統一中的數學

向大眾介紹德利涅的研究與代數幾何

作者：瓦基耳 Ravi Vakil　譯者：陳凱傑

作者簡介：瓦基耳為印度裔加拿大數學家，現任教於史丹福大學，主要研究領域為代數幾何。瓦基耳熱愛推廣數學，2014 年獲得美國數學協會（MAA）鼓勵數學科普寫作的蕭維奈特獎。

每位數學家都再清楚不過，沒有任何事物比朦朧的類比、理論間的模糊反影、隱蔽的揣摩、無法解釋的差異更能讓收穫豐盛，也沒有其他事物可帶給研究者更多的樂趣。一旦幻象消逝黎明到來；直覺化成確信；孿生的理論在消退前揭露其共同的根源；正如同《薄伽梵歌》的教誨，智與不異同時而得。於是形上學成為數學，構成學術專著的題材，而其冰冷之美將不再感動我們。

——威伊（André Weil）[11]

鼓吹數學之美

2013 年 5 月 21 日，普林斯頓高等研究院的德利涅（Pierre Deligne）在挪威奧斯陸大學的奧拉禮堂（Aula）獲頒阿貝爾獎 [1]。配合德利涅的頒獎，還舉行了幾場數學演講，包括德利涅的獲獎演說；兩場傑出數學演講，講者分別是普林斯頓大學的卡茲（Nicholas Katz），以及法國綜合工科學校（École Polytechnique）兼法國國家科學研究中心（CNRS）的沃伊桑（Claire Voisin）。我給的是「科學演講」，對象是更廣泛的聽眾。這次演講讓我有機會整理自己的思緒，思考我們做為一個社群，可以、應該而且必須對更廣大的群眾，解釋數學的內涵，激發對數學的興趣。在這篇短文中，我想要闡釋先前的演講內容，底下先說明當時我的演講想要做到什麼。

當我向大眾演講時，目標是清楚解釋數學：究竟數學家做的是什麼——為什麼數學這麼美、這麼有威力，以及兩者為何緊密相關。

我們習慣與同領域的人談數學，我指的不僅是數學家，更是同一特殊研究領域的研究者。如果我們不留神，即使和其他領域的數學家交談也會很困難。這著實令人感傷，畢竟我們之所以想成為數學家，大多都是希望思考宏觀的問題，而不是狹窄的問題。

當對象是更廣大的聽眾時（即使是各領域數學家聚集的大型演講（colloquium）），我們表達的訊息必須是普遍一般的，不能期待聽眾具備我們經年累月深思而得的知識及經驗。

舉例來說，學習數學改變我們的思考方式。我們學會如何好好理解特定的東西：大小、形狀、數、

機率等等。我們對於到底知道什麼、理解多深入都滿懷謙遜，我們也學會仔細、精確與嚴格的思考。

首先，我們必須回憶當我們更年輕時，為何會被數學所吸引。因為我們與一般人不同，我們也必須想起其他許多人為何被數學吸引。對我來說，吸引我的是數學的美、威力與普遍性。我喜愛在看似毫無關聯的不同主題之間，發現突然、無法預期又威力十足的連結。

我們應該謹慎的使用類比。（數學家——至少純數學家，我只能代表我的族類發言——被訓練要謹慎精確，盡量避免使用類比，但類比並非謊言。）我們應該遵從說與寫的至理名言：「**了解你的聽眾**」。我們的說明，應該使用聽眾自己的語言，訴諸他們喜愛數學或準備愛上數學的理由，但我們常常錯失這樣的機會。

另一方面，一味迎合聽眾也會產生不良的後果。就與我相近的領域來說，數論學家及代數幾何學家有時會在談到應用層面時撒謊，曖昧的求助於密碼學。當我們不相信自己所說，而且並不關心時，聽眾其實都知道。我們已經有如此有趣的故事可以分享，實在沒有必要再加油添醋。

當然，名副其實的應用值得拿來討論，尤其是真正有趣的應用。在密碼學中確實有許多吸引人的美妙想法。我的領域代數幾何中就有許多應用，工業與應用數學學會（SIAM）今年夏天舉辦的應用代數幾何的大型會議中就已清楚呈現這一點 [8]。但大多數純代數學家並不太清楚應用領域中最令人興奮的一些進展，因此不該強不知以為知。我們必須說那些只有自己能說的故事，不該勉強自己假扮成別人。

