數學家，出來吧！

誤入歧途的數學師資培育

作者：伍鴻熙 Hung-Hsi Wu
譯者：林真

作者簡介：伍鴻熙是出生於香港的華人數學家，麻省理工學院博士，研究領域為複幾何，現為美國加州大學柏克萊分校名譽退休教授。二十年來，他長期關注中小學數學教育，曾投身加州數學教育，並全程參與美國 CCSS 數學綱要之制訂。

重點摘要

▶數學系畢業的學生不見得能教好國中小數學，為研究而設的大學數學課程無益於準老師。想要讓教學有成效，數學師資培育所需的數學課程必須與教學相關，也與數學基本原理一致。

▶國中小數學是許多老師、數學教育家與教育行政人員數學資訊的主要來源，因此不矯正國中小數學的問題，數學教育就會落入惡性循環，無法進步。這是數學界長年疏忽的責任。

▶要如何將抽象數學客製化用於教學現場，唯有數學家做得到，但必須先理解現場教學的實務與限制。反之，數學教育家必須體認教育文獻長期累積的數學謬誤，與數學家合作重建符合數學與教學原理的數學課程。

如果我們想在學校培育優良的法語老師，是不是該要求他們在大學學習拉丁文，而非法文？畢竟拉丁文是法文的源頭，語言結構也比法文複雜，精通這種更為複雜的語言，老師應該可以更懂他們在中學時代學過的法文。如果我們想觀察老師的法文學識和學生成績之間的關聯性，只要看看老師的拉丁文成績就好！

儘管上述情景聽來荒謬，但在數學師資培育上，直到 2011 年的現狀卻與此相去不遠。一個自然出現的問題是，為什麼數學界要煩惱教育問題？答案是我們每年在微積分課堂上面對的大一生，乃至數學研究所的研究生，都是這種教育思維的產物。本文的目的是在提醒學界，當前的教育事業亟需數學界的主動參與，希冀能喚起大家的行動。我們首先會回顧過去四十年來數學師資培育的狀況，接著指出要如何才能增進數學老師的學科知識（content knowledge），以及為何需要學識豐富的數學家積極投入。

提醒讀者本文談的是美國數學，由於學制不同，我們不硬譯為國內學制。大學前的 school 譯為學校；teacher 譯為老師。K-12 有時直譯為「幼稚園到高中」；或大學前；或保留 K-12 寫法。school mathematics 譯為學校數學，其實就是 K-12 數學。

貝格的早期研究

沒人會對數學教育的進步仰賴培育好老師的說法持疑。一般咸認的「自己不會的東西，不可能教得好」的想法，正足以說明需要培育具有堅實數學背景的老師。然而數學教育體制無論在實習老師或在職老師的階段都未專注於他們的專業養成，部分原因是對老師究竟需要知道什麼還未有定論。「教育家」[1] 似乎很樂意讓數學社群決定中學老師需要知道的東西，自己則只負責小學老師的養成。對於前者，「拉丁文 / 法文症候群」屢見不鮮。數學家讓中學老師學習準數學研究者需要學習的高等數學，然後期望在「學識下滲」（Intellectual Trickle-Down Theory）[2] 的長期作用下，這些老師最終會獲得在教學現場需要的知識。至於小學老師，他們所接受的數學教育品質通常有待加強：數學家對於培育數學老師最常使用的教科書的負面評價（[NCTQ]，34-37 頁及 76-81 頁），正足以說明小學老師養成教育的窘境。

當然，一個相關的議題是數學老師的學科知識和學生的表現究竟有無關聯。早期曾嘗試找出箇中奧秘的研究者之一是貝格（Edward G. Begle），他是「學校數學研究小組」（School Mathematics Study Group）的主持人，這個小組因 1955-1975 實施的「新數學」（New Math）而為人熟知。1972 年，在一項針對 308 位教導「第一年代數」的中學老師的研究中（[Begle 1972]），他讓老師和學生都參與一項選擇題測試，以量度老師知識和學生學習成就的關聯性。大體來說，他發現「幾乎沒有實證可支持老師的數學訓練會提高學生數學成就的說法」。接著，他調查數學教育研究的實證文獻，再次確認當時的證據無法支持「一個人對其科目了解越深，就越能當個稱職的老師」的想法。（[Begle 1979] 51 頁）

