

# 我們真的 活在十維時空嗎？

作者：丘成桐 譯者：夏木青

## 弦論與宇宙隱藏的維度

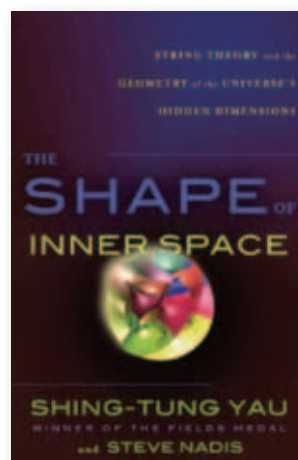
**作者簡介：**丘成桐為美國哈佛大學數學與物理教授，費爾茲獎、克拉福德獎、沃爾夫獎得主。為幾何分析學之大師，並出入於數學與物理之間。中央研究院院士。科普著作有《丘成桐談空間的內在形狀》。

### 重點摘要

- ▶ 丘成桐因證明卡拉比猜想獲得費爾茲獎。由此確立的卡拉比 / 丘空間，在愛因斯坦的廣義相對論裡，相當於竟然存在重力非零的真空宇宙！
- ▶ 弦論是統一四種作用力最成熟的物理理論，它斷言宇宙是十維的時空，除了日常的四維時空，另外卷縮的六維微小空間正是卡拉比 / 丘空間。
- ▶ 弦論高度整合物理和數學的深刻洞識，反過來促進了數學的新進展，鏡對稱預言了數學家無法想像的公式，震驚數學界。

今天要講的，是數學和物理如何互動互利，這種關係在卡拉比 / 丘空間 (Calabi-Yau space) 和弦論的研究中尤為突出。這個題目非出偶然，它正是我和納迪斯 (Steve Nadis) 的新書《丘成桐談空間的內在形狀》的主旨。書中描述了這些空間背後的故事，個人的經歷和幾何的歷史。

我寫這本書，是希望讀者透過它，瞭解數學家是如何看這世界的。數學並非一門不食人間煙火的抽象學問，相反地，它是我們認識物理世界不可或缺的工具。現在，就讓我們沿著時間，或更確切地，沿著時空從頭說起。



## 站在巨人的肩上——黎曼幾何學

1969年，我到了美國加州大學柏克萊分校念研究所。在那裡我瞭解到，19世紀幾何學在高斯和黎曼的手上經歷了一場翻天覆地的變化。黎曼的創見，顛覆了前人對空間的看法，給數學開闢了嶄新的途徑。

幾何的對象，從此不再局限於平坦而線性的歐幾里得空間內的物體。黎曼引進了更抽象的、具有任何維度的空間。在這些空間裡，距離和曲率都具意義。此外，在它們上面還可以建立一套適用的微積分，作為研究與分析的工具。

大約五十年後，愛因斯坦發覺包含彎曲空間的這種幾何學，剛好可用來統一牛頓的重力理論和狹義相對論，沿著新路邁進，他終於完成了著名的廣義相對論。在研究所的第一年，我念了黎曼幾何學。它與我在香港時學的古典幾何不一樣，過去我們只會討論在線性空間裡的曲線和曲面。在柏克萊，我修了史帕尼爾（Edwin Spanier）的代數拓樸、勞森（Blaine Lawson）的黎曼幾何、莫瑞（Charles Morrey）的偏微分方程。此外，我還旁聽了包括廣義相對論在內的幾門課，我如飢似渴地盡力去吸收知識。

當時柏克萊數學系大約有 500 名研究生，地狹人眾，大家都沒有研究室。課餘的時間我都呆在數學圖書館，它簡直成了我的辦公室。我孜孜不倦地找尋有興趣的材料來看。聖誕節到了，別人都回去和家人團聚。我卻在讀《微分幾何期刊》（*Journal of Differential Geometry*）上米爾諾（John Milnor）的一篇論文，它闡述了空間裡曲率與基本群（fundamental group）的關係。我既驚且喜，因為它用到了我剛剛學過的東西。

米爾諾的文筆是如此流暢，我通讀此文毫不費力。他文中提及普萊斯曼（Alexandre Preissman）的另一論文，我也極感興趣。從這些文章中可以見到，負曲率空間的基本群受到曲率強烈的約束，必須具備某些特定的性質。

