高斯消去法與她的數學家們

作者　格卡 Joseph F. Grcar
譯者　蘇惠玉

重點摘要

/ 高斯消去法的演算法最早出現於中國。在西方，線性方程組的代數解法最後由牛頓集大成，歸納了大家熟知的代入消去法與等價消去法。

/ 為了最小平方法與地圖測量的社會需要，高斯發展了專業的消去法演算法，成為電腦時代之前，計算員實務上最常用的聯立方程組解法。

/ 最遲發展的矩陣代數統整各種消去法，並透過馮諾曼應用於早期電腦發展，但電腦的發展又改變了高斯消去法的面貌。

高斯消去法普遍被認爲是解決聯立線性方程組的唯一方法，如同歐拉所指出的，它是最自然而然的方法(der natürlichste Weg)[21]。因爲高斯消去法直接解決線性問題，所以它在計算科學與工程學中，是一項必備技術；因而間接地它也持續對增進知識與推進人類福祉作出貢獻。怎樣才叫**自然**，需依脈絡而定，所以這個演算法伴隨著需要解決的問題與計算的技巧，已經有過多次的改變。

高斯消去法闡明了一種不常被數學史家解釋的現象。數學家們通常被描繪成「發現者」，就好像學問的進展像是一道慢慢升起的簾幕，揭露出一直隱藏在其後、靜靜等待被發現的大廈。與此恰恰相反，高斯消去法是活的數學，在最近的兩百年裡它成功地突變以符合變動的社會需求。

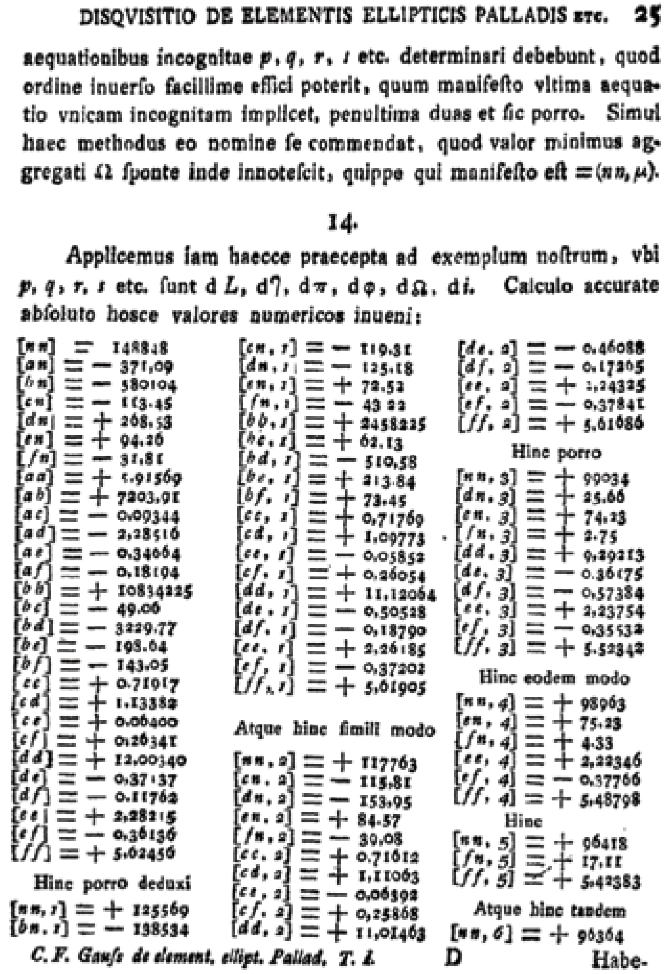
許多人曾經對高斯消去法做出貢獻，包括高斯他計算特殊例子的方法被19世紀的專業計算員所採用。對這段歷史的錯誤印象最終導致高斯不僅被冠上名字，更被當成是這個主題的鼻祖。現在我們提到「高斯消去法」雖是表彰這位大數學家的貢獻，但並不是要把發明權歸因於他。

本文概述高斯消去法直到20世紀中葉的演變[31][32]。此法在古代，只曾在中國出現過，而在近代歐洲獨立於中國的發展則經歷了三個時期。第一時期來自於牛頓開始的教科書方法；第二時期爲專業計算員所採用的方法，這個方法源自於高斯，而他顯然受到拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）的啓發；最後爲幾位學者的矩陣代數詮釋，其中包括馮諾曼（John von Neumann）。可能再也沒有其他主題像它這樣，經由這麼多位大數學家之手而塑造成型。

