8） (7, 7)，拉德馬克（Hans Rademacher，1924）；(6, 6)，厄司特曼（Theodor Estermann，1932）；
(5, 7) (4, 9) (3, 15) (2, 366)，黎奇（Giovanni Ricci，1937）；
$(5,5)$，布赫史塔伯（Alexander Buchstab，1938）；$(4,4)$，布赫史塔伯 (1940)

1941年，庫恩（P. Kuhn）發表了他的加權篩法，從而可以得到

（9） (a,b)，其中 $a+b\leq 6$。

1947年，塞爾伯格（Alte Selberg）給出了艾勒托塞尼斯篩法另一個重大改進。他於1950年宣稱用他的方法可以得出 $(2,3)$，但未給出細節，基於他的方法，出現了下面的結果：

（10） $(3,4)$，王元（1956）；$(3,3)$，亞斯柯・維諾格拉多夫（Askold Vinogradov，1957）
$(2,3)$，王元（1957、1958）

塞爾伯格關於 $(2,3)$ 的證明細節是1991年發表的。

五

對於 (a,b) 中有一個等於1的情況，匈牙利數學家雷尼（Alfréd Rényi ）首先於1947年證明了

（11） $(1,c)$，此處 c 是一個大的未明確給定的常數。

過去，$(1,c)$ 型的結果都是建立在GRH之上的。

命 $\vartheta>0$ ，若對於任何 $A>0$ ，$\vartheta>\varepsilon>0$，我們有

（12） $$\sum_{q\leq X^{\vartheta-\varepsilon}}\max_{\substack{a\\(a,q)=1}}\left|\sum_{\substack{p\equiv a \mod q\\p\leq X}}\log p-\frac{X}{\varphi(q)}\right|\ll_{\varepsilon,A}\frac{X}{\log^A X}$$

其中 q，a 表示正整數，p 表示質數及 $\varphi(q)$ 表示歐拉函數*，即模 q 的既約剩餘類（primitive residue classes modulo q）個數，則稱 ϑ 是一個允許標（admissible level）。

雷尼 $(1,c)$ 的證明實際上依賴於他證明了存在某個小 ϑ 使（12）成立。潘承洞首先證明了 $\vartheta=1/3$ 並由此推出 $(1,5)$。以後潘承洞又與巴班（Mark Barban）獨立地證明了 $\vartheta=3/8$，並得出

（13） (1, 4)，潘承洞（1962, 1963）、巴班（1963）

邦比耶里（Enrico Bombieri）與維諾格拉多夫獨立地證明了 $\vartheta=1/2$ 是一個允許標，從而得出

（14） $(1,3)$，邦比耶里（1965)、維諾格拉多夫（1965）

最後，應用塞爾伯格篩法，某種形式的庫恩加權篩法，允許標 $\vartheta=1/2$ 及他自己的轉換原理（Switching principle），陳景潤成功地證明了

（15） $(1,2)$，陳景潤（1966, 1973）

這是迄今為止，基於篩法所能達到的最佳結果。

*簡單的說，這個歐拉函數就是比 q 小而且與 q 互質的自然數個數，如 $\varphi(8)=4$。

名詞解釋　**席格零點**：某種假設的特別形式狄利克雷 L 函數的零點，如果存在就是廣義黎曼假說的反例。

六

相鄰質數差的估計是解析數論的中心問題之一。命 $d_n = p_{n+1} - p_n$，此處 p_n 表示第 n 個質數，我們需估計 d_n 的上、下界。d_n 的上界估計，即相鄰質數間的最大間隙估計。目前最好的估計爲

（16）　$d_n \ll p_n^{\frac{21}{40}}$

這是貝克（Roger Baker）、哈爾曼（Glyn Harman）、品茨（János Pinz）2001年的結果。注意在黎曼假說RH之下，可以證明

（17）　$d_n \ll \sqrt{x}\log x$ ，科拉貿（Harald Cramér，1920）

此處 d_n 表示不超過 x 的最大相鄰質數差。

現在我們來陳述關於 d_n 的下界估計問題，即尋找最小可能的間隙 d_n，使之對於無窮多個整數 n 成立。

如果孿生質數猜想成立，則 d_n 的下界問題完滿地解決完了，答案就是2。由質數定理 $\pi(x) \sim x/\log x$ 此處 $\pi(x)$ 爲不超過 x 的質數個數，可知 d_n 的平均値爲 $\log p_n$。因此我們可以考慮量

$$\triangle = \liminf_{n\to\infty} \frac{d_n}{\log p_n}$$

的上界估計。一個非尋常的估計是1926年，哈第與李托伍德在廣義黎曼假說GRH之下證明的，即

（18）　$\triangle \le \frac{2}{3}$ ，哈第/李托伍德（1926），GRH

不假定未經證明的猜想，艾狄胥（Paul Erdös）首先證明了

（19）　$\triangle \le 1 - c$，艾狄胥（1940），其中 c 是一個可計算的小常數。

基於允許標 $\vartheta = 1/2$（見（12）），則有

（20）　$\triangle = \frac{2+\sqrt{3}}{8} = 0.4665\ldots$，邦比耶里/戴文波特（Harold Davenport）（1966）