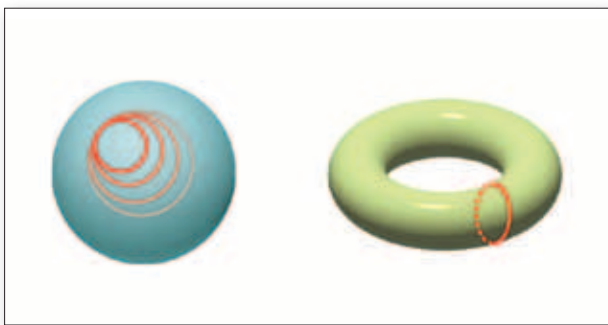
基本群是拓樸上的概念，基本上考慮的是從定點出發的所有迴圈，並將可互相形變的迴圈視為等價。普萊斯曼定理說，負曲率流形的基本群中，任兩個可交換的元素，皆能寫成某元素的自乘。這個結果很引人入勝，我試著推廣普萊斯曼的結果，想看看如果空間曲率非正，結果又是如何？這是我平生第一次將空間的曲率（精確的幾何描述）和比較粗糙、只留意形態特徵的數學理論（稱為拓樸學）聯繫起來。

雖然，拓樸也是一種研究空間的學問，但它不涉及距離。從這角度來看，拓樸所描繪的空間並沒有幾何所描繪的那樣精細。幾何要量度兩點間的距離，對空間的屬性要知道更多。這些屬性可以由每一點的曲率表達出來，這便是幾何了。

舉例而言，甜甜圈和咖啡杯具有截然不同的幾何，但它們的拓樸卻無二樣。同樣，球面和橢球面的幾何迥異但拓樸相同。作為拓樸空間，球面的基本群是無聊的，在它上面的任何閉曲線，都可以透



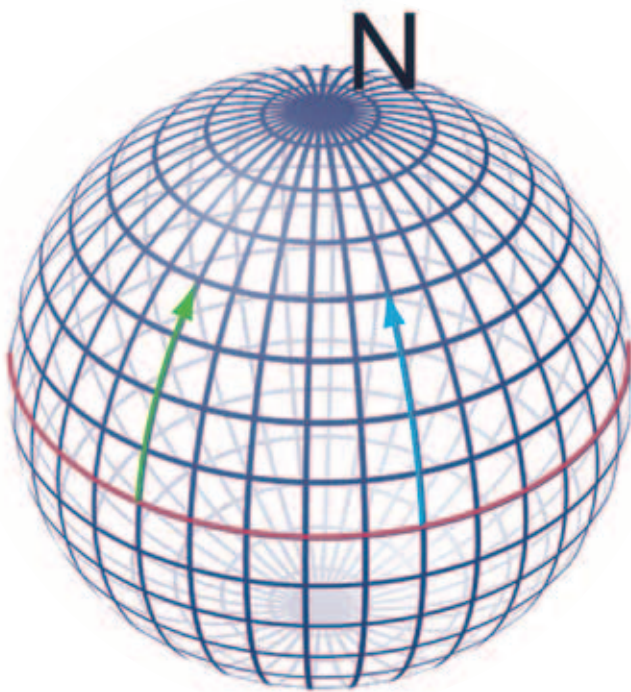
圖中每一列的形體，在拓樸學中都被視為相同，雖然幾何性質顯然不同。；第一列是 2 維的球面；第二列是 2 維的環面。



球面上所有的迴圈都可以縮到一個點，但環面上有些迴圈，卻沒有這樣的性質。這表示球面和環面的拓撲不一樣。

過連續的變動而縮成一點。但環面 (torus) 則否，在它上面可以找到某些閉曲線，無論如何連續地變動都不會縮成一點。由此可見，球面和環面具有不同的拓撲。

普萊斯曼定理討論了幾何 (曲率) 如何影響拓撲 (基本群)，我做了點推廣。在影印這些札記時，一位數學物理的博士後費雪 (Arthur Fisher) 嚷著要知道我幹了什麼。他看了那些札記後，說任何把曲率與拓撲扯上關係的結果，都會在物理學中用上。這句話在我心中留下烙印，至今不忘。