那麼，我們該如何向他人談數學？五歲的小孩會喜歡什麼呢？他們喜歡拼圖（顯然是數學思考的一種形式）、恐龍與星星。北美（我無法代表其他國家發言）有名的報刊中充滿著介紹恐龍、天文與基礎物理的文章，但沒有文章濫用讀者的信任，說這些進展如何幫我們造出更便宜的微波爐。對這些發現感興趣沒有其他理由——正是人們與生俱來的好奇心。為什麼不用同樣的方法思考數學呢？大眾是有心理準備的。

當電影要拍攝絕頂聰明的人時，這個人絕對不會是石油工程師或經濟學家。天才的典型就是數學家（還有音樂家、理論物理學家）。我們應該好好利用人們對數學的浪漫想像，不要掃他們的興，當然同時要讓聽眾改皈依到數學家的獨特宗教。

德利涅優美的獲獎演說以及後續的訪談為這些論點做了絕佳的示範 [3]。德利涅的說明直接、真誠，並有人情味。他並不要求我們理解他研究的細節，相反的，德利涅談到是自己，以及為何他會如此思考的原因。他論述基礎研究——探索「無用知識」——的用處，他闡述何謂數學。

即使知道無法像德利涅那樣言談清晰，但重要的是我們不該怯於嘗試。因此，底下我要談一些五月在奧斯陸提及的想法。我已明言當時演講對象不是數學家，所以希望與我領域相近的人，不要因為我說的事實過於「無聊」（trivial，一個可惜被太過濫用的字眼）而覺得困擾。我主要的目標是解釋為何要從事這些研究，以及為何我們覺得這些結果如此吸引人。

看似不可能的關連

在所有數學領域中，名聲最令人生畏的領域大概是代數幾何。這是德利涅的研究領域，也是我的領域（當然成就小得多）。一來，這個領域的抽象程度太高，即使要對其他領域的數學家說明也嫌困難。但另一方面，代數幾何所處理的概念是如此基礎和根本，讓我很想演示它神奇的一面，我也希望說明我每天都在做什麼、在想什麼。

數學的負擔沈重，數學的威力強大又長存。就是因為數學太有用、太必要，所以大多數人只有機會學到為了處理其他事務所需的部分數學。他們看

到的只是數學的產出——一堆需要學習與背誦的程序。但是這些規則的背景、這些美好結構存在的理由，以及如何發現這一切的事實，則經常被遺漏。

數學發現的一個重要面向，是當你發現不可能相干的兩項事物其實相關時，那種戲劇性、出乎意料的連結。基於這個理由，數學家熱愛巧合與悖論。當你發現嶄新的事物時、當你突然看到關連忍不住喊出「阿哈」時、當複雜突然變得簡單時、或當迥異的東西突然變成相同時，這些真的都是最棒的數學體驗。有人這樣形容過，這就像在闇黑的房間裡，四處摸索前進，慢慢發現一件件的家具，然後突然有人打開燈，剎那之間，你認出原來自己身在何處。在這個當下，你知道自己發現了某種可能非常深刻的東西，將會改變你理解這個世界的方式。

這就是我今天想告訴各位的，持續進行中的數學的統一與簡化。知道的越多，事情就變得越簡單。你可以從大學教科書略見一二，導論課程的教科書非常厚，還附帶許多彩色圖片。當課程越進階，教科書就變得越薄，直到最高階課程的教科書通常也最纖薄。這就是為什麼取得數學博士的時間經常比其他領域少很多的原因，因為他們的主要貢獻是十分聰明的想法，而不是大量的實證。

這就是為什麼數學史是從各種不同來源，不斷統合各種想法的故事。這些來源包括科學、現實世界、純思辨，以及近日的電腦科學。

圓周率 π

德利涅的研究就是在數學不同部門之間建立戲劇性關連的故事。在這之前，我想先給一個例子，在大家或許已知的東西中找出神奇的關連，讓各位領會到，這些神祕的事情其實早已發生在我們眼皮底下，只要夠用心就能見到。

你也許覺得自己知道 π 是什麼。有些人被教說 $\pi = 3.14159\ldots$，但這根本不算答案——你知道後面的數字怎麼寫下去嗎？更精確的說，π 常被定義為圓的周長除以直徑。這裡已經有一個老師鮮少提及的怪事——為什麼這個定義跟圓的大小無關呢？無論如何，π 經常被當做大自然的常數，就像光速 c（大約每秒 300,000 公里）一樣。