古代數學

能夠被表示成聯立線性方程組的問題，可見於最早期的數學文獻，但是並不普遍。大約千片已經出版的楔形泥板中紀錄了西元前2000年，在伊朗與伊拉克間的底格里斯河與幼發拉底河谷地區所教授的數學[61, table B.22]。大部分的泥板是各種表格記載，但有一些泥板是教學用的。在VAT8389號泥板上的第一個問題要求兩塊田地的面積，它們的面

高斯(1777-1855)設計了第一個專業的方法，取代一般的消去法。



DISQVISITIO DE ELEMENTIS ELLIPTICIS PALLADIS etc. 25

aequationibus incognitae p, q, r, s etc. determinari debebunt, quod ordine inuerſo facillime effici poterit, quum manifeſto vltima aequatio vnicam incognitam implicet, penultima duas et ſic porro. Simul haec methodus eo nomine ſe commendat, quod valor minimus aggregati Ω ſponte inde innoteſcit, quippe qui manifeſto eſt = (nn, μ).

14.

Applicemus iam haecce praecepta ad exemplum noſtrum, vbi p, q, r, s etc. ſunt d L, d ϡ, d π, d φ, d Ω, d i. Calculo accurate abſoluto hosce valores numericos inueni:

[nn] = 148848
[an] = − 371,09
[bn] = − 580104
[cn] = − 113.45
[dn] = + 208,53
[en] = + 94.26
[fn] = − 31,81
[aa] = + 5,91569
[ab] = + 7203,91
[ac] = − 0,09344
[ad] = − 2,28516
[ae] = − 0,34664
[af] = − 0,18194
[bb] = + 10834225
[bc] = − 49.06
[bd] = − 3229.77
[be] = − 198.64
[bf] = − 143,05
[cc] = + 0.71917
[cd] = + 1,13382
[ce] = + 0.06400
[cf] = + 0,26341
[dd] = + 12,00340
[de] = − 0,37137
[df] = − 0,11762
[ee] = + 2,28215
[ef] = − 0,36136
[ff] = + 5,62456

Hinc porro deduxi

[nn, 1] = + 125569
[bn, 1] = − 138534

[cn, 1] = − 119,31
[dn, 1] = − 125.18
[en, 1] = + 72.52
[fn, 1] = − 43 22
[bb, 1] = + 2458225
[bc, 1] = + 62.13
[bd, 1] = − 510,58
[be, 1] = + 213.84
[bf, 1] = + 73.45
[cc, 1] = + 0,71769
[cd, 1] = + 1,09773
[ce, 1] = − 0,05852
[cf, 1] = + 0,26054
[dd, 1] = + 11,12064
[de, 1] = − 0,50528
[df, 1] = − 0,18790
[ee, 1] = + 2,26185
[ef, 1] = − 0,37202
[ff, 1] = + 5,61905

Atque hinc ſimili modo

[nn, 2] = + 117763
[cn, 2] = − 115,81
[dn, 2] = − 153,95
[en, 2] = + 84.57
[fn, 2] = − 30,08
[cc, 2] = + 0,71612
[cd, 2] = + 1,11063
[ce, 2] = − 0,06392
[cf, 2] = + 0,25868
[dd, 2] = + 11,01463

[de, 2] = − 0,46088
[df, 2] = − 0,17205
[ee, 2] = + 2,24325
[ef, 2] = − 0,37841
[ff, 2] = + 5,61686

Hinc porro

[nn, 3] = + 99034
[dn, 3] = + 25,66
[en, 3] = + 74,23
[fn, 3] = + 2.75
[dd, 3] = + 9,29213
[de, 3] = − 0.36175
[df, 3] = − 0,57384
[ee, 3] = + 2,23754
[ef, 3] = − 0,35532
[ff, 3] = + 5.52342

Hinc eodem modo

[nn, 4] = + 98963
[en, 4] = + 75.23
[fn, 4] = + 4.33
[ee, 4] = + 2,22346
[ef, 4] = − 0,37766
[ff, 4] = + 5,48798

