

數學的有效性 合理嗎

作者：威爾柴克 Frank Wilczek 譯者：甘錫安

上篇 | 解構奇蹟

正反二論

作者簡介：威爾柴克是出身數學之理論物理學家，2004年獲諾貝爾物理學獎。現任麻省理工學院費許巴赫講座物理學教授。威爾柴克的研究領域包括凝態物理、天文物理與粒子物理。

1 960年，威格納撰寫著名的論文《數學在自然科學中不合理的有效性》[1]。他在論文中回顧許多數學的成功故事後，做出以下的結論：

數學語言在表述自然律時的適當性是一項奇蹟，它是我們既不理解也不配擁有的奇妙天賜。我們應當感激，也希望它在未來的研究中仍然有效。而且不論是好是壞，當我們盡情拓展知識領域時，即使會令我們困惑，也依舊成立。

後續的研究當然也出現了相同的奇蹟。的確如此，威格納撰寫這篇論文後的十年左右，基本交互作用的非交換規範理論問世，成為數學語言在物理定律表述中最令人驚奇的成功。在這些理論中，物質的組成粒子近乎完美地體現了複雜精細的抽象對稱原理。

然而，儘管與威格納的論點關係緊張，我仍然堅持一個不證自明的事實：通則必須合理才能稱為正確。理性的重點在於運用正確的通則來闡明事實。如果正確的通則顯得不合理，我們必須更深入推理來修正這項缺陷，如果辦不到，那就強迫我們的理



本文作者威爾柴克。（維基·Kenneth C. Zirkel攝）

性與其一致。

由於這個緣故，針對威格納認為數學的有效性不合理，我們可以有三個選擇：第一，數學在自然科學中的有效性不是正確的通則；第二，這種狀況有合理的解釋；第三，我們必須接受它是推理本身的基本公設。我認為這三個可能性各自提供了一部份的正確答案。

選擇的成功

射箭時如果想要箭無虛發，一個辦法是在箭的落點畫上靶心。數學能在自然科學中獲得成功，部

份原因是我們在自然界中選擇有趣的科學主題時，基本標準就是這些主題適合以數學處理。

例如科學界投入大量心力，研究超純半導體異質界面（heterojunction）在超低溫下承受超強磁場作用時的行為，卻與此物理領域對科技的重要程度，或它在自然界中的意義不成比例。驅使科學家研究此主題的主要原因，是量子霍爾效應擁有豐富美麗的數學理論。此外像普適性（universality）和重整群（renormalization group）的數學概念問世之後，臨界現象的研究也隨之達到前所未有的熱門程度。

為了避免誤解我必須先強調，我無意苛責我們被擁有豐富數學理論的現象所吸引，儘管這種狀況往往有點過火。事實上，這兩個例子都源於我自己長期耕耘的兩個領域。

威格納在論文中引用博蘭尼（Michael Polanyi）的作品，大意是數學本身旨在有趣（[2]）：「若不承認數學最明顯的特徵即它很有趣，則數學便無法定義。」

如果接受博蘭尼的論點，我們就了解有某種天擇在其中發揮作用。科學家選擇研究有趣的問題，而數學很有趣，因此科學會朝數學可充分發揮效用的領域演進。

為了進一步證明，主題的選擇在已知的數學有效性中扮演重要的角色，可以先檢視事先畫好靶的傳統式射箭中的數學紀錄，這時數學的成績就沒有那麼起眼了。例如，紊流、摩擦和蛋白折疊在科技上相當重要，也是自然界中隨處可見的現象，但儘管科學家已經投入許多心力，數學仍然很難進入這些領域。

費曼（Richard Feynman）曾如此表達他渴望擁有更有效的數學：

人類心智下一次重大覺醒，可能是產生理解方程定性內容的方法……目前我們不知道薛丁格方程式中是否包含青蛙、作曲家或道德觀，或是否不



萊布尼茲

包含。我們不確定像上帝等超越性的東西有沒有必要。因此我們才對正反兩方都抱持強烈的看法。（[3]）

數個世紀之前，萊布尼茲以相同的心情表達對「普遍語言」（universal characteristic）的憧憬，他這麼寫：

萬一發生爭執，我們不需要再像兩位哲學家花費唇舌爭辯，而是像兩位會計師拿起鉛筆，坐在石板前，向對方說（需要的話可以請朋友見證）：「開始計算吧！（[4]）」

我們是否可以透過運用數學，由物理定律（或者就此而言，是由資料得到的有用定律）自動獲得定性的預測？或許可以，但看來並不樂觀。依據哥德爾的定理（有些真敘述無法從形式上證明）、計算的複雜性（許多自然問題無法藉助實際演算法解