現在已知的光速誤差小於約千億分之二，也就是準確到小數點後 11 位數 [9]。相比之下，我們所知的 π 精確度是小數點後十兆位 [14] ！是什麼造成這麼巨大的差別？我們「理解 π 和 c 的方式」一定有根本的差別。

想知道光速的值（至少就現在來說）是一個經驗性的問題，是測量的問題。因此我們能知道光速這麼多的位數真是不可思議，需要某種實驗天分才能辦到。

但想知道 π 的值，這並不是測量的問題，我們有非經驗性的方法來理解 π，這個方法是純「形式」的，而且只存在於我們的腦袋裡（我不想涉入微妙的哲學問題，雖然我並不介意承認存在這種問題。）舉例來說，一個理解 π 的純形式方法是透過格列高里 / 萊布尼茲級數（Gregory-Leibniz series）：

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots)$$

用這個方法計算 π 很沒效率，大約算了五十萬項之後，才能算出 π 小數點後五位數的正確值。但這個方法顯然不依賴於外在世界，因此原則上，是一個真正能十分精確知道 π 的數值，但卻不是實驗性的方法。

你應該很清楚這裡有一個很大的謎團——為什麼這個 π 的經驗「版本」會關連到純粹是我們腦袋中的東西？這一點也許並不像初看到時那麼顯然。諾貝爾物理獎得主威格納（Eugene Wigner）曾在一篇傑出的文章〈數學在自然科學中不合理的有效性〉中討論過這個問題 [12]。

我要更進一步指出，透過這一點我們不只有個謎團待解，而且還會情不自禁的想去弄清楚是怎麼回事，這正是所謂人性的基本成分。

在回到德利涅的工作之前，我想再說一些關於π的驚人事實，這應該會讓你忍不住想理解更多。

如果你想知道一個物理常數的精確值——知道更多、更多的位數——你必須依序一位一位的決定小數點下的數值。但是π不一樣，如果你願意接受十六進位制，我們有一個直接計算任意位數π值的方法，完全不需要先計算前面的位數。這個方法用到貝利/波宛/普洛夫公式（Bailey-Borwein-Plouffe formula, BBP）[2]：

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)\right)$$

（在十進位制也有類似結果，見 [7]。）

其次，有數學背景的讀者知道π並非有理數，甚至不是代數數。我們怎麼可能光知道這些事實，卻不想知道**如何**得到這一切呢？再一次，人性中想了解結構的根本好奇心，正是我們發現（或者以不同觀點，發明）數學的根由。

底下是π的另一個面貌，讓我們知道不該把π只想成純幾何的數。隨機取一個整數，這個整數無平方因數（square-free）的機率是多少？（愛吹毛求疵的人，這裡指的是比 1 大的因數。）一開頭，我們可以把這個問題想成實驗問題，一如我們將數學當作經驗科學。前十個數無平方因數整數占了 70%。如果檢查越來越多的整數，會發現這個比率會趨近到 60% 左右。注意到，就算這個問題的答案會收斂的事實，也是個不明顯而有趣的問題。但是更讓人驚訝的是，最後的收斂值是$6/\pi^2$。這個問題（似乎）跟圓沒有任何關係吧！所以，π究竟是一個幾何概念還是算術概念呢？哪種比較重要？哪種在邏輯上更優先呢？答案必然是π既是幾何也是算術（還有更多的領域）的重要概念，而這正是數學統一性的部分徵兆。只有恰當的寬廣觀點、恰當的深層理解，這個數學統一性才會局部展現出來。

我們剛才隨意介紹π的性質，似乎只是關於德利涅研究既微小又遙遠的類比，但事實不然。這種幾何與算術的統一性，甚至π的使用，正是德利涅所提供的許多洞識的一部分。（當然，德利涅的貢獻與其說是一堆特殊洞識的組合，更像是彼此關連的洞識所構成的網絡，導致我們能更深刻的理解到許多迄今不相干的數學概念如何與為何可以連結起來。）

一個提示，底下是$6/\pi^2$可以看成益發美妙的洞識的線索。$6/\pi^2$可以用黎曼ζ函數來表示成$1/\zeta(2)$（見本期 95 頁）從更高的觀點來看，$1/\zeta(2)$是一條線索，提示我們把所有的整數想成一條「光滑曲線」，而從（代數幾何）正確的觀點，事實真的如此。