## 彎曲就是重力—廣義相對論

狹義相對論告訴我們，時間和空間渾為一體，形成時空，不可分割。愛因斯坦進一步探究重力的本質，他的友人格羅斯曼 (Marcel Grossmann) 是數學家，愛氏透過他認識到黎曼和黎奇 (Ricci) 的工作。黎曼引進了抽象空間的概念，並且討論了其上的距離和曲率。愛因斯坦利用這種空間，作為他研究重力的舞臺。

愛因斯坦也引用了黎奇的工作，以他創造的曲率來描述物質在時空的分布。黎奇曲率乃是曲率張量的跡 (trace)，是曲率的某種平均值。它滿足的畢安奇恆等式 (Bianchi identity)，奇妙地可以看成一條守恆律。愛因斯坦利用了這條守恆律來把重力幾何化，從此我們不再視重力為物體之間的吸引力。新的觀點是物體的存在使空間產生了曲率，重力應當看作是這種曲率的表現。

對歷史有興趣的讀者，愛因斯坦的自家說辭更具說服力。他說：

這套理論指出重力場由物質的分布決定，並隨之而演化，正如黎曼所猜測的那樣，空間並不是絕對的，它的結構與物理不能分割。我們宇宙的幾何絕不像歐氏幾何那樣孤立自足。

當然，愛因斯坦建立這個理論的過程絕非坦途。一開始，他想將重力理論和狹義相對論結合卻遭遇失敗。後來，他意識到這是非線性理論，並以重力定律在所有坐標系皆相同的等效原理 (equivalence principle) 作為指導原則。

1912 年，他領略到必須以帶勞侖茲符徵 (Lorentzian signature) 的黎曼度量來作為重

球面上的「直線」就是大圓，經線都是大圓，但緯線除了赤道之外都不是大圓。想像有兩個人如圖從赤道開始往北方走，明明是「平行」開始的，卻不自覺愈走愈近，好像有力在牽引著彼此。究其原因在於球面的曲率是正的，不像平面的曲率等於零。這說明曲率為何可解釋為力。



力勢。另外，它還必須解決兩個問題，首先是如何將狹義相對論的場方程轉換到有黎曼度量的情況，然後還需要釐清決定黎曼度量的法則。1912年到1914年之間，他和格羅斯曼合作，發現第一個問題要使用黎曼幾何上的黎奇與李維奇威塔（Levi-Civita）所發展的微分計算法，第二個問題的解答，則要應用黎曼建立的二階微分不變量。

愛因斯坦一直奮鬥到1915年才找到正確的數學形式，建立了廣義相對論，並找到能測試這個理論的天文實驗方法。大概在同時，知名數學家希爾伯特（David Hilbert）也獨立找到場方程的正確形式，但他沒能更進一步和實驗結合。

講到自己的成就時，愛因斯坦寫道：

就學問本身而言，這些理論的推導是如此行雲流水，一氣呵成，聰明的人花點力氣就能掌握它。然而，多年來的探索，苦心孤詣，時而得意，時而氣餒，到事竟成，其中甘苦，實在不足為外人道。

愛因斯坦研究重力的經歷，固然令人神往，他的創獲更是驚天動地。但是黎曼幾何學在其中發揮的根本作用，也是昭昭然不可抹殺的。

半個多世紀後，我研習愛因斯坦方程組時，發現物質只能決定時空的部分曲率，為此心生困惑，自問能否找到一個真空，即沒有物質的時空，但其曲率並不無聊，即其重力非零。當然，著名愛因斯坦方程的史瓦茲柴德（Schwarzschild）解具有這些性質。它描述的乃是非旋轉的黑洞，這是個真空，但奇怪地，極端的重力產生了質量。然而這個解具有一個奇點（singularity），在那裡所有物理的定律都不適用。

我要找的時空不似史瓦茲柴德解所描繪的那樣是開放無垠的，反之，它是光滑不帶奇點，並且是緊緻（compact）而封閉的。即是說，有沒有一個緊緻而不含物質的空間，即封閉的真空宇宙，但其上的重力卻不等於零？這問題在我心中揮之不去，

我認為這種空間並不存在。如果能從數學上加以論證，這會是幾何學上的一條美妙的定理。

### 柳暗花明又一村—卡拉比猜想

從上世紀70年代開始，我便在考慮這個問題。當時，我並不知道幾何學家卡拉比（Eugenio Calabi）早已提出差不多同樣的問題。他的提問透過頗為複雜的數學語言來表述，其中牽涉及凱勒流形（Kähler manifold）、黎奇曲率、陳氏類（Chern class）等等，看起來跟物理沾不上邊。但事實上，卡拉比抽象的猜想也可以翻過來，變為廣義相對論裡的一個問題。