決)和混沌(有些自然的方程無法有系統的求解)等概念,數學已經發現本身能力的極限。

狄拉克(Paul Dirac)曾說,在他不需實際解出方程就可預測解的性質時,才會認為自己真正了解這個方程式。無論如何,由於計算複雜性和混沌的理論,現在我們知道許多看來十分普通的方程式其實無法求解或無法簡單描述。

我坐在位於新罕布夏州家裡的門廊,看著被風吹起陣陣漣漪的湖、遍布松樹的地平線、點綴著積雲的天空,還有一對潛鳥和牠們的幼雛。這幅畫面中,哪些部分可由美麗的方程推導出來?為了證明美麗的方程有在作用,我們不能單單坐在門廊注視自然的景觀。我們必須做些不尋常的事情,像是建造和操作大強子對撞機和威金森微波各向異性探測器(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe),並努力剔除原始數據中不相干的干擾、人為訊號和雜訊,再把這些精煉的數據解讀成適用的資料。

大自然的禮物

尋找西北航道、黃金國(El Dorado)和青春之泉的探險家發現,努力追尋並不保證一定能找到心中的目標。選擇本身不足以解釋美麗的數學在我們的自然理論中的威力。如果美麗又強大的數學定律本來就不存在,尋找美麗又強大的數學自然律當然不會成功,怎麼可能成功呢?

關於「為什麼」的問題,如果質疑答案是否可能不同將有所啟發。我們能否想像行為不受簡潔數學定律支配的世界?太簡單了。兒童、亞里斯多德、聖經作者和「超級瑪利歐兄弟」的設計者等等,早為我們想像出這樣的世界(其中有幾個例子的作者還真誤以為自己在描述我們的世界)。

真實世界的運作具有某些特性,所以格外容易接受簡潔的數學定律。我認為最重要的兩項特性是對稱性和局域性(locality)。在開始計時那一刻起的改變,其背後對稱性使物理定律恆久不變;當設立

實驗室的位置改變,其背後的對稱性使物理定律放諸四海而皆準。局域性則讓我們得以依據基本組成粒子的簡單交互作用,再依數學演繹足可建立對自然界的描述。局域性和對稱性相輔相成,使物理定律具備特定形式的微分方程的特性。

此外,因為粗糙的局域及對稱方程式依然具有局域性和對稱性,所以連物理定律的逼近形式也保有兩者的簡潔性。在標準模型問世之前,物理學早就已經擁有美麗的方程,而且即使標準模型必然不是終極真理,也同樣擁有美麗的方程。

讀者可能會警覺:「你的說法根本就是循環論證!你說數學描述自然界很有效,原因則是自然界遵循數學的概念。」

請容我提醒批評的朋友,循環論證的世界線可能是上升的螺旋。阿基米德、克卜勒和伽利略等人發現最早的「不合理的有效」數學自然定律時,這些定律看來都像新發現的奇蹟,出人意料,而且和其他定律在邏輯上完全無關。歷經很長的時間後,現在我們可以用不同的方式回顧這些定律,將其視為更深遠與更寬廣的理論架構所產生的結果。在這個架構中,對稱性和局域性是世界深層結構的主要特性。找出這些主要特性後,就發現了數學有效描述自然界的主要原因(如果真是如此)。

信仰的行動

關於「為什麼」的問題的任何答案,都能用更進一步的「為什麼」來質疑,所以推理論證必定結束於無進一步理由的前提。此時,我們必須從理性轉為信仰。現在我們信仰對稱性和局域性,因為到目前為止它們帶給我們相當良好的經驗。在現在,我認為無法進一步解釋了。

身為相信這個說法的科學家,必須認真看待自己的信仰,認真到想針對它採取行動進而加以測試。我希望並且相信,在對稱性指引下的物理定律,很快就能贏得驚人的新勝利。

可能成功的方法相當多。針對描述強、弱和電磁三種交互作用的方程，我們可以假設一個範圍更廣、涵括三者的規範對稱，來強化方程式的對稱性。如果這麼做，就可以逐漸整頓標準模型（Standard Model）中許多不夠嚴謹的細節。不過，範圍更廣的對稱會引發其他交互作用使質子不穩定。預測的質子衰變速率相當小，但或許可以觀察得到。