在回到幾何與算術之前，我留給各位最後一個關於光速的謎題，我故意要把你搞迷糊，希望會激發你去解決它。我先前提到光速大約是每秒 300,000 公里（事實上稍微小一點），並且已經精確到千億分之二的誤差。然而，有一個純粹的思想算則可以算出光速的所有位數！這怎麼可能呢？（當你了解這是一個腦筋急轉彎的問題時，你就會發現所謂知道光速「精確到千億分之二的誤差」，這句話並不是那麼清楚……）

畢氏三元數

幾何與算術的關連非常古老，我們現在從最早的例證開始。

古希臘人知道畢氏定理，但更早的中國與印度文明也已經知道，甚至連更早期的巴比倫人也有一定的認識。（一個聰明的十歲小孩曾經問我，如果我們遇見外星人，是否能夠理解他們的數學？由於在人類歷史中，很多事情似乎都在不同時期獨立被發現過，所以對我來說答案是「能」，而且他們應該會有種我們可以指認是畢氏定理的東西。）

你們也許已經想得很深遠了，但是我鼓勵你們以一個年輕人的角度來思考，看看我們的主題是如何的天真而根本。（對數學家來說，「天真」不是羞辱的字眼，事實上是很高的讚譽。）

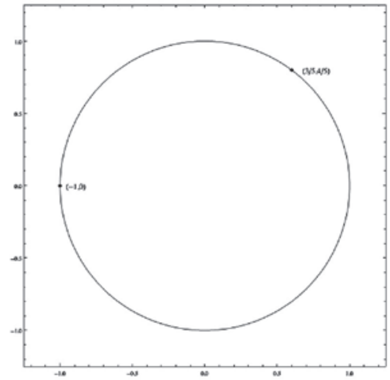
畢氏定理討論的是直角三角形的三邊長度a、b、c的關係。基於某些理由，我們想知道其中可能的**整數**解，也就是畢氏三元數（Pythagorean triples）。（再一次的，這在人類史上不斷發生，因此不該被視為某人沒來由的怪念頭。當很多人都問過相同的問題，其中必定有些道理，即使找不到令人信服的說詞。）

當你意識到$3^2+4^2=5^2$後，一定想找出更多的畢氏三元數，然後就發現$5^2+12^2=13^2$、$6^2+8^2=10^2\cdots$，接著你無疑可以找到一些模式，並好奇會不會一直持續下去。有些模式非常簡單（例如將畢氏三元數同乘於某個倍數可以得到另一組畢氏三元數，因此很快你就可以定義「素畢氏三元數」（primitive Pythagorean triples），亦即a、b、c沒有公因數的情況。）

但有些則並不容易。你也許會注意到$b+c$常常是一個平方數（尤其是素畢氏三元數），這時你領略到大自然想要告訴你一些事情。類似地，你也許發現a和c的平均也經常是平方數，而且通常發生在$b+c$是平方數的時候。

你難免想問：「究竟畢氏三元數是什麼？」這本來是一個模糊、定義不明的問題（和其他科學問題一樣），要等到你了解更多，才能看出其中的結構。（相似地，科學家們在了解動物如何與為何相互依存的過程中，也會經歷「什麼是動物」的階段）這個問題的答案也許從幾何的角度來看最自然。比起找$a^2+b^2=c^2$的整數解，我們透過同除以c^2，只要找$A^2+B^2=1$的**有理數解**就可以了。看到這個方程式，自然聯想到要畫出圓$x^2+y^2=1$（見圖一）。當考慮到關於**有理數**的問題時，會覺得先考慮所有**實數**也不壞。

然後可以嘗試運用圓的幾何性質。如果(A,B)是一組有理數解（指的是圓上的點），考慮一條通過(A,B)與$(-1,0)$的直線。（這裡有個特殊情況：$(A,B)=(-1,0)$，但就像其他科學，我們把特殊



從畢氏三元數的求解讓我們聯想到畫圓。

狀況留到最後再說。）我們將這直線寫成熟悉的形式$y=m(x+1)=mx+m$，並計算m。注意到即使不真正計算，光是知道「我們怎麼做」，各位就會清楚m是有理數。

重要的是，整過過程可以反過來進行。

假設有一條直線$y=(mx+m)$通過$(-1,0)$這個點，其中m是有理數。因為直線與圓交於兩點，求解後發現另一點的坐標都是有理數，稱為有理數點。（這裡隱含著一些想法，可以發展出神奇的結果，例如貝竺定理（Bézout theorem）❷。）這可能需要一些瑣碎的代數計算，但如果想清楚，只要理解**想**怎麼做，就可以避免涉入代數的計算。

