從馬寧的觀察談起

反思數學在物理上的威力

作者：高涌泉

作者簡介：高涌泉為臺大物理系教授，畢業於加州大學柏克萊分校。除研究外，長年致力於科普推廣與寫作，為《科學人》固定專欄作者。部分文章收錄於其個人散文集《另一種鼓聲》、《武士與旅人》。

對於物理與數學兩者之間極其微妙、難以剖析的緊密關係，已有無數精彩論述。非常多知名的數學家與理論物理學家都曾發表過他們的看法，其中以研究對稱性在物理上的意義聞名的維格納於1960年所發表的〈數學在自然科學中不合理的有效性〉尤其受人矚目，因為維格納把數學推論在物理中的巨大威力看成我們終究無從理解的奇蹟，繼而引來眾多贊成或反對的評論。這些討論涉及了數學家、科學家與哲學家自古以來就不停爭辯的基本問題，如實在論 vs 反實在論、柏拉圖主義 vs 反柏拉圖主義等，可以想見要讓大家當下得到共識是近乎不可能的事。

德利涅（維基百科）

我無意（也無能力）在此繼續追究數學的威力究竟從何而來，反而是要倒過來探究數學在物理上的威力是否有其限制？原因是我前些時在馬寧（Yuri I. Manin）的文集《作為隱喻的數學》（*Mathematics as Methaphor*）中讀到〈數學與物理的交互關係〉（Interrelation between Mathematics and Physics）一文，看到他對於兩者關係的一些有趣觀察，另外又在《美國數學學會會訊》2014年2月號轉載〈德利涅訪談記〉（Interview with Pierre Deligne）一文中讀到德利涅對於物理神祕威力的感嘆，引發了我省思數學對於當代理論物理發展的幫助究竟有多大。

馬寧在〈數學與物理的交互關係〉文章中說，在19世紀末、20世紀初，數學家集中精力處理一些基本問題，例如什麼是數學證明？數學的無窮大地位是什麼？但是他們創造出的新數學，如勒白格積分，對於正掛念於量子現象的物理學家如波耳、

愛因斯坦、包立、薛丁格、狄拉克來說，根本沒有用，而數理邏輯方面的進展，這些人更是不在意。物理學家所需要的數學，如矩陣、旋量（spinor）、佛克空間（Fock space）、狄拉克δ函數、勞侖茲群表現（representation of Lorentz group）等，他們都自己「應變地首先或重新創造出來」。

我尤其注意到馬寧又說


波耳（左）和愛因斯坦（右）。（Ehrenfest 攝）

數學與物理兩陣營有傳統的專業互動也中斷了。自 1930 年代量子電動力學取得初步的成功，直到 1960 年代兩方再次開始交往為止，數學家對於本世紀主要的物理研究領域——量子場論——幾乎毫無貢獻。相對地，物理學家不僅不注意數理邏輯（可以理解），或解析數論（一向如此），也根本不在乎正萌芽的代數拓樸。三十年後，拓樸學已經成為兩陣營的共同主題。有些弔詭地，數學這邊從這些互動的收穫大過物理那邊的收穫：新的三維與四維流形的不變量，量子群，量子上同調群（quantum cohomology）就是互動的成果。

我不知道馬寧為何說數學與物理在 1960 年代又開始來往，我以為就量子場論這主題而言，兩者其實是到了 1970 年代中期才因規範場論、手徵性異徵、瞬子、指標定理等主題的發展方再相互靠近。不過這不是要點，我重視的是馬寧說直到 1960 年代，數學家對於量子場論這重要物理領域「幾乎毫無貢獻」這回事。我想馬寧所說的是事實。

事實上，就算是在 1960 年代之後以至今日，數學家對於量子場論的貢獻仍然極為有限。一個例證就是德利涅對於這二、三十年來物理與數學的交流的一些感想——他在我之前提到的訪問記錄中有這麼一段話：

物理學家會定期地提出一些令人意外的猜測，大多是藉由完全不合法的工具。但是至目前為止，每當他們做了預測，例如對於某個曲面上，具有某些性質的曲線之個數的某些數值預測——這些數字都很大，或許上百萬——他們都是對的！有時候，物理學家的預測與數學家之前的計算不相符，但是最後證明物理學家還是對的。我想他們看到了一些真正有意思的東西，但是我們至今還捉摸不了他們的直覺。有時候他們做了預測，數學家所能做的就是擠出一個笨拙的證明，但還是無法有深刻的理解。事情不應該是這樣子的。我們在普林斯頓高等研究院與物理學家共同舉辦了一些研討會，我的願望就是能夠在不依賴韋頓（Edward Witten）的情況下，有辦法自行做出一些猜測。但我做不到！我對他們的圖像的了解還不足以讓我這麼做，我依舊必須依賴韋頓來告訴我什麼才應該是有趣的。

德利涅與韋頓等人主持的跨領域研討會的記錄後來還出版成兩大冊共約一千五百頁的書《量子場與弦：給數學家的課程》（*Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*），可見德利涅真的投入不少精力學習物理。如果連德利涅都覺得無從掌握量子場論（與弦論）的精神，一般數學家當然更難對於場論（弦論）的進展有所助益。