要統一各種交互作用，需要新的粒子。讓粒子以虛粒子形式出現的量子起伏（quantum fluctuation），會影響真空極化。這些永存的起伏所造成的隱晦效應，可以解釋實驗中所測量到的各種耦合參數，與我們認為應該是單一、統一的基本耦合參數「裸」值之間的差異。為了精確的統一，新粒子不能太重。更具體的說，這種粒子應該夠輕，能在龐大的加速器如大強子對撞機中形成真實形式的粒子（而非虛粒子）。

統一的對稱性還可朝另一方向擴展。擴展的規範對稱性連接量子色動力學中自旋為 1（玻色子）的色彩膠子、W 和 Z 玻色子和光子；另外也把各種自旋為 1/2（費米子）的夸克和輕子彼此連結。不過它並不能把玻色子和費米子互相連結。但超對稱可以達成這個目標，實際套用超對稱也需要新的粒子。

值得注意的是，超對稱需要的粒子正是精確統一耦合所需的要素（請參閱筆者合著文章 [5]）。這個巧合究竟是殘酷的捉弄，還是預示某種驚人的綜合理論？很快就會知道。

對稱性還預測到希格斯粒子（Higgs particle）和軸子（axion）兩種粒子。前者解釋了電弱規範對稱為何破缺，而後者解釋了時間反轉對稱何以在強交互作用中仍然成立。

如果最後發現這些新現象的任何一者或（如我預期的）全部正確，都將美好的證實數學在自然科學中的有效性。但這些發現將構成理性的頂峰成就，而不是「不合理的」異常現象。

下篇 | 唱反調的魔鬼代言人

數 學在自然科學中的成功是奇蹟嗎？威格納在他的知名論文中宣稱如此。我在上篇探討了幾項自然論的不同解釋。我基於本身的學術訓練與個性，力求公正和平衡。但如果要做實際的辯論，那就得找律師到場。

的確如此，在接受有效性是奇蹟的假說之前，傳統上應該讓這些奇蹟接受魔鬼代言人的交叉檢驗。

現在就來聽聽唱反調的人能提出哪些合理的懷疑（當然不能期望她是公正或平衡的）。

她先這樣開始：「清晰思考當然能釐清事物。我相信沒有人會說數學在會計上的成功不合理，更不會說是奇蹟。這只是以清晰的思考來處理金錢。數學當然有用又重要，但它的成功不足為奇。」

「真正看來不合理、甚至可說是奇蹟的部分，是數學的應用範圍極廣。如果一項發現或創新只需少數資訊就能清楚傳達，但其純數學闡述可以解釋的現象卻不斷增加，這就讓人感覺十分神奇。」

這類例子在自然科學中很多。牛頓的運動和重力定律寫出來寥寥數行，卻能追蹤行星、計算歲差、發現海王星、規劃太空旅行。海森堡（Werner Heisenberg）的對易關係只有少幾個字 $i[p_k, q_l] = \hbar$ ，卻可以處理次原子世界。這就像大樹原本只是一小顆種子，傑出人物原本只是小小的卵子一樣。

「人們很容易認為這是奇蹟。但大樹原本當然只是一小顆種子，傑出人物原先當然只是小小的卵子。生物學家正一步步解釋這個過程，完全不訴諸奇蹟。」

沒有數學的成就

在將奇蹟的特殊地位賦予數學之前，應該先考慮這種狀況是否唯一。非數學的概念也可以有廣大的科學應用嗎？的確如此。例如：

● 達爾文的天擇演化論不是數學理論。《物種原始》書中連一條方程式都沒有。然而書中的假設（同樣只有寥寥數行）卻可解釋許多令人驚奇的事實。

● 德謨克里特（Democritus）、道爾頓（John Dalton）和門得列夫（Dmitri Mendeleev）的原子論只運用簡單的算術，沒有高深的數學理論，但在化學上發揮了重要的引導作用。

「儘管在傳統上不這樣想，但區別巧人（Homo habilis）和現代人基因組的資訊相當少（呃，大概有幾百萬位元組）。但與數學計算完全不像的生物和歷史過程，運用這些資訊，卻區分出已經滅絕的半猿猴和《數理人文》的讀者。」