新的內容乃是要求要找的時空具有某種內在的對稱性，這種對稱物理學家稱之為超對稱（supersymmetry，用數學語言來說，在這個情況指的就是凱勒流形）。於是上述的問題便變成這樣：能否找到一個緊緻而不帶物質的超對稱空間，其中的曲率非零（即具有重力）？

卡拉比猜想不僅指出封閉而具重力的真空的存在性，而且還給出系統地大量構造這類空間的途徑，大家都認為世間那有這樣便宜的東西可撿。可是，縱然不乏懷疑卡拉比猜想的理由，但沒人能夠反證它。我與其他人一起試圖證明卡拉比猜想所描述的空間並不存在，花了差不多三年。

1973年我出席了在史丹福大學舉行的國際幾何



卡拉比和丘成桐攝於哈佛科學中心。

會議。這會議是由奧瑟曼（Robert Osserman）和陳省身老師組織的。也許是由於我與兩人的關係，我有幸作出兩次演講。在會議期間，我告訴了一些相識的朋友，說已經找到了卡拉比猜想的反例。消息一下子傳開了，徇眾要求，當天晚上另作報告。那晚 30 多位幾何工作者聚集在數學大樓的三樓，其中包括卡拉比、陳師和其他知名學者。我把如何構造反例說了一遍，大家似乎都非常滿意。



陳省身和丘成桐。1992 年攝於臺灣中央研究院。

卡拉比還為我的構造給出一個解釋。大會閉幕時，陳師說我這個反例或可視為整個大會最好的成果，我聽後既感意外，又興奮不已。

可是，真理總是現實的。兩個月後我收到卡拉比的信，希望我釐清反例中一些他搞不清楚的細節。看見他的信，我馬上就知道我犯了錯。接著的兩個禮拜，我不眠不休，希望重新構造反例，身心差不多要垮掉。每次以為找到一個反例，瞬即有微妙的理由把它打掉。

經過多次失敗後，我轉而相信這猜想是對的。於是我便改變了方向，把全副精力放在猜想的證明上。花了幾年工夫，終於在 1976 年證明了這個重要的猜想。好消息是，證明卡拉比猜想，也讓我之前構造的許多「反例」變成重要的定理。

另外，在史丹福那個會議上，物理學家葛洛克（Robert Geroch）在報告中談到廣義相對論中的一個重要課題——正質量猜想（positive mass conjecture）。這猜想指出，在任何封閉的物理系統中，總質量（能量）必須是正數。我和孫理察（Richard Schoen）埋頭苦幹，利用了最小曲面（minimal surface），證明了正質量猜想。

這段日子的工作把我引到廣義相對論，我們證明了幾條有關黑洞的定理。與相對論學者交流的愉快經驗，使我更能開放懷抱與物理學家合作。幾年之

後，更參與了弦論的發展。

在證明卡拉比猜想時，我引進了一個方案，用以尋找滿足卡拉比方程的空間，這些空間現在通稱為卡拉比/丘空間。我深深地感到，我無心插柳，已經進入了一界數學高地。它必定與物理有關，並能揭開自然界深深埋藏的隱祕。然而，我並不知道這些想法在那裡會大派用場，事實上，當時我懂得的物理也不多。

### 撫弦輕撥十維琴——弦論

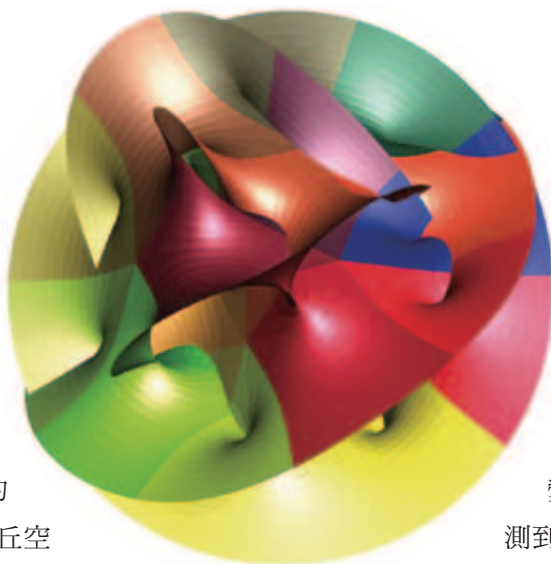
1984 年，我接到物理學家赫羅維茲（Gary Horowitz）和史聰閔格（Andy Strominger）的電話。他們興沖沖的談到有關宇宙真空狀態的一個模型，這模型是建基於一套叫弦論的嶄新理論。