貝格 1972 年的研究最為人所知的，是質疑數學學科知識和教學成效之間的關聯性，但仔細檢視這份報告很有助益。貝格對老師做了兩次測驗，一次是關於實數系的代數，另一次則是關於群（group）、環（ring）、體（field）的抽象代數層次。經由分析測驗的結果，貝格得到：

> ……老師是否了解近世代數（群、環、體），對於學生學習代數運算或九年級代數的成就並沒有顯著的相關性。……然而，老師對於實數系代數的理解，確實與學生是否理解九年級代數呈現顯著的正相關。（[Begle 1972], 原文 8 頁）

從這些發現，貝格提出了兩點獨具慧眼的建議：

> 老師的近世代數成績和學生的學習成就間不顯著的相關性，暗示我們不需要強壓老師學習那些和所教課程無關的知識。而老師實數系成績和學生九年級代數間儘管不大的正相關，也提醒我們應當讓老師對於他們要教的課程有扎實的理解……（出處同上）

可惜的是，貝格並沒有遵從自己的建議。否則的話，這篇文章也不需要面世了。且讓我仔細陳述。貝格研究的中學老師，傳統上在大學裡需完成相當於數學系主修的課程。然而，數學主修課程的目的主要是讓學生具有進研究所深造的能力，因此其中充滿了「和（老師）日後教學內容沒有直接相關的課程」。早在 1972 年，貝格即已隱約發現中學老師培育中的重大缺失，亦即他們學到的資訊對於工作沒有直接幫助。換句話說，我們等於是教法文老師拉丁文，然後希望他們將來很會教法文。貝格的第二個建議則暗示他了解與此互補的另一件事實，亦即中學老師**真的**需要能讓他們更扎實了解教學內容的課程。

[1] 我在本文使用「教育家」指稱大學裡的數學教育（系）教師。

[2] 譯註：下滲（或譯涓滴）一詞借自經濟學，指讓富人更有錢，窮人亦終將受惠的主張，這裡有諷刺的味道。

教師專業養成的基本準則

自貝格之後，不少人接續他的研究，特別是 [Goldhaber-Brewer] 及 [Monk]，但與本文最相關的是波爾（Deborah Ball）的研究。她在貝格研究的二十年後，討論小學老師需要的數學知識。她對中小學老師的調查發現，即使是數學系畢業的老師，也未必能以數學上和教學上的恰當方式，解釋諸如分數除法（五或六年級的基本主題）的基本觀念。她的結論是「老師的教材訓練（subject matter preparation）幾乎從來不是師資教育任何一個階段的重點」。（[Ball] 465 頁）

幾年之後，因為參與加州數學計畫（California Mathematics Project）的緣故（見 [Wu1999c]），我注意到數學老師對於學科知識的欠缺，並從理論的角度申論，大學培育準數學師資的方法亟需改進（[Wu1999a][Wu1999b]）[1]。我的結論和貝格及波爾完全一致，在此以更精要的語句陳述如下。為了讓教學更有成效，我們必須提供老師滿足下列兩個條件的數學知識：

（A）它應該**與教學相關**，不致偏離授課內容太遠。

（B）它應該**與數學基本原理一致**（見 78 頁）。

本文後續將會詳細解釋這兩點。

大學的有理數教學無益於小學生

這兩項對於師資培育的要求幾乎是彼此矛盾的，而最能闡明此一矛盾的就是分數的教學。儘管分數現在有時早在二年級就提到，它最重要的內容則是排在五年級到七年級間，而學生學習分數的困難在美國社會是路人皆知[2]。因此我們會集中探討五到七年級的分數教學。

對於中小學時代只有模糊記憶的數學家，或許會納悶為什麼負責教這些年級的老師必須具有**切合學生程度**的分數知識。有序整數對的等價類有什麼難懂的？讓我回顧一下大學數學課是怎麼教分數的。