最佳記錄爲

$\triangle \le e^{-\gamma} \times 0.4425\ldots = 0.2484\ldots$ ，麥爾（Helmut Maier，1988），其中 γ 爲歐拉常數。

七

關於孿生質數猜想，我們來介紹赫斯布朗（Roger Heath-Brown）的一個重要的條件結果（1983）。他證明了由席格零點（Siegel zero）（見[2]））的存在性可以推出孿生質數猜想。更一般些，對於每個偶數 k，均存在無窮多對質數，其差爲 k。

很自然地，絕大多數數學家都不相信有席格零點。例如，由GRH成立就能推出席格零點不存在。因此，一般認爲經過赫斯布朗的結果來證明孿生質數猜想是沒有什麼希望的。

現在我們來陳述關於孿生質數猜想較弱的版本：

（21）　**小間隔猜想**：$\triangle = 0$　與

（22）　**有界間隔猜想**：$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \le 7 \times 10^7$

顯然（22）比（21）強得多。實際上，上一節的工作之理想，即在於證明小間隔猜想。

名詞解釋 **允許 k 元數組**：一種描述質數模式的方式。例如允許2元數組或允許2元數對 $(0,2)$ 表示 $(n,n+2)$ 形式的質數對，也就是孿生質數。允許 k 元數組又稱質數 k 元數組。

2005年，郭德史東（Daniel A. Goldston）、品茨與伊耳迪倫（Cem Yıldırım）出色地證明了小間隔猜想：

（23） $\triangle=0$，郭德史東/品茨/伊耳迪倫（2005）

關於（23）的一個簡化且自含的證明由郭德史東/本橋洋一/品茨/伊耳迪倫（2006）得到。

關於有界間隔猜想，郭德史東/品茨/伊耳迪倫（2009）有條件地加以證明了。詳言之，他們證明了

（24） 若（12）存在允許標 $\vartheta>1/2$，則對 $k\geq C(\vartheta)$，任意允許 k 元數組（admissible k-tuple）（見[2]））必有無窮多次包含兩個以上的質數，此處 $C(\vartheta)$ 爲僅依賴於 ϑ 的常數。郭德史東/品茨/伊耳迪倫（2009）

特別他們證明了

（25） 若存在允許標 $\vartheta>0.971$，則 $k\geq 6$。

6元數組 $(n,n+4,n+6,n+10,n+12,n+16)$ 是允許6元數組，所以由愛略特/哈伯斯覃猜想（Elliott-Halberstam conjecture），即$\vartheta=1$推出

（26） $\liminf\limits_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)\leq 16$

我們知道由GRH只能推出 $\vartheta=1/2$，所以 $\vartheta>1/2$ 就意味著在很多算術序列中，質數的分布是異常有規則的，所以要證明有允許標 $\vartheta>1/2$ 是極困難的！

2013年，張益唐出人意料地取得了劃時代的成就，他成功地證明了有界間隔猜想，詳言之，他證明了

（27） $\liminf\limits_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)\leq 7\times10^7$，張益唐 (2013)

這說明有一個常數 $d(\leq 7\times10^7)$，存在無窮多對質數，其差爲 d。這該是多麼美妙啊！

八

關於哥德巴赫猜想亦有重要進展。最近，法國數學家賀夫郭特（Harald Helfgott）證明了

（28） 每個奇數 $n\geq 7$ 都是三個質數之和。

早在1937年，伊凡・維諾格拉多夫（Ivan M. Vinogradov）就證明了，對於充分大的奇數 n，即 $n\geq C$，結論（28）成立。維諾格拉多夫的方法允許有效地定出常數 C。關於 C 的確定，有波洛茲金（K. Borozdkin）、陳景潤、王天澤等人的工作。但跟理想結果 $C=7$ 還相去甚遠。1997年在GRH之下，迪烏耶（J.-M. Deshouillers）、艾芬格（G. Effinger）、特里耳（Te Riele）與季諾維夫（G. Zinoviev）證明了 $C=7$。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

延伸閱讀

+ Derbyshire, John《質數魔力》（上）（下）(2005) 天下文化。
+ Pintz, János, Landau's problems on primes, *J. de Theorie des Nombres de Bordeaux*, (2009)。這是本文的主要參考文章。也可從他的網頁下載 http://www.renyi.hu/~pintz/pjapr.pdf。
+ 王元《王元談求學之路》（2010）大連理工大出版社。關於黎曼假說RH、廣義黎曼假說GRH、席格零點、允許k元數組這些概念都可以在本書找到。