弦論的基本假設是，所有最基本的粒子都是由不斷振動的弦線所組成的，這些弦線非常非常細小。某些弦論要跟量子力學相容不排斥，時空必須容許某種超對稱性，同時時空還必須是十維的。

我在解決卡拉比猜想時證明存在的空間，得到赫羅維茲和史聰閔格的喜愛。他們相信這些空間會在弦論中擔當重要的角色，原因是它們具有弦論所需的那種超對稱性。他們希望知道這種看法對不對，我告訴他們，那是對的，他們聽到後十分高興。

不久，韋頓（Edward Witten）打電話給我，我們是上一年在普林斯頓相識的。他認為就像當年量子力學剛剛面世那樣，理論物理學最激動人心的時刻來臨了。他說每一位對早期量子力學有貢獻的人，都在物理學史上留名。愛因斯坦在他的後半生花了三十年致力於統一理論，但至死也未竟全功。早期弦學家如葛林（Michael Green）和史瓦茲（John Schwarz）等人的重要發現，有可能終究把所有自然力統一起來。

六維卡拉比/丘空間的二維「切片」。印第安那大學 Andrew J. Hanson 提供。



維數的時空可以想成是四維時空和六維卡拉比/丘空間的乘積。因此，當我們運用分離變數法求解算子譜時，它肯定會受卡拉比/丘空間所左右。卡拉比/丘空間的直徑非常小，因此非零譜所對應的粒子質量變得異常大。這類粒子很難觀測到，因為它們只會在極度高能量的狀態下才會出現。

當時韋頓正與坎德拉斯 (Philip Candelas)、赫羅維茲和史聰閔格一起，希望搞清楚弦論中那多出來的六維空間的幾何形狀。他們認為這六維卷縮成極小的空間，並稱此空間為卡拉比/丘空間，因為它源於卡拉比的猜想，並由我證明其存在。

弦論認為時空的總維數為十。我們熟悉的空間是三維，加上時間，那便是愛因斯坦理論中的四維時空。此外的六維屬於卡拉比/丘空間，它獨立的暗藏於四維時空的每一點裡。我們看不見它，但弦論說它是存在的。

這個添了六個維度的空間夠神奇了，但弦論並不止於此，它進一步指出卡拉比/丘空間的幾何，決定了這個宇宙的性質和物理定律。哪種粒子能夠存在，質量是多少，它們如何相互作用，甚至自然界的一些常數，都取決於卡拉比/丘空間或本書所謂「內空間」的形狀。

理論物理學家利用狄拉克算子 (Dirac operator) 來研究粒子的屬性。透過分析這個算子的譜 (spectrum)，可以估計能看到粒子的種類。十個

另一方面，具有零譜的粒子是可能觀測到的，它們取決於卡拉比/丘空間的拓樸。由此可見，這細小的六維空間，其拓樸在物理中是如何舉足輕重。愛因斯坦過去指出，重力不過是時空幾何的反映。弦學家更進一步，大膽地說這個宇宙的規律，都可以由卡拉比/丘空間的幾何推演出來。這個六維空間究竟具有怎樣的形狀，顯然就很重要了。弦學家正就此問題廢寢忘餐，竭盡心力地研究。

韋頓很想多知道一點卡拉比/丘空間。他從普林斯頓飛來聖地牙哥，與我討論如何構造這些空間。他還希望知道究竟有多少個卡拉比/丘空間可供物理學家揀選。原先，他們認為只有少數幾個拓樸類可作考慮，是以決定宇宙「內空間」的任務不難完成。可是，我們不久便發現，卡拉比/丘空間比原來估計的來得多。1980年初，我想它只有數萬個，然而，其後這數目不斷增加，迄今未止。

於是，決定內空間的任務一下子變得無比困難，假如稍後發現有無數卡拉比/丘空間的話，就更遙不可及了。當然，後者是真是假還有待驗證，我一直相信，任何維度卡拉比/丘空間的拓樸類型都是有限的。