如果要解出非$(-1,0)$的另一點，只要把圓方程式中的y用$mx+m$來代入，得到

$x^2+(mx+m)^2=1$

接著把算式展開並集項，結果像是

$?x^2+?x+?=0$

但已知有一個解$x=-1$，所以可以提出因式$(x+1)$得到

$(x+1)(?x+?)=0$

❶ 譯註：在沒有得到精確值以前，所謂的誤差是怎麼得來的？要如何比較呢？

❷ 譯註：文章中直線與圓的交點「基本上」都是 2，這提示應將 $(-1,0)$ 相切的情況也定成 2（重根！）。當然在實數時，一般直線與圓的交點也有可能是 0。但一旦考慮複數，任意直線和圓的交點就是固定的 2，這正是貝竺定理的特例。

仔細想清楚如何做因式分解，就知道 1 式中的兩個問號都是有理數，因此，?x+?的解是有理數，於是y（亦即$mx+m$）也會是有理數。如果你從來沒這樣做過，也許會有強烈的衝動想拿支筆在紙張邊緣試試看。

（底下是另一個問題，你也可以類似的靠純粹思考快樂的解題：$y=x^2$上有相異四點(a,a^2)、(b,b^2)、(c,c^2)、(d,d^2)，證明四點共圓若且唯若$a+b+c+d=0$[1]。）

所以，圓上的有理數點「基本上」（你需要仔細想想為什麼我用這個詞）一一對應於通過$(-1,0)$的直線$y=(mx+m)$，其中m為有理數。因此，它們「基本上」與斜率m一一對應。現在可以開始做代數計算了，而且我們知道一定會有好結果，畢竟我們已經掌握過程中的關鍵想法。你可以驗證結果是

$$x=\frac{1-m^2}{1+m^2}\qquad y=\frac{2m}{1+m^2}$$

關於以上的解法，有許多事情值得注意。

首先，我們是從幾何的事實（畢氏定理）開始，由此想要引出一個純粹的算術問題（畢氏三元數的分類）。這個問題可以被當做完全與幾何無關，但是正確審視這個問題的方法（或至少正確方法之一）是回到幾何的觀點。

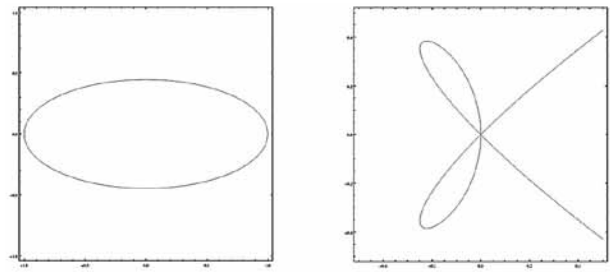
第二，從解決這個問題的思路，我們也找到解決其他問題的工具。（舉例來說，你可以想想當(a,b,c)是素畢氏三元數時，為什麼與何時$b+c$會是平方數？）

第三，我們理解此問題的品質有一項指標，是可以解決更廣的一系列問題的事實。例如，你可以用這個方法求出下列方程的所有有理數解：

$$x^2+5y^2=1 \quad 2$$

對於更高次的方程式，你也可以找出下列問題的有理數解：

$$y^4=x^3-x^2y \quad 3$$



圖二：左圖是橢圓 $x^2+5y^2=1$，右圖是特別的四次方程式 $y^4=x^3-x^2y$ 。我們要在這些曲線上找出所有有理數點。

圖形繪於圖二。（在這個例子中，$(-1,0)$所扮演的角色是什麼呢？為什麼幾何能夠提供你線索來解題呢？）

摩岱爾猜想

這些增加的問題導致更多的疑問：哪一類丟番圖方程（Diophantine Equation）（基本上，指那些我們想找到有理數解的方程式）可以用這種方法來求解？哪些不行？為什麼？

為了一瞥這類問題可能出現的結構，我們先檢視最有名的丟番圖問題——費馬最後定理，這可以視為畢氏三元數的推廣。$a^n+b^n=c^n$的整數解是什麼（其中n是正整數）？和前面類似，這個問題相當於問$x^n+y^n=1$的有理數解。當$n=1$時，顯然有很多解（根據直線的「簡單幾何性質」）；當$n=2$時，我們已經找到許多解（利用直線與圓的簡單幾何性質）；但在$n>2$時，透過試驗似乎很難找到不無聊的解[2]。究竟$n>2$有什麼特別？怎麼解釋這種現象呢？