Hinc

[nn, 5] = + 96418
[fn, 5] = + 17,11
[ff, 5] = + 5,42383

Atque hinc tandem

[nn, 6] = + 96364

C. F. Gauſs de element. ellipt. Pallad. T. I. D Habe-

高斯計算高斯消去法的過程

積和爲1800 sar，其中一塊田的租金是每 3 sar 付 2 silà 的穀物，另一塊田租金爲每 2 sar 付 1 silà 的穀物，且第一塊田的總租金超過另一塊田 500 silà。如果你記不住這些數據，這並不意外，根據何伊魯帕（J. Høyrup）的翻譯[43]，這個泥板的作者常常提醒讀者要「記在你的腦袋裡」。從某個角度來看，當這些泥板中的問題能夠被寫成聯立方程式時，通常會有一個方程式不是線性的，這一點暗示了線性方程組在巴比倫人課程中的地位不太重要。

聯立線性方程組在古代文獻之中只有一處是顯著的，即《九章算術》。它是中國一本撰寫於2000多年前的問題集。在第八卷的前18個相似的問題裡，從三種等級的稻米中，以整束稻禾的形式問及穀物的產量：若有上等稻米3束、中等稻米2束，下等稻米1束，合起來可得米39斗；以及其他兩個相似的稻禾束條件。古代中國的數學家用算籌代表數字來闡述計算過程，在此，他們將算籌排放在正方形的小框中，這些正方形小框排成一個矩形，稱爲算表（基本上就是一種古代的試算表）。在下面的矩形中最右邊的一行代表問題中第一個稻米的條件。

1	2	3	上等
2	3	2	中等
3	1	1	下等
26	34	39	可得

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

其解法即是高斯消去法。其他行配合右邊的一行消去最上面的數字。這種算法藉由搭配將每一行乘以另一行最上方的數字，再從左邊的行減去右邊的行且保持數字是整數。哈特（Roger Hart）在他的專著裡解釋了整個計算過程[36]。

直到近代歐洲早期，《九章算術》以及其後數百年間出現、顯然衍生自它的亞洲文獻是僅有的處理一般線性問題的著作[36][53][55]。希臘和羅馬代數中主要存留下來的作品爲丟番圖（Diophantus）的問題集《算術》（*Arithmatica*），這本書被認爲成書於公元三世紀。第一卷的問題19爲找出四個數，使得任

作者簡介

格卡是伊利諾大學香檳分校的數學博士並主修資訊工程，畢業後曾在加州森迪亞國家實驗室與勞倫斯柏克萊國家實驗室工作。近年對資訊科學與數學史頗有著述。

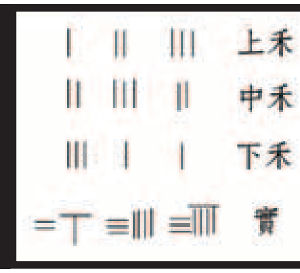
意三個的和比第四個數多出給定的數量[41]。丟番圖以一個新的未知數（像是所有數字的和）簡化重複的條件到只剩一個，由此其他的未知數就能夠找到。現存最古老的印度數學典籍是公元五世紀末阿耶波多（Āryabhata）的《阿耶波多曆算書》(*Āryabhatiya*)，他的線性問題和丟番圖類似，但是更一般化，可以有任意多個未知數。第二章的問題29利用分別少掉一個未知數的其他數之總和，以求出各個數的值[58]。歐洲代數的直接來源爲阿拉伯文獻，巴格達的花剌子模（Al-Khwarizmi）和他的後繼者能夠解決相當於二次方程式的問題，但是他們似乎並沒有考慮超出丟番圖的特例之外的聯立線性方程組。舉例來說，拉席德（R. Rāshid）所寫的阿拉伯數學史[59]裡引述的一個線性方程組，它的起源曾經由魏匹克(F. Weopcke)追溯到丟番圖的《算術》[75]。

教科書中的消去法

丟番圖與阿耶波多解決能被表示成聯立線性方程組的問題，但沒有如《九章算術》給出一般化的解法。造成這個現象的一個明顯的前提，是表達問題的技術。《九章算術》有算表，而歐洲有符號代數。擁有表達的能力並不意味著能夠立即使用，方程式的概念還需要一些時日才能發展出來[42]。即使在當時，根據克洛伊達（Mary Kloyda）的調查[46]，文藝復興晚期1550年到1660年間有107本代數著作問世，但是只有四本書有提及聯立線性方程組。