其實在 1930 年代量子場論剛起步的時候，數學家如魏爾（Hermann Weyl）仍可以對於場論有獨到的貢獻。例如當狄拉克還以為可以將質子看待成電子的反粒子之時，魏爾就指出場論（與狄拉克方程式）的數學邏輯要求電子與其反粒子必須有相同的質量。後來實驗學家找到了電子的反粒子——正

子，其質量果然等於電子質量！不過在魏爾這項貢獻之後，場論重要文獻中除了一兩個例外（見下文）幾乎就看不到數學家的名字了。

狄拉克（左），包立（中）攝於 1953 年。（倫敦科學博物館提供）

為何如此？除了如馬寧所說兩陣營的交流在這段時間是中斷的之外[1]，我想還有一個重要原因，那就是雖然量子場論的基本數學架構已經由海森堡（Werner Heisenberg）、包立、狄拉克等人建立起來，但是這門學問在 1930 年代後的重大進展都不是純粹靠邏輯推理就能夠達成的，若沒有實際物理現象的啟發，量子場論學家根本無從想像那些現代場論不可或缺的核心概念。儘管這段時間還是有一些一流數學家努力鑽研量子場論，他們終究沒獲得什麼有意思的成果，不過我以為這是可以預期的。

我現在以具體的例子來說明這種「經驗（現象）壓過理性（邏輯）」的狀況。二十世紀下半葉量子場論最重要的成果即是確立了自發失稱（或譯自發對稱破缺，簡稱 SSB）與重整群（簡稱 RG）這兩個核心主題。如果沒有 SSB 與 RG，粒子物理中非常成功的標準模型根本不可能出現。

我先介紹 SSB。SSB 指的是描述一個系統的拉格朗日函數（Lagrangian）以及其所意涵的量子場方程式具有某種對稱性，但是此系統的基態（最低能量態）卻不具有拉格朗日函數所擁有的對稱性。我們知道對於有限自由度（維度）的系統來說，基態必然呈現方程式的對稱性，例如氫原子的基態波函數（S 軌域）在旋轉變換之下不會改變，即基態具有薛丁格方程式所擁有的旋轉對稱。但是在具有無窮自由度（無窮維）的系統如場論中，基態卻不必然呈現拉格朗日函數的對稱性。

SSB 最重要的範例之一是超導現象。在場論中，所有的電子都是同一個所謂「電子場」的量子（激發態），描述超導體內電子交互作用的拉格朗日函數是電子場的函數。這個函數有個特性：若電子場乘上 $U(1)$ 群的任一元素，亦即電子場乘上一個所謂的相因子（phase factor），則此拉格朗日函數維持不變，以術語說，此拉格朗日函數有 $U(1)$ 對稱性。

在 1957 年，巴丁、庫珀與施里弗（J. Bardeen, L. Cooper & J. R. Schrieffer，簡稱 BCS）三人寫下了一個波函數，他們證明這個波函數可以精確描述超導體的一切性質，例如能隙（energy gap）的存在，因而破解了困擾物理學家 45 年的超導之謎。但令人不安的是這個波函數並沒有 $U(1)$ 對稱，更具體的講，這個波函數並沒有單一固定的電子數目，反而是由帶有不同電子數目的狀態所組合起來的。為什麼 $U(1)$ 對稱與電子數目有關？答案在著名的諾特定理：數學家諾特（Emmy Noether）在 1915 年證明了一個系統的拉格朗日函數若具有某個連續對稱，則這個系統就有個相對應的守恆量。知名的例子包括空間平移對稱所對應的守恆量是動量，旋轉對稱所對應的守恆量是角動量，時間平移對稱所對應的守恆量是能量等。依據諾特定理，超導體拉格朗日函數的 $U(1)$ 對稱所對應的守恆量正

[1] 例如，格羅騰迪克根本無須理會物理，雖然他也曾花時間讀費曼的書，見《美國數學學會會訊》2010 年 10 月號〈追憶格羅騰迪克及其學派〉（Reminiscences of Grothendieck and His School）一文。

是電子數目。所以 BCS 波函數沒有明確的電子數與它沒有$U(1)$對稱是一體的兩面。

但是物理學家已經知道電子數目必須是守恆的，否則電子與光子就無法有適當的交互作用。如果電子數在 BCS 的理論中是不守恆的，這不就意味著 BCS 理論有著根本的缺陷？南部陽一郎（Yoichiro Nambu）花了近兩年的時間研究了這個問題，他在 1959 年發現 BCS 理論其實還存在著一種不帶質量的粒子（術語是集體模態，collective mode），一但把這種粒子考慮進來，電子數目便還是守恆的。（另外安德森（P. W. Anderson）等人也知道這個結果。）所以南部證明了$U(1)$ SSB 的確發生於 BCS 理論之中，並且沒有任何不合理的矛盾存在。南部的論文一出現，戈德斯通（J. Goldstone）很快地就將他的發現推廣成一般的定理： 如果 SSB 發生於任何系統，則系統中一定存在著一個與之相對應的零質量粒子。（這個粒子現今就稱為南部 / 戈德斯通粒子。）