就像$n=2$的情況，考慮這類求有理數解的問題時，我們會很想畫出所有的**實數**解，即使在邏輯上這似乎沒有任何幫助，因為我們只是在畫一條曲線（一維的幾何圖形）通過我們在乎的有理數點而已。然而更令人驚訝的是，如果考慮所有的複數解卻很有幫助。方程式的解會自然形成一個曲面，而且可以證明這個曲面上有C_2^{n-1}個「洞」（例如環面有一個洞），其中還有n個點「不見」了（就某

圖三：黎曼面 $x^4+y^4=1$

種意義來說，這些點都「在無窮遠點∞」——這很自然的暗示應該在射影空間（projective space）中考慮這個方程式）。圖三是一個 $n=4$時的示意圖。

注意到**實數**解所形成的曲線與這些洞沒有任何關係。而且更甚者，我們關心的**有理數**解只落在實數解所形成的曲線上。

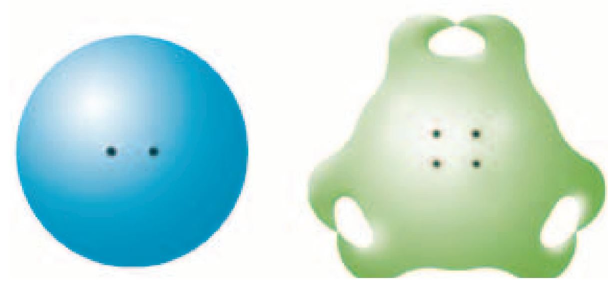
一般來說，如果有一個丟番圖問題涉及一堆多項式方程，而且其**複數**解是單一（「不可分解」，irreducible）的曲面。再一次，**實數**解會構成一條曲線，並且曲面上的洞毫無相關，而且我們關心的**有理數**解一樣落在實數解曲線上，和複數的那些洞更不相干。

但是神奇的是，這些洞數完全控制了有理數解，即使它們看似毫無關連—這是摩岱爾（Louis J. Mordell）的猜測，而且被法亭斯 (Gerd Faltings) 所證明 [6]。尤其，如果曲面的洞數超過 1（注意：「消失的點」不算洞），那麼有理數解就只有有限組。因此，遠在懷爾斯 [13] 和泰勒 / 懷爾斯 [10] 證明費馬最後定理（借助谷山 / 志村猜想）之前，我們已經知道針對每個$n>3$，費馬最後定理的反例頂多只有有限組，而且其原因基本上是幾何給的限制。（而代數幾何正是最後證明費馬最後定理時所用的語言。）

從摩岱爾猜想背後的哲學，還有更多故事可以說。例如，假設曲面沒有洞而且已知有一解，那我們就可以找到所有解。注意原方程可能根本沒有解，例如

$x^2+y^2=-1$ [4]

這個方程式等會還會再提到。這解釋了剛剛求所有



圖四：左圖是 $x^2+5y^2=1$ 的黎曼面，右圖是四次方程式 $y^4=x^3-x^2y$ 黎曼面。

畢氏三元數時，「第一個解」$(-1,0)$的重要性。我們也因此可以重新思考其他的丟番圖方程如[2]和[3]式（見圖四）。在[2]的情況，所有複數解構成一個球面（扣掉兩個點），和我們的結果吻合。在[3]的情況，得到的是一個球面，其中有四個消失點，另有三個點「黏在一起」，摩岱爾猜想背後的哲學再次足以說明這個結果。同樣地，圖二的實數圖形隱瞞了複數圖形的幾何特性（關於四維空間的想像最好還是留給讀者）。就這兩個問題，本來已經令人滿意但用了特殊解法的答案，如今卻可以放在一個更宏大、更美、也更令人滿意的架構之下。

這些美好的答案提示了更多的問題。注意到如果洞數$g\geq 2$，我們得到很強而有力的資訊（兼而引發更多問題）。而在$g=0$時，我們甚至有一個算則可求得所有的解。但$g=1$呢？在兩者之間的邊界狀況會發生什麼狀況呢？通常邊界情況總是最有趣（也經常最混亂）。於是我們進入橢圓曲線（elliptic curve）的討論，這大概是算術幾何中最豐富的部分。