克洛伊達發現最早的例子來自於佩勒提耶-杜曼（Jacques Peletier du Mans）[57]。他解決了卡當諾（Girolamo Cardano）的一個問題：當每個人的錢數加上其他人錢數的部分之和爲已知時，找出三個人各自擁有的錢數。佩勒提耶首先採取卡當諾的方法，這種解法係經由口語上的推理，而符號代數只等於是簡便的速記。這種論述僅能有兩個變數，而將第三個變數以其他兩個變數的代數式來表示。佩勒提耶接著重新解一次這個問題，解法幾乎如同我們今日所

九章算術 的方程問題




《九章算術》，取自《中國科技典籍通匯》

《九章算術》一書作者不知為誰，經考據目前已知本書是先秦九數的發展，經西漢張蒼、耿壽昌先後刪補，在西漢中葉成書。全書共分九卷，包括二百四十六個問題與解法。有關《九章算術》的註解，最為重要為魏晉人士劉徽所做的注。

《九章算術》第八卷「方程」中提出的「方程術」即為中國算法解線性方程組的方法。其第一問為：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

在中算中，所謂的「程」有記量、考核之意，也就是說測量穀物之產量取上、中、下禾若干捆脫去外殼成米計算產量，每做一次這樣的試驗就叫「一程」。而「方」指的是算籌布列整齊如「方陣」一般，但是呈現會「方」的外形，是因為「接如物數程之」，也就是程數必須等於物數，亦即方程式的個數必須與未知數的個數相同。

《九章算術》方程術所說的解法，就如現今高中所教的高斯消去法一般，只是將條件以算籌排列成行，再利用「遍乘」（將要消去的未知數之係數變成一樣）與「直除」（相減消去下一行中的一個未知數）的方式運算。


牛頓(1643-1727)彌補了教科書裡的鴻溝。

做的，首先從三個變數與方程式著手，僅使用符號的操作（在此改寫成現代符號）：

$$\begin{array}{rcl} 2R+A+B &=& 64 \\ R+3A+B &=& 84 \\ R+A+4B &=& 124 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2R+4A+5B &=& 208 \\ 2R+4A+5B &=& 208 \\ 3A+4B &=& 144 \\ 3R+4A+2B &=& 148 \\ 3R+2A+5B &=& 188 \\ 6R+6A+7B &=& 336 \\ 6R+6A+24B &=& 744 \\ 17B &=& 408 \end{array}$$

佩勒提耶超長的計算過程暗示了有系統地消去未知數的方法還需要更進一步的發展。這一步很快地由布雷（Jean Borrel）達成，他以布特歐（Johannes Buteo）為筆名並用拉丁文來書寫[9]。布雷與《九章算術》都用了相同的雙乘法（double-multiply）消去過程（以現代符號重新編列）：

$$\begin{array}{rcl} 3A+B+C &=& 42 \\ A+4B+C &=& 32 \\ A+B+5C &=& 40 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 11B+2C &=& 54 \\ 2B+14C &=& 78 \\ 150C &=& 750 \end{array}$$

以文藝復興時期的文本講授代數課程，是牛頓升任盧卡斯講座教授（Lucasian professorship）之後的工作。在1669-1670年間，他寫了一份講義說他有意要填補代數教科書中的一道鴻溝：「它被所有曾經寫過介紹這門技藝的人所忽略，然而依我判斷一個完整的引介應該是非常恰當且必需的。」[73]牛頓的貢獻被忽視了許多年，一直到他的講義在1707年以拉丁文出版，以及隨後在1720年以英文出版。牛頓陳述這種解聯立線性方程組的遞迴策略，依據此策略，一個方程式被用來從其他方程式中消去一個變數。

> **你們將會學到，用一個方程式可以消去一個未知量，因此當方程式的個數與未知量的個數一樣多時，所有方程式最後可以消滅成只剩下一個，而且此式只有一個未知量。**
>
> －牛頓[56]

牛頓的目的在解任意的代數聯立方程組，他提出兩種從兩個方程式中消去一個變數的規則，而且方程式並不一定要是線性的：代入消去（substitution）（從一個方程式解出其中一個變數的公式，再代入其他方程式）與等價消去（equality-of-values）（從兩個方程式解出同一變數之公式，再令其相等）。