按照慣例，以$\mathbb{Z}$表示整數，並讓S表示有序整數對$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$的子集，其中包含形如$(x, y)$的元素，而且$y\neq 0$。引入$S$中的等價關係$\sim$，當$xw=yz$時，定義$(x,y)\sim(z,w)$。現利用$\frac{y}{x}$表示$S$中$(x,y)$的等價類。稱所有形如$\frac{y}{x}$元素構成的集合為有理數$\mathbb{Q}$。再把$\mathbb{Z}$與形如$\frac{x}{1}$的元素構成的集合等同起來，於是就有$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$。最後我們**定義**$\mathbb{Q}$上的加法和乘法，將它變成一個環：

加法：$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{xw+zy}{yw}$

乘法：$\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{w}=\frac{xz}{yw}$

當然，我們會例行的檢查這些定義和等價關係的相容性。這些是通常兩三堂課教給數學系學生的內容，無庸置疑這和數學基本原理一致。問題是對五到七年級的學生，數學老師能用這些資訊做什麼？大概什麼都不行。

讓我們再分析一下這個定義：這需要理解將S分割成等價類的概念，並能將每個等價類當作一個元素。光是獲得這樣的理解，對數學新生來說已是邁出一大步。此外，了解$\mathbb{Z}$與$\{\frac{x}{1}:x\in\mathbb{Z}\}$是等同的；或著說，自$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Q}$的單同態（injective homomorphism），則需要更高層次的精熟。

上面的討論對於 10 到 12 歲的學生自然難以理解，但更麻煩的是有理數加法和乘法的定義。例如在定義加法之後考慮乘法，將它定義成$\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{w}=\frac{xz}{yw}$很合理，因為我們想在$\mathbb{Q}$上引入環的結構，而這是最明顯又有效的方式。但我們能向一般小學生解釋說，因為環很重要，所以這個乘法定義是「正確」的嗎？若是如此，那麼按照學生的夢想，定義$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{x+z}{y+w}$又有什麼不對呢？

在 1930 年代將有理數視為有序整數對之前，學校早就存在了，而分數是必教的學校課程，可想而知老師長久以來肯定學到了某種不同版本的分數。但這種版本的數學並沒有假裝在教數學。至少就這個例子，我們為了讓學校教學得以維持付出了龐大的成本，代價就是犧牲了數學基本原理。

複雜而混亂的分數教學

數學仰賴精確與明文的**定義**，但小學老師所學習的分數概念幾乎「沒有」定義可言。下面是個典型的例子。分數同時表達三個概念：**全體的部分、比和除法**。因此當全體被平分成4份，其中的3 份就用$\frac{3}{4}$表示。因為「全體」是什麼並不清楚，教育文獻通常依賴比喻來進行。「全體」的原型就「像」一個披薩。但是把一個披薩平分成4份，是照形狀分？照重量？還是面積？教育文獻並沒有說明。再者，兩片披薩要怎麼相乘或相除？ [Hart]

至於將分數當作比時，$\frac{3}{4}$可以表示「比的情境」，像是每3位男孩就有4位女孩。男女孩和披薩之間有什麼邏輯連結嗎？教育文獻在這點依舊毫無著墨，只明確要求五年級生最好能對分數有這樣的概念理解，知道它同時代表兩種意義。

最後，$\frac{3}{4}$ 還代表「3 除以 4 」。這句話有「許多」錯誤。首先，當學生學分數時，他們要不還在學自然數❸ 除法，不然就是剛學完。在後者的情況，學生只有當m是n的倍數時，將$m \div n$ 視為平分或測量❹。如果m不是n的倍數，學生學到的是帶餘除法，$m \div n$ 產生「兩個」數──商和餘數。因此說$3 \div 4$是「單一」的數，對學分數的學生來說是全新的觀念。而且，用$3 \div 4$ 來定義 $\frac{3}{4}$在數學上是驚人的曲解。事實上，只有在「全體的部分」有良好定義，且$m \div n$ 對所有自然數m、n也有良好定義時，我們可以證明$\frac{m}{n} = m \div n$。然而，教育文獻中並未提及這點，而且這種「缺乏論證」的內容充斥在分數的教學中。