把四維的時空簡化成無窮延伸的直線，雖然數學的直線沒有厚度，但弦論說如果用威力強大的放大鏡來看時空，就會發現它其實有一個隱微的厚度，任意切開，截面都是六維的卡拉比/丘空間。



## 於無聲處聽驚雷—鏡對稱

卡拉比 / 丘空間的熱潮，始於 1984 年，當時的物理學家，開始瞭解到這些複空間或會用於新興的理論上。熱情持續了幾年，便開始減退了。可是到了上世紀 80 年代末期，格林恩 (Brian Greene)、普列瑟 (Ronen Plesser)、坎德拉斯等人開始研究鏡對稱 (mirror symmetry) 時，卡拉比 / 丘空間又重新成為人們的焦點。

鏡對稱乃是兩個具有不同拓樸的卡拉比 / 丘空間，看起來沒有什麼共通點，但卻擁有相同的物理定律。具有這樣關係的兩個卡拉比 / 丘空間稱為「鏡伴」 (mirror partner)。

1995 年，史聰閔格、札斯洛 (Eric Zaslow) 和我提出一個猜想，對卡拉比 / 丘空間的子結構提供洞識，為鏡對稱給出解釋。根據這個 SYZ 猜想的理論，六維卡拉比 / 丘空間本質上可以分成兩個三維空間，其中之一是三維環面。如果模仿把半徑  $r$  變成  $1/r$  的操作，把這些三維環面「翻轉」，並與另一個三維空間結合起來，就會得到原卡拉比 / 丘空間的鏡伴。這個猜想提供了鏡對稱的幾何圖象，儘管目前只在一些特殊情況下被證明成立。

數學家把物理學家發現的鏡關係搬過來，成為數學上強而有力的工具。在某個卡拉比 / 丘空間上要解決的難題，可以放到它的鏡伴上去考慮，這種做

法往往奏效。例如有一個求解曲線數目的問題，懸空了差不多一個世紀，就是這樣破解的。它使枚舉幾何學 (enumerative geometry) 這一數學分支，重新煥發了青春。這些進展令數學家對物理學家及弦論刮目相看。

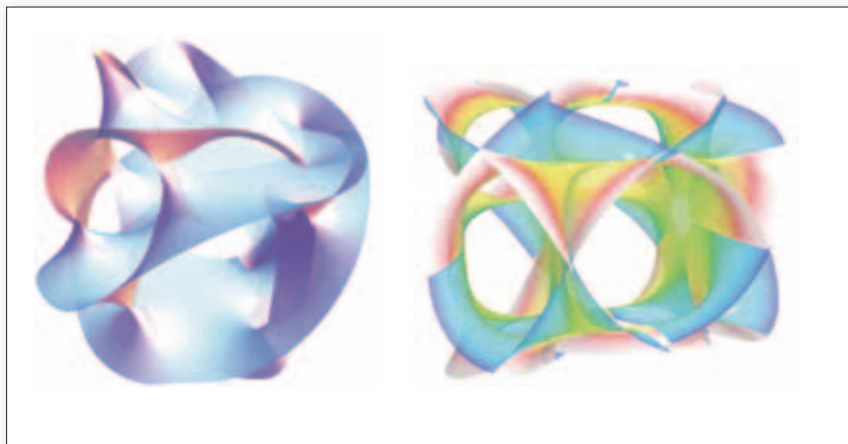
鏡對稱是對偶性的一個重要例子。它就像一面窗，讓我們窺見卡拉比 / 丘空間的隱祕。利用它，我們確定了在五次三維形 (一種卡拉比 / 丘空間) 上給定階數的有理曲線的總數，這是一個非常困難的問題。

這類問題稱為舒伯特問題。它源於 19 世紀，德國數學家舒伯特 (Hermann Schubert) 首先證明，在五次三維形上共有 2,875 條一階有理曲線。到了 1986 年，卡茲 (Sheldon Katz) 證明了有 609,250 條二階曲線。1989 年前後，兩位挪威數學家艾林斯路得 (Geir Ellingsrud) 和司聰默 (Stein Strømme) 利用代數幾何的技巧，一下子找到了 2,682,549,425 條三階曲線。