沒有成就的數學

代言人繼續向陪審團表示：「不但非數學的論證可能造成許多科學影響，相反的，數學卻經常沒有什麼影響。」

我很喜歡《法櫃奇兵》裡的一場戲，或許你們也記得。在最後對決前，一名揮著劍的刺客與印第安那瓊斯面對面，展現出令人畏懼的高超本領。印第安那瓊斯的反應則是冷靜地掏出手槍，朝對方開槍。大師級的數學表演被直截了當的計算打敗，讓我想起這場對決。

看看天體力學的三體問題。有幾位史上最傑出



達爾文

的數學家研究過這個問題，包括牛頓、龐卡赫（Henri Poincaré）等人（惠特克（Edmund Whittaker）經典著作的後半部專門討論這個問題〔16〕）。牛頓表示這個問題與月球有關，因此投下許多心力，這也是唯一「使我感到頭痛」的問題。許久之後，龐卡赫在修正自己對此問題一般形式（太陽系的穩定性）的錯誤解答時，提出了現代混沌理論的中心構想。但時至今日，如果你有興趣預測行星、衛星的位置或是規劃太空旅行，最好的方法是努力的磨出答案，以數值積分方法或高階微擾理論解出方程式。

同樣地，運用量子色動力學計算強子的質量和性質，促成了許多絕妙的分析研究和發現。然而，如果真的想得到具有充分精確度的具體答案，除了比較直接的離散化和數值解這類方法（也就是晶格規範理論），別無真正的替代方案。

「過去20年，科學界沒有任何領域比超弦理論出現更令人目眩、範圍更廣的數學研究。」假裝謙卑的辯者微笑繼續說：「當然，這些曾經閃過我腦海，但我居住的地方託足於大地、靠近現實的基底，卻鮮少看到這個理論有什麼應用。」（我們可以推測，這位代言人的住所離她的當事人不遠）●。

倒轉箭頭：歷史這麼說

代言人繼續表示：「在極端狀況下，數學偏見甚至可能妨礙科學的理解。以下是歷史上幾個重要的例子：

● 畢氏學派否定「無理」數。古希臘人儘管天資聰

類，卻只理解幾何連續的概念，從來不理解數的連續概念。

●在天文學中，堅持圓周運動具有數學完美性，因此形成克卜勒（Johannes Kepler）必須摒棄的周轉圓理論。

●發現電磁場的是完全不懂數學的自學實驗科學家法拉第（Michael Faraday）。他周圍的學者則運用已確立的遠距力概念描述電和磁的現象。

「在這些例子中，當時既存的數學概念把科學家帶往錯誤的思考方向。

相反的，大自然必要的概念被帶入數學，並激發數學的發展。笛卡兒（René Descartes）以數值模型描述空間、牛頓的微分方程概念，以及馬克士威開創性的向量場論，都來自我先前提到的『反數學』革命，最後帶來更新穎、更優異的數學。」

我對這位代言人提出的卡通式歷史感到汗顏，但請體諒她正在做律師的申辯。

「這類由世俗想法發展成數學的反向過程，我的當事人最喜歡的例子來自科學的幽暗面，那就是從罪惡的消遣，賭客的質疑中，促成了機率論的誕生。」

代言人做出總結：「因此，數學在科學中的成功是奇蹟嗎？在各位做出裁決之前，請考慮所有證據，全面思考這個問題。我已經告訴各位，有些科學的重大成功並未運用數學，有些重大成功是因為捨棄了數學，更有些重大成功的方向完全相反，是由科學流入數學。如果值得被稱為奇蹟，通體應該要更一致才對吧。難道質疑威格納所謂的『奇蹟』不是很合理嗎？」

請各位自己評斷。



龐卡赫

倒轉箭頭：這麼看未來

波耳（Niels Bohr）曾區分一般真實和深度真實。一般真實的相反是錯誤，但深度真實的相反則是另一個深度真實。代言人的論證使我相信，數學在科學中的成功是重要的真實。而科學需求（廣義地解釋）也經常促使數學朝全新的方向發展。科學也在數學中擁有（不合理？）的成功。

想想未來將會如何發展很有趣。

馮紐曼（John von Neumann）創立數學對局論，在理論電腦科學的建立也扮演重要的角色，這兩者當然是近日因科學促成數學發展的重要範例。因此他的看法對這個問題相當重要。