威伊猜想

摩岱爾猜想給了一個驚奇美妙的觀點，去理解複數解是曲面的某一類丟番圖問題。然而，我們忍不

❶ 提示：把$y=x^2$代入圓方程式$(x-?)^2+(y-?)^2=?^2$ 即得。

❷ 譯註：所謂「無聊」的解是指顯然的$(0,1)$ 和$(1,0)$ 。

住想知道更廣泛情況的結果。如果複數解形成其他維度的東西（「解形」，variety）又如何呢？關於複幾何的一個事實是，這些解形的維度必定是偶數（對這領域不熟悉的人可能覺得不顯然）。這帶領我們走到威伊猜想，這是上世紀數學最核心的故事之一。雖然威伊猜想很重要，但它的精確敘述需要嚴格的背景知識，所以相對來說並不為大眾所知。但這個猜想的核心想法很令人震驚，因此我很想試著介紹其中某些神奇的想法。

我們先考慮丟番圖方程可能沒有有理數解的原因，嘗試找出其中的共同之處。

最簡單的例子：4式沒有整數解，因為平方數的和是非負的，而等號右邊卻是負數。這裡求解的阻礙來自實數的限制，或更精確的說，來自實數的有序性（order）。

再看一個很簡單、甚至有點愚蠢的例子，$2x^2+4y^2=2013$沒有整數解，因為等號左邊是偶數，右邊卻是奇數。再舉個稍微複雜的例子，$x^2+y^2=2015$沒有整數解，因為平方數除以 4 的餘數只可能是 0 或 1，因此兩個平分數的和被 4 除的餘數只可能 0、1、2；但右邊的數除以 4 的餘數是 3。這兩個例子和質數或質數冪所造成的限制有關。這類求解的障礙似乎與4的情況很不同──質數與算術有關，但實數則與有序性和形狀相關。但這其實是一條線索，顯示兩者或許有關。

從這些例子出發，有很多方向可以探討，我只介紹其中一種。如果考慮該方程在模質數p，也就是在$\mathbb{Z}/p$中的解；或稍微推廣一點，考慮在$\mathbb{Z}/p$的有限擴張體（finite extension），也就是有限體（finite field）中的解（見BOX）。相較之下，複數解似乎應該與實數解的關係更密切。但是威伊猜想的敘述卻更強：複數解（不同維度的）洞數的資訊，和$\mathbb{Z}/p$有限擴張體中解數所提供的資訊完全相同！

如果想說清楚整個敘述需要引入某些語言，所以容我只提出一些不很正式的推論。如果想知道複數解中各個維度的洞數，你只需要數算（也許借助一台電腦）在$\mathbb{Z}/p$（以及在其有限擴張體，算起來差不多一樣簡單）中有多少解。這是從算術導出幾何（與拓樸）的結果。更直接的說，只要算出方程式的解的數目，我們就可以偵知複數解中的洞數（包括這些洞的維度）。

相反的，如果知道不同維度的洞數，你就有足夠的資訊決定此方程在所有有限體中的解數。這是從幾何 / 拓樸導出算術的結果。更甚者，在算術與幾何的這種鏡像關係裡，一邊的事實會對應到另一邊面貌十分不同的事實。舉例來說，流形上的龐卡赫對偶性（Poincaré duality），基本上可以轉譯成另一邊ζ函數的泛函方程（functional equation）。如果想要精確理解這些想法，需要發展威力強大的數學工具。在此聲明，我們並不只是為數學工具而發展數學工具。大自然強迫我們製造這些工具，然後再教導我們這些工具其實根本不複雜。

就像費馬最後定理在 19 世紀刺激了代數與數論的發展，威伊猜想則是使代數幾何發展成現代形式的關鍵動機。（我們虧欠格羅騰迪克（Alexandre Grothendieck）和塞爾（Jean-Pierre Serre）的永遠也不嫌多。）

威伊猜想一共分成好幾個部分，證明各部分威伊猜想的努力可以溯及 1960 年，並持續很長的時間。最後，德利涅完成最困難的部分的證明，這也是 1980 年他獲得費爾茲獎的主因 [5]。