可是另一方面，以坎德拉斯為首的一組物理學家，卻利用弦論找到 317,206,375 條三階曲線。他們在尋找的過程中，用了一條並非由數學推導出來卻適用於任意階數曲線的公式。這公式的真確與否，還有待數學家驗證。

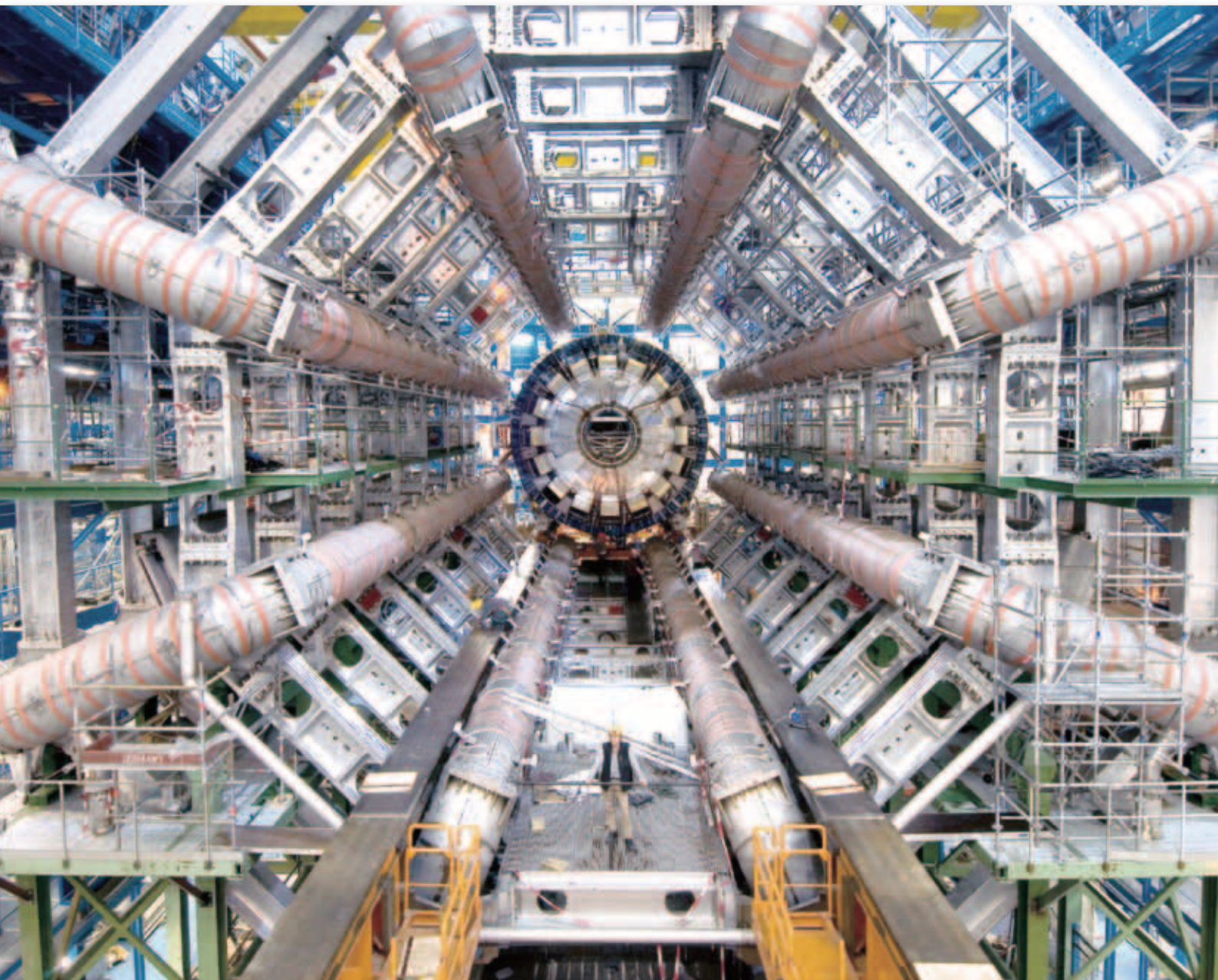
1990 年 1 月，在辛格 (Isadore Singer) 的敦促下，我組織了弦學家和數學家首次的主要會議。大