正當牛頓的講義等待出版之時，洛爾（Michel Rolle）[62]也解釋了如何解聯立方程組，特別是線性的，他將過程安排成兩欄，並且使用嚴格的代入消去步驟來求解。我們可以猜測洛爾的貢獻保留在「代入消去法」的名稱，而他兩欄中的 columne du retour（倒解欄）也留存在「反向」代入法裡。儘管如此，牛頓對後世的影響要比洛爾更深遠。

在18世紀的許多教科書中，寫法「都更像牛頓的代數而不像早前的作者」[54]，牛頓的直接影響顯現在他的用詞上。他在原始的拉丁文講義裡寫到extermino（消滅）[73]，這在後來的英文版本以及之後的衍生作品中變成exterminate。辛普生（Thomas Simpson）的《代數》[64]即是一個明顯的例子。他還以加減規則（方程式的線性組合）來補充牛頓「消滅未知量」的規則。

在許多類似的代數著作中，拉克洛瓦（Sylvestre Lacroix）在命名上做出了重要的貢獻。他明快洗練的教科書以一致性的風格呈現了最佳素材，其中包括給每個觀念起一個響亮的名字。因此，拉克洛瓦寫道：「這種消掉一個未知數的方法，就叫消去法（elimination）。」[49]他在美國出版的第一本代數書，由哈佛大學的法拉（John Farrar）所翻譯[48]，在此後出現的衍生作品中，「這就叫消去法」成為美國代數著作中的固定說辭。

教科書形式的高斯消去法就在18、19世紀之交完成。它真的是一種教科書的消去法，因為它已經發展成在符號代數中定型的必備練習題目。

專業的消去法

當勒讓德（Adrien-Marie Legendre）[52]

拉克洛瓦(1765-1843)稱之為消去法。安格斯的大衛的1841年浮雕。

J. G. Reinis, The Portrait Medallions of David D'Angers.

和高斯[27]當年發明了由勒讓德命名的最小平方法（méthod des moindres quarrés）時，正是社會上眞正出現解聯立線性方程組需求的時候。它是一種在超定的（overdetermined）聯立線性方程組中，藉由要求殘差平方和爲最小而對未知數形成統計推論的方法。當時高斯因爲以未公開的方法計算出「迷途的」矮行星穀神星的軌道而一舉成名；接著勒讓德簡潔地陳述了現在所謂的「一般線性模型」（the general linear model）；而這在高斯披露他的計算方法之後，造成了一樁不幸的優先權爭議[65]。在最小平方法的意義之下所得的最佳解，可由勒讓德的「最小值方程式」（equations of minimum），或由高斯的「正規方程式」（normal equations）獲得，他們分別提到這些方程式能以「普通方法」或「一般的消去法」解出，指的就是教科書中的消去法。由於最小平方法的重要性，高斯消去法很快便伴隨著專業人工計算的技術進展一起演變。

高斯本人就是一部無可救藥的計算機器，他自己估計他龐大的計算量高達百萬個數字[18]。他發表的最小平方法論文大部分談的是統計論據，但是在一個段落中，他描述了他自己的計算過程。他改寫問題以便用拉格朗日的典範形式[51]來重新表示平方和，高斯寫出超定方程組如下[28]：

$$\begin{array}{llllll}
n & +a\ p+b\ q+c\ r+\cdots & = & w \\
n' & +a'\ p+b'\ q+c'\ r+\cdots & = & w' \\
n'' & +a''\ p+b''\ q+c''\ r+\cdots & = & w'' \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

其中 $p, q, r, \cdots$ 爲這個線性模型的未知參數，$n, a, b, c, \cdots$ 爲模型預測與每次實際觀測值的差（次數增加以愈來愈多的撇號來表示），而 $w, w', w'', \cdots$ 爲殘差，它們的平方和 Ω 要有最小值。高斯選擇一種未命名的記號，

$[xy]=xy+x'y'+x''y''+\cdots$

以此來表示等價於 Ω 之二次形式的正規方程式中的係數。接著高斯擴展他的括號記號：

$$[xy,1]=[xy]-\frac{[ax]\,[ay]}{[aa]}$$

$$[xy,2]=[xy,1]-\frac{[bx,1][by,1]}{[bb,1]}$$

如此繼續下去，藉此他可以構造出參數逐步減少的線性組合：

$$\begin{array}{lllllll}
A & = & [an] & +[aa]p & +[ab]q & +[ac]r & +\cdots \\
B & = & [bn,1] & & +[bb,1]q & +[bc,1]r & +\cdots \\
C & = & [cn,2] & & & +[cc,2]r & +\cdots \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}$$