這樣的專業養成，使得小學老師普遍要求學生相信有種神秘的量叫做「分數」，具有三種毫不相干的性質。然後要求他們用同等神秘的方式計算這些神秘的量。當兩個分數相加時，先取分母的最小公倍數，然後再對分子做些不尋常的操作以得到結果。至於這種分數加法和普通自然數加法代表「把東西合起來」的解釋，到底兩者為何相關，如何相關，沒有絲毫解釋。

請注意我們現在談的是小學老師的「數學」教育。我們教老師數學，讓他們透過適當的教學修整後，可以把這些觀念教給中低年級學生，而且在幾乎不做任何修改下，還可以繼續教給高年級。老師要怎麼教五到七年級的學生分數加法呢？如果分數 $\frac{a}{b}$ 被定義為數線上的一點，兩分數 $\frac{a}{b}$ 和$\frac{c}{d}$ 的和，依照定義便是區間$[0, \frac{a}{b}]$與 $[0, \frac{c}{d}]$ 頭尾相連的長度和，就像自然數加法一樣。依照這種方式，分數相加便又是「把東西合起來」了。一點簡單的推導就能得到 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$（[Wu2002] 46-49 頁）。

接著考慮除法。分數除法的死背教學是完全漠視數學基本原理的代表性例子。因此才會產生這樣的口訣：「別管原因為何，顛倒相乘即可。」最近對於這種死背教學的一項回應，是模仿自然數相除的教學法，用「連減」來教分數相除。不幸的是，在體中的除法概念和歐氏整域（Euclidean domain）的除法算則不能混為一談，結果只是把先前有缺陷的數學教學，換成另一個也有缺陷的數學教學。這種轉換發生的狀況，在最近中小學數學教育中似乎已變成常態。

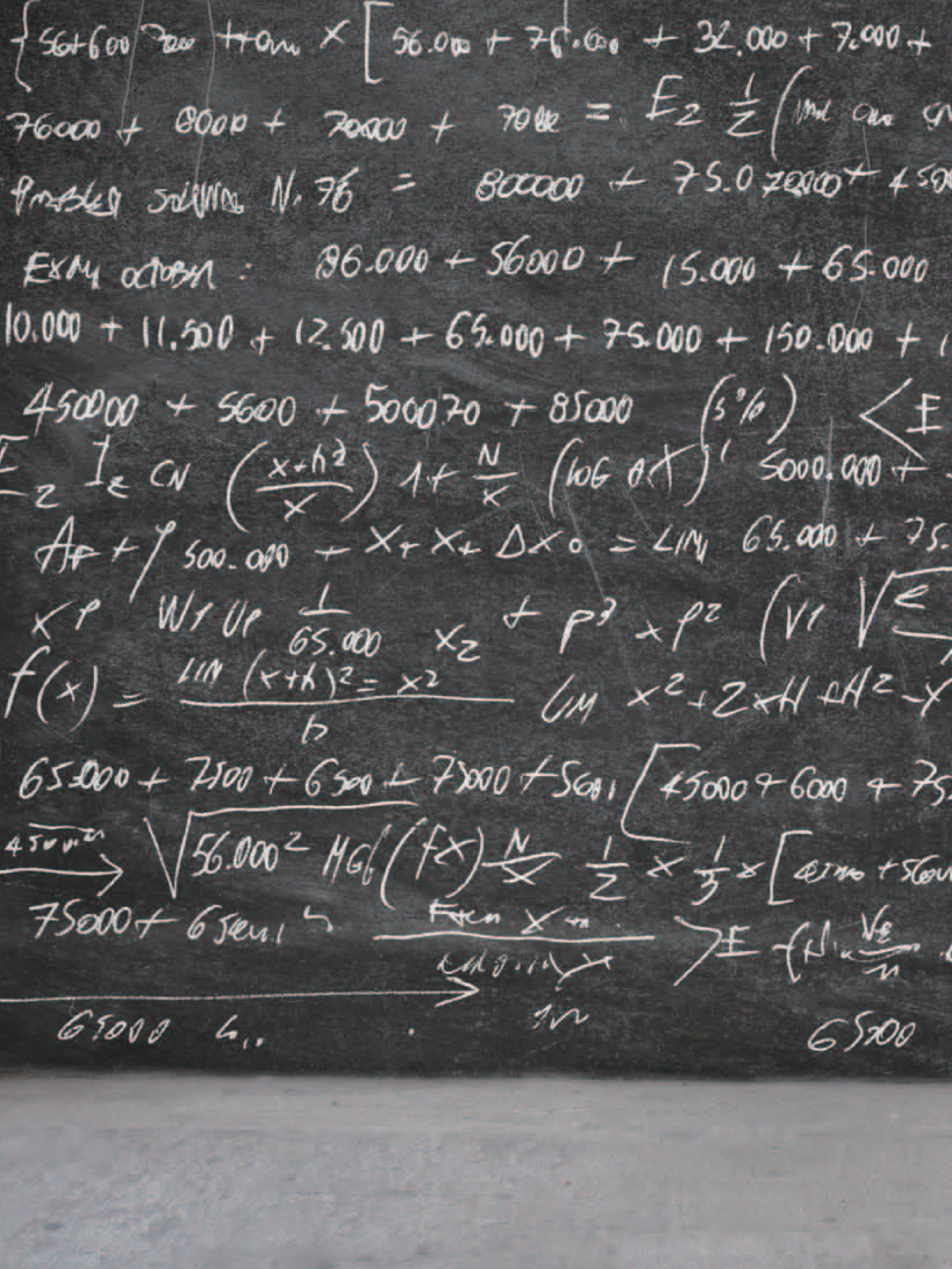
從任何知性的努力角度，出現這樣的危機，自然要尋求更多的研究，並注入新想法來解決問題。目前我們欠缺的，是既能滿足學生認知發展，又不會犧牲精確定義、推理和數學一貫性的分數教學法的教育研究。（關於現有研究文獻的簡要討論，可參閱 [Wu2008a] 33-38 頁。）