會在柏克萊的數理科學研究院 (MSRI) 舉行。會議上擁艾林斯路得 / 司聰默結果的人和擁坎德拉斯團隊的人分成兩派，壁壘分明，各不相讓。這局面維持了幾個月，直到數學家在他們寫的



物理學家發現兩個卡拉比 / 丘空間，雖然拓樸很不同，卻可能對應到同一物理理論。這個性質稱為鏡對稱，彼此對稱的雙方稱為鏡伴。





歐洲核子研究組織（CERN）日內瓦實驗室的大型強子對撞機，或許可以找到餘維空間或者超對稱粒子存在的線索。這些發現可以和弦論相容，但不足以證明其正確性。

程式中發現錯誤，經修正後，結果竟與物理學家找到的數目完全吻合。經此一役，數學家對弦學家深刻的洞察力，不由得肅然起敬。

這一幕還說明了鏡對稱自有其深厚的數學基礎。人們花了好幾年，到了 1990 年代中後期，鏡對稱的嚴格數學證明，包括坎德拉斯等人的公式，才由

吉文塔（Alexander Givental）以及連文豪 / 劉克鋒 / 丘成桐各自獨立完成。

#### 不知有吾身 此樂最為甚

話說回來，我們必須緊記，弦「論」畢竟是一套理論而已，它還未給實驗所驗證。事實上，有關的



實驗還沒有設計出來。弦論是否真的與原來設想的那樣描述自然，還是言之過早。

如果要給弦論打分的話，從好的方面來說，弦論啟發了某些極之精妙而有力的數學理論，從中獲得的數學式子已經有了嚴格的證明，弦論的對錯與否，都不能改變其真確性。弦論縱使還沒有為實驗所證實，它始終是現存的唯一能夠統一各種自然力的完整理論，而且它非常漂亮。試圖統一各種自然力的嘗試，竟然導致不同數學領域的融合，這是從來沒有想過的。

當然，現在要作總結還不是時候，過去兩千年間，幾何學屢經更替，最終形成今天的模樣。而每次重要的轉變，都基於人類對大自然的嶄新瞭解，這應當歸功於物理學的最新進展。我們或將親眼看到 21 世紀的重要發展，即量子幾何的面世，這門幾何未來將把細小的量子物理和大範圍的廣義相對論結合起來。

抽象的數學為何能夠揭露大自然如許訊息，實在不可思議，令人驚歎不已，《丘成桐談空間的內在形狀》一書的主旨乃在於此。不僅如此，我們還希望透過本書，使讀者知道數學家是如何進行研究的。他們不必是奇奇怪怪的人，就像在電影《心靈捕手》（*Good Will Hunting*）中的清潔工般，一面在打掃地板，另一面卻破解了懸空百年的數學難題。傑出的數學家也不必如另一部電影和小說《美麗境界》（*A Beautiful Mind*）描述的那樣，是個精神異常、行為古怪的人。

數學家和做實驗的學者同樣研究自然，但他們採用的觀點不同，前者更為抽象。然而，無論數學家或物理學家，他們的工作都以大自然的真和美為依歸。數學和物理互動時迸發的火花，重要的想法如何相互滲透，偉大的新學說如何誕生，如此種種，我們都在書中娓娓道來。

就弦論而言，我們看到幾何和物理如何走在一起，催生了美妙的數學與精深的物理。這些數學是

如此的美妙，影響了不同的領域，使人們相信它在物理中必有用武之地。可以肯定的是，故事還會繼續下去。本人能在其中擔當一角色，與有榮焉。今後並將傾盡心血，繼續努力。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

#### 本文出處

翻譯並整理自丘成桐推廣《丘成桐談空間的內在形狀》之各場英文演講稿。

#### 譯者簡介

夏木青為香港專業數學科普譯者。

#### 延伸閱讀

► Yau, Shing-Tung & Nadis, Steve, *String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, *Notices* 58 (2011) no. 8, AMS。納迪斯將丘成桐演講稿擴充為文。

► 丘成桐、納迪斯，《丘成桐談空間的內在形狀》（2012）遠流。

► Yau, Shing-Tung & Nadis, Steve, *String Theory and the Universe's Hidden Dimensions*, Youtube 網站。丘成桐與納迪斯在哈佛出版社的新書發表會錄影，用更輕鬆的方式與聽眾交流，介紹撰寫本書的原因、過程、內容與困難。

<http://www.youtube.com/watch?v=YYHSraW2YBY>