在一篇名為〈數學家〉的文章中，馮紐曼提出了代言人也會贊同的看法：

當一個數學學門開始遠離其經驗根源，或者更甚者，如果這個學門只是從「實在」源頭間接啟發的第二、第三代學門，其處境就會非常危險。這個學門會越來越傾向純粹的美學化，純粹「為藝術而藝術」。如果這個領域的周遭主題仍然和經驗世界有緊密接觸，或者，這個領域的領導者具有非常優秀成熟的品味，這種情況也許不能算糟。但是嚴重的危險在於，這個主題會沿著阻力最小的路線前進，就像遠離根源的河流岔出許多無意義的分支，因此這個學門就會充斥一團毫無條理的細節和複雜內容。換句話說，在遠離經驗

① 譯註：earth、ground 雙關，指魔鬼的居所。

根源後，或經過抽象化的近親繁殖後，這個數學主題就有萎縮的危險。這就像建築或繪畫一樣，起初通常是古典風格，但是當巴洛克的跡象顯露時，危險的訊號就出現了。（[7]）

馮紐曼 53 歲因癌症去世時，已經準備好 1955 年希利曼講座（Silliman Lecture）的內容，可惜未能成行。他的講座筆記後來成為《電腦與人腦》（The Computer and the Brain, [8]）這本小書的基礎。他在書中提到如果時間允許，他或許能創立一門數學：

我們數學的外在形式不一定與評估中樞神經系統真正使用何種數學或邏輯語言的觀點絕對相關。然而，先前關於可靠度以及邏輯與算術深度的評論證明，無論這個系統實際如何，都與我們意識中明確視為數學的系統差別不大。

當然，科學界從 1955 年到現在進展相當大。電腦的運算能力成指數增長（就這一次，依據摩爾定律這個字眼準確用對了！）神經生物學的細節，以及分子遺傳學與生物發生學知識的廣大基礎，都有了長足的進步。不過我認為馮紐曼夢想的新數學尚未成功，不足以整合及引導這些科學進展。假如他的夢想實現，工程師將可把生物資訊的處理方法中，令人驚奇的自我組合、容錯和運用豐富交互連結等優點納入設計，將計算智慧帶入新境界。

我在上篇曾經引用費曼的夢想：「人類心智下一次重大覺醒，可能是產生理解方程定性內容的方法。」把了解方程定性內容和認識一般模式的定性內容分離，不僅不自然甚至不可能。這聽起來或許非常模糊，的確也是如此，但一門重要學科正圍繞著這個問題不斷在發展。而且，我從馬凱（David MacKay）的傑出著作發現，這個問題包含許多與物理之間的連結（[9]）。這個新學科或許將成為馮紐曼預言的新數學。

正如由數學流動到經驗現實的洞察過程並非單向，由物理流入經驗現實的過程也是如此。只要這些成熟而且極為精細的科學，能夠不斷接受科技、生命和心智等外界帶來的全面挑戰，就能避免因為自滿而招致沒落。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

本文出處

本文翻譯自 *Physics Today* 59（2006）No.11, A1P 與 *Physics Today* 60（2007）No.5, A1P。上下兩篇合譯為單文。

譯者簡介

甘錫安為專職譯者，定期為《科學人》及《BBC 知識》雜誌翻譯，目前另有數學科普書籍譯作《1, 2, 3 和 + - × ÷ 的數學旅行》（臉譜）。

延伸閱讀

► Wilczek, F "Asymptotic Freedom: From Paradox to Paradigm", 2004 年諾貝爾獎獲獎演講稿，見諾貝爾網站網頁。網站中也有演講錄影。http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/wilczek-lecture.pdf

► "Unreasonable ineffectiveness of mathematics" 維基百科條目。儘管寫得不理想，但大致可看到一些參考資料與想法，其中也引了知名數學家葛爾方德（I. Gelfand）的名言：「只有一件事比數學在物理中不合理的有效性更不合理，那就是數學在生物學中不合理的無效性。」http://en.wikipedia.org/wiki/Unreasonable_ineffectiveness_of_mathematics

► Kasman, A, "Unreasonable Effectiveness" from *Reality Conditions: Short Mathematical Fiction*, MAA (2005). 這是一篇短篇數學小說，給了一個數學有效性的搞笑理由。<http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/unreasonable.pdf>