❶ 我很希望當時就知道貝格和波爾的研究，可惜事實並非如此。

❷ 要明白這點，只消看看《史努比》（Peanuts）和《福斯一家》（FoxTrot）兩部漫畫

❸ 譯註：whole number 指自然數加上 0，硬譯只能譯成很專業的「非負整數」。為了行文簡單，在不影響文意下直接譯成「自然數」。

❹ 編註：平分和測量是除法的兩種基本情境。測量亦稱「包含除」或「分裝」，例如 15 公尺的繩子，每 3 公尺剪一段，可剪成幾段？


10.000 + 11.500 + 12.500 + 65.000 + 75.000 + 150.000 +
450000 + 5600 + 500070 + 85000
65000


65.000 + 840.000 + 650.000 =
45.000
65.000 + 75.000 + 840.00
75.000
85.000 + 18.000

為了改進分數教學，首先需要寫出一本教科書，以條理一貫的方式來處理這個主題，它必須動之以理，而非教條。近二十年來，已有一些實驗循此方向進行，但從現在的觀點來看，這些實驗都不成功。一個比較簡單的任務是編寫培育國小師資的教材，其內容要淺顯到能用來教導五至七年級的學生。這需要一種不同的分數數學的表徵（representation），有別於前述那種數學不一致的教學法。一個已經完成的教學法，是將分數明確定義為數線上的一點（[Jensen][Wu2002]）。小學老師學的是否這種分數教學法並非重點，重點是他們學到的版本符合先前提及的條件（A）和（B），如此他們才能在教學現場教學生正確的數學。**期待老師自己建立符合（A）、（B）條件的知識極為不切實際。**

我們再用兩點評論，進一步說明為何需要特別強調教學的特殊知識。目前學生學習分數的一大絆腳石，便是分數被當成和自然數**截然不同**的數來教學。例如，有人認為「學童必須接受的分數新法則，時常和他們原本熟悉的自然數觀念衝突。」（[Bezuk-Cramer] 第 156 頁），這裡的法則應該是指算術的法則，若然，我們可以很肯定的說，自然數和分數有著完全平行相應的算術法則，而兩者間的相似性正是我在 [Wu2002] 中強調的重點。