這些式子中依序將參數配方成二次的形式，得到

$$\Omega=\frac{A^2}{[aa]}+\frac{B^2}{[bb,1]}+\frac{C^2}{[cc,2]}+\cdots+[nn,\mu]$$

其中 μ 爲變數個數。所以當 $A=0$ 、 $B=0$ 、 $C=0$ 、 $\cdots$ 能夠反序求出 p 、 q 、 r 、 $\cdots$ 的值，從而也能反序求得 Ω 的最小值 $[nn,\mu]$。

利用高斯的方法解決最小平方法的問題，需要對每一個遞增的指標 k 求出 $[xy,k]$，高斯大幅削減了教科書消去法的計算作業，因爲他僅需要將 x、y 按順序排好。更重要的是，他的記法不需要符號代數的方程式，所以計算員可以更有效率地組織計算工作。當高斯計算時，他僅需要寫下數字表列，並以他的括號記號區分它們的值即可[28]。

高斯消去法後續的發展顯示了數學的後設學科本質[33]。推動這些發展的，是像高斯這種對數學之外的領域也很精通的學者。這些進展在外表上與教科書消去法或現今在大學中教授的消去法並不相似，但是它們並沒有因此就比較不重要，因爲它們滿足了許多社會需求。

名詞解釋　方程式的數目多於變數的數目，稱為**超定方程組**；方程式的數目少於變數的數目，稱為**欠定方程組**。

由於地圖學在經濟與軍事上的價值，專業消去法開始蓬勃發展。高斯曾經由政府出資，受命測繪他所居住的漢諾威王國地圖；當時的地圖利用三角形網格繪製，使用的是測量員測得的角度。這些角度必須調整以便讓三角形拼合起來時保持一致。爲了這個目的，就和處理超定方程組的情形類似，高斯[30]設計了一套方法，藉由二次形式的計算以找出**欠定**方程組（*under*determined equations）的最小平方解。這方法一經貝塞爾（Friedrich Bessel）普及之後，各個地圖測量局紛紛採用了高斯的括號記號，高斯的計算法於是成爲大地測量師數學課程中必備的一環。

> **不管使用何種消去法，我們得到的最終答案必定相同……；但是當方程式的個數很大時，採用高斯簡便記號的代入法是衆望所歸。**
>
> —蕭凡內(William Chauvenet)[10]

高斯之後的第一個創新來自於杜立德（Myrick Doolittle）[1881]。他是美國海岸測量局的計算員，能在一星期內解出41個變數的正規方程式。這是很驚人的計算能力，因爲 $n=41$時，理論上需要大約 $n^3/3 \approx 23000$個算術操作。杜立德省掉了高斯的括號，改成以它們在計算表中的位置來區分各個數字；他同時將在括號算法裡的除法換成了倒數的乘法。杜立德的計算表重編了數據的分組，以便他使用科雷厄（August Crelle）的乘法表。在杜立德的計算方法中，一個當時未體認其重要性的先見之明是，他以代數結合圖形，來降低計算的複雜性。他參考測繪地圖時的三角測量結果來排列欠定方程式的順序（也就是在正規方程式中對係數的排法）以便保留算式中的0，如此一來那23000個操作有許多就可以省略。

下一個創新來自於法國的大地測量軍官蕭列斯基（André-Louis Cholesky）[6]。他也處理了欠定的、角度調整問題中的正規方程組。雖然我們現在知道蕭列斯基的名字，是因爲他公式中的平方根*，但是他的創新在於重排算術步驟的順序，以便利用乘法計算器的功能。計算機器的量產始於1890年[2]，而蕭列斯基個人使用的是達堤勒計算器（Dactyle）。用機器來算長乘法的一個附帶效益是，機器內部能夠累積乘積的總和。如此安排的計算可以算得更快，因爲需要記錄在紙上的中間過程會少掉很多。對於 n 個方程式，相較於杜立德的計算表需要記下 $\mathcal{O}(n^3)$ 個數字，蕭列斯基僅需要 $\mathcal{O}(n^2)$ 個而已。