結語

威伊猜想是數學統一性的經典範例，是自然對我們的召喚，從視野寬廣的制高點來理解數學，將它看成單一、高度相互連結的主題。就數學家而言，這種頓悟的自覺正是狂喜的根源。

千年以來，人類從數學的角度理解宇宙的歷史，這是一段關於統一與綜合的故事，連結了許多世界的相異成分。這個大一統的特質，以非常純粹的質

地表現於德利涅的研究中。正是這段故事說服我，以及許多像我這樣的人，將一生奉獻於純數學。藉著這個機會，我想向德利涅教授表達感激之情，並恭賀他榮獲阿貝爾獎。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

EMS Newsletter 89 (2013) Sept., EMS（歐洲數學學會）(http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=news)

譯者簡介

陳凱傑臺大數學系雙主修物理系畢業，現任國家理論科學研究中心（臺北辦公室）研究助理，研究領域為代數幾何與算術幾何。

延伸閱讀

▶ Martin Raussen & Christian Skau，Interview with Abel Laureate Pierre Deligne, *EMS Newsletter* 89 (2013) September, EMS。德利涅獲獎訪談。

▶ Klarreich, Erica，Mathematicians Shed Light on Minimalist Conjecture, *Quanta*, July 6, 2013, Simons Foundation。*Quanta* 報導橢圓曲線上有理點問題的全新進展。

BOX

方程式在$\mathbb{Z}/p$中解的數目是什麼意思

同餘是數論中的有趣概念，例如23和157被2除時有相同的餘數1（所以都是奇數），稱23和157**模2**同餘。所有偶數也彼此模2同餘，其餘數為0。同餘的餘數扮演重要的角色，我們說23模2等於1，於是所有奇數模2都等於1，所有偶數模2都等於0。

同餘的性質在加、減、乘都能良好保持（例如奇數加奇數是偶數，奇數乘奇數是奇數）。妙的是我們可以用餘數0和1的運算，來表示偶數和奇數的運算規則。

+	偶	奇
偶	偶	奇
奇	奇	偶

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	偶	奇
偶	偶	偶
奇	偶	奇

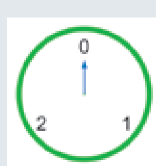
×	0	1
0	0	0
1	0	1

其中特別注意，$1+1=2$模2等於0，因此記為$1+1=0$。這種運算和鐘面算術是一樣的。例如正常時鐘就是模12的同餘算術：$5+8=13=1$；$7\times 8=56=8$。但是正常鐘面算術會有$3\times 4=0$的奇特結果，和普通數的性質很不同。

想要避免這個缺點，鐘面數字的數目必須取成質數2、3、5、7等。上面看過2的例子，底下是3的例子。

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1



在這種情形就可以做除法了。例如模3的情況，因為$2\times 2=1$，因此 $1\div 2=2$，以此類推。要特別小心的是，同餘的原始意義並不包括除法運算，例如在模2的情況，$1\div 1=1$ ，但並沒有「奇數除以奇數是奇數」的荒謬規則。

於是從同餘的概念出發，我們得到一種像有理數或實數可以做四則運算的代數結構稱為**體**。模質數p的體稱為**質數體**，通常記成$\mathbb{Z}/p$。元素數目有限的體稱為**有限體**。有限體的元素數目一定是質數的次方p^n。但是光做模p^n的時鐘算術並不是體，除非n等於1。

一個多項式在$\mathbb{Z}/p$中有多少解，這是什麼意思呢？

首先，把手中整係數多項式的係數都模p，例如$3x^2+5y^2=11$ 在$\mathbb{Z}/2$中看起來是$x^2+y^2=1$ 在$\mathbb{Z}/3$中看起來，則變成$2y^2=2$ 。

然後，在$\mathbb{Z}/p$中，把0、1、⋯、$p-1$代入x和y做模p算術看看會不會等於0，這就是在$\mathbb{Z}/p$中求解，並且算算有幾個解。例如$x^2+y^2=1$在$\mathbb{Z}/2$只有$(x,y)=(0,1)$ 和$(1,0)$兩組無聊解；但$2y^2=2$ 在$\mathbb{Z}/3$則有六組解

$$(x,y)=(1,0),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2)$$

如果嘗試$p=5$ ，原方程變成$3x^2=1$ ，讀者在$\mathbb{Z}/5$算一算，會發現根本沒有解。這個簡單的檢查，告訴我們方程式$3x^2+5y^2=11$ 沒有整數解。因為如果有解的話，這個性質就會在模5的計算中保持。

對一般有限體也可以進行上面的計算，數學家已經很了解所有有限體，並可藉助電腦來幫忙計算。這就是威伊猜想敘述的一部份。

（陳凱傑與編輯室）