南部從 BCS 超導體理論學到了 SSB，更進一步想到可以將這個概念推廣至強交互作用。他先假設強子（質子與中子）最初是無質量的粒子，而且強子之間的交互作用類似於 BCS 理論中電子間的作用，接著以 BCS 模型為本，建構了一個強作用模型；BCS 模型有$U(1)$對稱，南部的模型則有所謂的手徵對稱（chiral symmetry，這個對稱要求強子不能帶有質量），但是依據 SSB 的精神，此手徵對稱僅成立於南部模型的拉格朗日函數中，然而基態則不會表現出手徵對稱，其後果是質子與中子將因此而獲得質量，這個狀況類似於能隙出現於超導體之中。南部同時證明他的模型也含有一個零質量粒子，他把這個粒子看待成強作用中的π介子（亦即π介子是手徵對稱自發失稱後所出現的南部 / 戈德斯通粒子）。南部的理論澄清了強作用中某些令人費解的現象，因此大家馬上認同 SSB 也出現於強作用中。

諾特（維基百科）

長久以來，強作用一直是量子場論最頭痛的問題，沒人能預見解決其中某些關鍵點的靈感居然會來自超導現象，而不是來自於數學的發展。對於無窮維系統，純邏輯性的探究沒法讓我們看清事物的本性，若非有實際現象的啟發，我們根本挖掘不出這些超越我們直覺的本性。

SSB 的故事在南部與戈德斯通的工作之後，還有重要的後續發展，那就是安德森、恩格勒（F. Englert）、布勞特（R. Brout）、希格斯（P. Higgs）等人以及南部本人體認到如果呈現 SSB 的對稱是一種規範對稱（gauge symmtery），那麼本來應該存在的南部 / 戈德斯通粒子會和原本零質量的規範粒子結合成為帶有質量的（向量）粒子。這就是近年來因為希格斯粒子的發現而廣為人知的所謂「希格斯機制」。溫柏格（S. Weinberg）等人將此機制用於弱交互作用使其成為標準模型的根基之一。

RG（重整群）是場論在二十世紀後半葉的另一項重要成就，它主要是由威爾森（Kenneth Wilson）在 1960 年代中期至 1970 年代初所建立起來的，現今已成了研究場論不可或缺的工具。事實上可以這麼說，唯有透過 RG，我們才能真正理解到底什麼是量子場論。這裡頭有曲折的故事，我無法在此解說，只想強調現代 RG 的誕生與對於臨

南部陽一郎（維基百科）

法捷耶夫（維基百科）

韋頓（維基百科）

賽伯格（Lumidek 攝）

界現象（critical phenomena）的研究密不可分，RG 的核心概念大多來自臨界現象的啟發。人們後來將 RG 應用於楊 / 米爾斯規範場論，才發現楊 / 米爾斯場論有漸進自由（asymptotic freedom）的特性，從而建立了現代強作用理論──量子色動力學（quantum chromodynamics）。

從 SSB 與 RG 的發展歷史可知，面對無窮維系統的挑戰，量子場論學家得益於凝體物理系統（超導體與臨界現象）之處遠大於嚴謹的數學。許多場論新觀念是由實際現象歸納出來的，由上而下的演繹似乎派不上用場。這種情況和量子力學的創立雖有類似之處，但其實並不相同。在海森堡創立量子力學之時，他也是必須由實際現象出發，去推測自然規律，但是在他之前我們對於這些規律一無所知。可是量子場論的基本方程式自 1930 年代已經為人所知，所以我們或許會期待這些方程式的解是個數學可以著力的問題，然而歷史顯示，一切有意思的解都來自實際現象的引導，數學終究沒能幫上大忙。

不過數學家還是有所貢獻，最好的例子應該是法捷耶夫（L. Faddeev）與波波夫（V. Popov）在 1967 年用費曼路徑積分方法將楊 / 米爾斯規範場給量子化的工作。在法捷耶夫與波波夫之前，費曼已經有了適用於單迴圈圖（one loop diagram）的初步結果，而德維特（B. S. DeWitt）也已得到適用於多迴圈圖（all loop）的完整答案，但是法捷耶夫與波波夫的推導最簡單清楚，所得到的所謂費曼法則（Feynman Rule）最容易使用，因此影響力最大。所以數學對於釐清技術性的困難還是有其威力，只是對於較無從捉摸的動力學（dynamics）就使不上力。

大約二十年前，賽伯格（N. Seiberg）與韋頓對於某些超對稱規範場論的研究導至所謂「賽伯格 / 韋頓方程式」，後來這些方程式成為處理某些純數學問題的最佳工具。若沒有 SSB 與 RG 的概念為基礎，賽伯格與韋頓不可能完成他們的工作，所以「以自然為師」對於物理來說固然是本業，對於數學而言，似乎也是好事，這也意味著經驗與理性有著深不可測的關係。∞