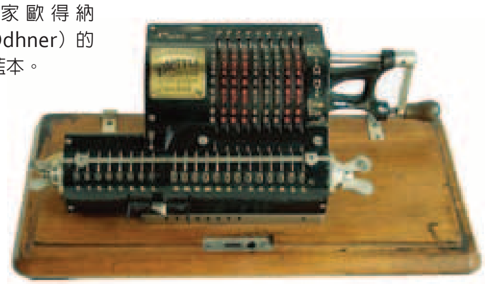
在一次世界大戰之後，迴歸分析形式的統計分析變成最小平方法問題的主要用途。杜立德出了名的方法也成功地轉換到統計上。舉例來說，當海岸測量局的員工調職到農業部時，他們仍堅持使用杜立德的方法[68]。農業部是用最小平方法來處理經濟計量問題的迴歸分析[24]。蕭列斯基的方法比杜立德的更好，但因爲它是在統計學已經開始發展自己的方法後，才出現在大地測量學上，所以鮮少受到關注[8]。但當他的方法被美國統計學家杜外爾（Paul Dwyer）[19]以「平方根法」之名再次發明後，方才得到了廣泛運用[50]。

高斯、杜立德與蕭列斯基的方法僅適用於正規方程式。用現代的術語來說，係數矩陣必須是對稱與正定的（positive definite）。工程領域中逐漸出現需要經常解決更多類聯立線性方程組的需求。麻省理工學院的數學家克勞特（Prescott Crout）[13]在不知道蕭列斯基先前研究成果的情形下，把教科書式的高斯消去法重新整理，變成以乘積的累加總和來解題。後來，一家計算器的製造大廠大力宣傳克勞特的方法，以推廣他們的機器。

矩陣的詮釋

使用符號代數來改良高斯消去法的社會環境，在

*蕭列斯基發明一種方法，現在被解釋成將對稱正定方陣分解成矩陣乘積 LL^t，其中所謂的平方根 L 是下三角矩陣，L^t 是其轉置矩陣。



達堤勒計算器是以俄裔瑞典企業家歐得納（Willgodt Odhner）的滾輪式設計為藍本。

克勞特的方法由機器來執行，像是這台馬臣特（Marchant）10ACT型計算器。它於1930年代與1940年代在加州奧克蘭生產。

引入矩陣代數之後結束了。19世紀後半葉，已經有許多學者發展出矩陣[37][38][39][40]，雖然人工計算用不著矩陣，但是這種新的表記方式顯示出，各式各樣的消去演算法只不過是細節略有不同的矩陣分解而已。而且最終，經由矩陣整理過的算式，可以寫成程式交給電腦來解決。

這項發展從波蘭雅蓋隆大學的天文台一路擴散，最後普及到我們在校園書店中看到的每一本數值分析課本。用手操作的計算刺激了天文學家班納奇維契（Tadeusz Banachiewicz）[3][4]獨立發明了現今所謂的克拉科夫式矩陣（Cracovians）。這種矩陣的乘法是行與行相乘，這是用手計算成行數字時的自然方式。

> **無論如何，必須承認在實作上，行乘以行比列乘以行要簡單多了⋯⋯。可以說，計算用的是克拉科夫式矩陣，而理論用的是一般矩陣。**
>
> －顏森[45]

早在1933年時，班納奇維契就主張使用克拉科夫式矩陣來呈現計算過程。這樣的想法經由兩個人在凱里（Arthur Cayley）的矩陣代數中實現了。丹麥大地測量所的顏森（Henry Jensen）使用圖象符號 □＝◺◹，以表示一個方陣是兩個三角矩陣的乘積，顏森藉此來強調解正規方程式的三種演算法：「高斯演算法」（以高斯的括號記號來計算）、克拉科夫式矩陣方法，以及蕭列斯基方法。顏森的呈現方式有一個值得注意的面向已在法哲（R.A. Frazer）等人的研究中初見端倪[26]：透過「基本矩陣」（elementary matrices）的乘法來呈現算術的操作。同一年，在密西根大學的杜外爾說明了杜立德的方法是一種「有效構造所謂三角矩陣的方法」[19]。他發現除了班納奇維契的論文之外，沒有其他類似的矩陣詮釋。顏森和杜外爾這兩篇幾乎同時發表的論文，是最早以現代形式（也就是用凱里的矩陣）來描述高斯消去法的著作。

矩陣詮釋的一項深刻用途是由馮諾曼和他的合作者高德斯坦（Herman Goldstine）提出的。他們當時正參與建造第一台可編程的電腦。由於關注機器的效用有多大，促使馮諾曼和高德斯坦去研究高斯消去法，他們的論文在分析的初始部分就引介了矩陣分解。