對於$\mathbb{Z}$是$\mathbb{Q}$的子環這件事習以為常的數學家，若對這種有理數和自然數間的誤解感到驚訝，他們就應該自問，從幼稚園到大學的教育（或者說，整個老師的求學）過程中，老師何時曾**明確**了解這個基本的代數事實。答案很不幸的大概是「從來沒有」，因為在大學最後兩年之前，數學課傳統上側重的是技術而非觀念，甚至在大三、大四的課程中，我們一般的教育方式往往使得概念被程序和形式所淹沒（[Wu1999a]）。讓老師都能理解$\mathbb{Z}$和$\mathbb{Q}$結構上的相似，讓他們教分數時，能強調分數和自然數之間的相似，而非不同——應該是可以達成的目標。

大學前的實數與 FASM

第二點是學校數學是建立在$\mathbb{Q}$（有理數）而非$\mathbb{R}$（實數）上。有理數在大學前課程無所不在，而實數只是一個淡淡的影子[1]。正因為如此，分數的概念才該被好好教導。我們希望所有老師都能察覺有理數在他們日常工作中的重要性，但很少人如此，因為我們從來沒有強調這一點。

就現場教學的實務，K-12 數學中的實數都可用所謂的**學校數學基本假設**（Fundamental Assumption of School Mathematics；FASM）來處理（見 [Wu2002] 101 頁和 [Wu2008b] 62 頁）。這項假設說的是，所有對有理數有效的公式或弱不等式，對實數也都成立[2]。例如在七年級的分數加法公式：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

其中a、b、c、d 都是自然數。我們能在（也應該在）a、b、c、d 是有理數時證明這個式子同樣成立。再由 FASM，這個公式對a、b、c、d 是實數時也適用。因此中學生可以毫不猶豫的寫下

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$$

即便他完全不知道什麼是$\frac{1}{\sqrt{2}}$或$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$。如果你覺得這個例子太過造作又無關宏旨，想想這個有用的等式：對所有實數 $x\neq\pm1$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$$

如果x是有理數，這個等式很容易驗證（參照前述的加法公式）。不過這個等式也意味著

$$\frac{1}{1-\pi}+\frac{1}{1+\pi}=\frac{2}{1-\pi^2}$$

若是沒有 FASM，我們在 K-12 階段都無法確認這個等式，所以在學校數學裡，相信它成立純粹只是出於信念。

最後再舉一個例子。設a是不等於1的正數，那麼對所有的有理數$\frac{m}{n}$和$\frac{p}{q}$，我們能驗證下列有理指數的指數律（儘管證明很冗長）：

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

現在 FASM 暗示我們能夠直接假定下列等式對所有實數 s 、t 都成立：

$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$

當然，學校數學沒辦法在s 、t 不是有理數時，說清楚 a^s、 a^t 以及 a^{s+t} 是什麼，更別提要解釋上述等式為何成立。然而，這個等式不是只有純脆的學術趣味，因為我們需要它來描述指數函數 $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 的基本性質。

上面的討論指出，任何中學數學的討論註定漏洞百出，要填補這些漏洞就需要 FASM。我們希望 FASM 是數學師資專業培育的基本部分，然而就我所知，FASM 從來就不是專業養成的一部分，因此中學老師被迫得在從有理數往實數的轉換過程中蒙混過去。我們很難相信，當老師慣於混淆到底什麼是已知、什麼是未知時，他們的教學會對學生有益。目前的數學師資教育絕對有改進的空間。

速度的概念

關於教一般大學生數學和教準數學師資培育的差異，另一個例子是「等速」的概念。試看這個五、六年級的典型問題：

如果依娜花 90 分鐘走了 $3\frac{2}{5}$ 英哩，那麼她走半英哩得花多長時間？

通常的解法是用「比例式」：假設依娜要花x 分鐘走半英哩；從比例推理可知「距離的比例等於時間的比例」。因此，$3\frac{2}{5}$ 對 $\frac{1}{2}$的比等於 90 對 x 的比，亦即

$\frac{3\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{90}{x}$

交叉相乘後得到 $3\frac{2}{5} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 90$，因此$x = 13\frac{4}{17}$ 分鐘[3]。

這個答案無疑是正確的，但是使用比例式的道理何在？我們不能解釋這個死背的步驟，因為**解釋所預設的假定被藏起來了**，也就是依娜是等速行走的。如我們所知，沒有假設，就沒有推導。因此在這裡，實際的解題被降級成死記套用比例式的程序。

為什麼學校數學不提「等速」的觀念？或者即使在課堂上提到了，卻不加解釋？這得回頭探究我們是怎麼養成老師的。大學數學中唯一提到等速觀念的是微積分。假設沿著直線運動，描述時間t時與某定點距離的函數為$f(t)$，若它的導數$f'(t)$ 是常數就稱為**等速**。當然，有些老師沒有修過微積分，但即使修過的人，也只不過把等速看成一個微積分的概念。因為我們認為沒必要幫這些準老師，建立大學數學和學校數學之間的關聯性。這種對於等速的錯誤觀念會一直伴隨他們，等站上講台才發現不可能談導數，因此也認為不可能討論等速。一旦有這種刻板印象，他們便會倒退回到自己大學之前所學的，根本不談等速。於是這種傳統就被延續下去，不只是課堂，還延伸到教科書。

在中學和小學老師間，修過微積分常被視為一種榮耀，某些師培學程因為這個原因特別納入微積分。但修過標準的微積分課程不代表老師就比較會教學，等速不過是眾多實例中的一個而已。

理想上，師資課程應該說明在教學中，速度的概念因為太微妙而難以精確解釋，但我們應該改採**在時間區間 $[t, t']$ 間的平均速度**的概念，亦即

（從時間 t 到 t' 所走的距離）/（$t - t'$）

而且如果一個運動對「所有」時間區間 $[t, t']$，平均速度都是 K，就稱為**以等速 K 行進**，也就是

（從時間 t 到 t' 所走的距離）/（$t - t'$）$= K$

只要這個觀念被引進，上述例子之所以能用比例式，就能以「假設依娜等速行走」來解釋。因為，

---

❶ 從貝格對老師的測驗來看，他似乎忽略了這項基本事實。（[Begle1972]）

❷ 這是連續性以及有理數在實數中稠密（dense）的顯然結果。

❸ 編註：這個解法的形式在臺灣是七年級的課題，因為繁分數、交叉相乘、解方程式都是七年級的主題，不過較樸素的形式在六年級可以用「相等的比」來解決。

依娜在兩個時間區間 $[0,90]$ 和 $[0,x]$ 內的平均速度都相同，因此

$$\frac{3\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{90}{x}$$

這個等式和上面的比例式等價。

當然，學生很難了解「每個」時間區間的平均速度都是定值的概念，因此教育研究者應該考慮如何減輕伴隨而來的認知負擔，但這是另一回事。在這裡我們關心的是，有沒有教給這些準老師履行授課責任時所需具備的知識。再一次，我們看到大學數學裡正確的概念和中小學現場可行教學法之間的鴻溝。為了跨越這道鴻溝，我們需要**為學校教學將抽象數學客製化**（customization）。這就是數學教育的本質（參考 [Wu2006] 的完整討論）。在這個例子中，我們拆解函數導數是常數的概念，然後再重組成學生能夠理解的形式。

全等和相似

做為說明現在老師所學內容和所需知識之間鴻溝的最後一個例子，我們看看幾何中全等和相似的基本概念。老師對於這兩個概念的知識差距，反映在現存的幾何課程中，例如：

（i）在初中，當兩個圖形（不必然是多邊形）大小形狀相同時，就定義為「全等」；若形狀相同，但大小不一定相同，則稱為「相似」。在高中，全等和相似是用角度和邊長來定義，但僅限於多邊形。對於高中較精確、而國中較廣泛的定義之間，並沒有任何調和兩者的說明。

（ii）在初中，學習全等的目的是感知自然界的內在對稱性，以及欣賞諸如荷蘭畫家艾雪（M.C. Escher）的版畫、鋪磚、馬賽克拼貼等藝術作品。類似的，學習相似的目的是讓他們進行圖片放大的有趣活動。在高中，學生在幾何課中證明關於三角形全等或相似的定理，但不會在其他數學課碰到這些觀念。