> **所以我們可以將消去法詮釋成⋯⋯兩種技巧的結合：首先，將A分解成兩個[三角]矩陣的乘積⋯⋯其次，用簡單、明確、歸納的過程形成他們的反矩陣。**
>
> －馮諾曼和高德斯坦[1947]

馮諾曼。他見到了「兩種技巧的結合」。

馮諾曼和高德斯坦利用矩陣代數來建立計算時所產生捨入誤差（rounding error）的上界，這是他們預期使用電腦進行機械化運算

時會發生的。當矩陣是對稱與正定時，他們所得到的上界到今天仍然是最好的。雖然就觀察，高斯消去法的計算結果是正確的，但一般情形時的相對誤差範圍還有待確立*。

普及到校園書店的下一步得益於《數學評論》（*Mathematical Reviews*）。陶德（John Todd）經由《數學評論》得知顏森的論文，並在倫敦國王學院講授其結果[67]。一名旁聽的數學家把矩陣方法告知他在英國國家物理實驗室的同事，當時圖靈（Alan Turing）為其中的一員，他很顯然從兩個管道得知了矩陣詮釋，一是經由陶德所轉介的顏森研究，另一是他往訪馮諾曼和高德斯坦時得知的，圖靈在[70]中徵引過後者。他在描述高斯消去法時，以馮諾曼與高德斯坦的方式處理教科書消去法的一般情形，而以顏森的方式處理基本矩陣。圖靈的表述簡潔明快，使得理念能夠清楚呈現，而不致有繁冗之弊。

電腦的發明造就出一門新學科，這門學科起初的參與者是那些從事科學計算的人[69][74]。在他們之中，福賽斯（George Forsythe）是一位卓有見地的數學家，他因為提出「計算機科學」（computer science）這個名字而知名[47]。牽扯上高斯，可以讓這門新學科的研究課題更有學術味，而大地測量學家使用高斯算法一語，似乎暗示了當時只單純叫做「消去法」的東西是起源自高斯。在一場對美國數學學會的演說中，福賽斯誤將「高中」教的消去法歸功於高斯[22]，他似乎是第一個稱它為「高斯消去法」的人[31]，這個名稱在十年之內就普遍流行起來。

大學數學課程引入矩陣描述的時程就要慢得多。在1960年代以前，線性代數還不是必然會教的課，當福克斯（L. Fox）[25]以及福賽斯和莫勒（C. Moler）[23]在他們極具影響的數值分析教科書裡寫進矩陣詮釋時，他們是以圖靈的描述方式為藍本。

*這不是留待讀者練習的題目。從許多研究可得到一個結論：不要去碰馮諾曼沒證出來的東西。

結語

所謂**演算法**就是解數學問題的一連串步驟。高斯消去法的矩陣詮釋，鮮少以直接的方式成為演算法，因為運算速度端視計算是否為問題本身以及電腦的性能量身訂作。就像當初高斯發明了第一個專業方法進行最小平方法的計算，然後杜立德設計了可使用乘法表的方法一樣，最近還發展出以平行電腦[17]來解有限元素分析的方程組[44]。以前，蕭列斯基與克勞特為配合計算器而強調乘積的總和；現在，程式中的算術步驟能夠自動重組，以肆應不同的電腦架構。將來或許還會有更劇烈的轉變，使得解 n 個方程式的步驟少於 $O(n^3)$ 個算術操作[66][11][14]。也許對未來的演算法唯一能確定的只是它們的名字。高斯消去法是一個不斷演變的技巧，而不是一個柏拉圖式的理型。∞

本文出處　*Notices* 58 (2011) no.6 AMS.
譯者簡介　蘇惠玉，國立臺灣師範大學數學系碩士，現任教於臺北市立西松高中，《HPM通訊》主編。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

延伸閱讀

+ Grcar, Joseph, How Ordinary Elimination Became Gaussian Elimination, *Historia Mathematica* 38 (2011)。作者此文和本文寫於同時期，可說是本文的詳細版。有網路版 http://arxiv.org/abs/0907.2397。
+ 郭書春《古代世界的數學泰斗劉徽》(1995) 明文書局。
+ Strang, Gilbert, Linear Algebra (2010春)。麻省理工學院線上開放課程。http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/index.htm