（iii）因為相似的概念比全等更一般，兩個圖形比較可能相似而非全等，因此有些課程要求老師在初中時先教相似，再提全等 [i]。

由於大學教育的疏忽，老師對於全等和相似的理解，就如（i）至（iii）所描述的，大多是破碎而不連貫的。不是所有的學校幾何課程都犯了這三項毛病，但大部分都犯了前兩項。只要大學數學課程不去解決中學數學中出現的問題，老師就沒有足夠的知識擺脫這樣的數學盲見，而出版商就可以毫無顧忌的繼續散播這些錯誤。

我們應該為準老師設計一套大學數學課程，幫助他們「回顧」這些議題，例如全等和相似的意義，以及這些概念在數學的重要性。相反的，當今的準老師會學到一些像是曲線曲率、曲面高斯曲率、有限幾何、射影幾何、非歐幾何以及幾何基礎等題材，但他們「沒有」學到平面的歐氏幾何。然而歐氏幾何才是老師真正需要的，因為它往往是教學成效最差的項目。老師迫切需要學校幾何的堅實知識，才能在幾何課上教得更好。

在此例中，我們又看到分數教學的弊病全都再度上演：雜亂的定義、數學推理的重大鴻溝，以及對數學連貫性的漫不經心。總之，除了有趣、藝術欣賞，或者學習無趣的幾何證明之外，學生學習這些概念並沒有什麼明確的目的。

然而，這些長年忽視所導致的苦果並非無法撼動，因為還是有方法能讓學校幾何課程具有數學意義，特別是全等和相似。我們可以或多或少用非正式的方式（諸如動手操作）來介紹平面的「基本剛性運動」（平移、旋轉、鏡射）。畢竟我們必須承認，變換（transformation）的概念對學生並不容易，一開始就強調太多形式材料也沒有什麼幫助。我們可以用同樣的方式處理縮放（亦即以某定點為中心，做固定比例的投影）。

接著我們就能定義**全等**是基本剛性運動的有限組合，而**相似**則是一個縮放和一個全等的組合。但是，正如所有數學的事物一樣，我們不是為精確而

精確。就現況而言，學生能直接使用平移、旋轉、鏡射來證明線段和角度的全等。這樣的證明比起傳統使用諸如 ASA、SAS 和 SSS 的證明要直覺得多。此外，我們很容易就能「假定」平面上存在大量基本剛性運動，因此可以證明歐氏幾何中的常見定理，包含關於相似三角形的部分（參考 [CCSS] 和 [Wu2011b] 第二卷第 11 章）。在這樣的數學概念發展下，對於「全等不變量」的要求更凸顯了全等在長度、面積、體積定義中的重要角色（參考 [Wu2010] 第 7 章以及 [Wu2011b] 第三卷第 18 章）。這是讓老師了解什麼是全等和相似，以及它們為什麼是數學基本要素的方法之一。

在高等數學中，n 維歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 的基本剛性運動是用坐標和正交變換定義的，同樣縮放也是以坐標定義。這裡我們改以剛性運動和縮放當做構造幾何的基本素材，是為了定義平面的坐標系統，這是可以運用於中學教學的方式，是另一個為了學校教學而將抽象數學客製化的例子。

這樣的數學學科知識在師資培育課程中尚未普遍採行，但我們應該要如此做。

數學家的角色

上面三個例子指出應該如何將教育現場能使用的抽象數學客製化，但它們只不過是冰山的一角。幾乎整個大學前的課程都需要仔細翻修，才能符合數學的最低標準，而這項工作需要數學家的投入。我個人的意見，目前數學課程的積弊已深，光靠數學界以外的人士是無法矯正的。數學研究者在此背負重責大任：他們應當和數學教育同僚協調，協助設計新師資課程並教授這些課程，而且在這一波師培課程改革的每個面向提出建設性的批評。我對解決這問題的系統性敘述可參見 [Wu2011a]（適用於小學老師）及 [Wu2011b]（適用於高中老師）。給初中數學老師的第三卷教材，將會納入 [Wu2010] 的內容 [2]。

對於不那麼在意細節的人，[Wu2008b] 提供了從幼稚園到八年級可以教哪些課程的概述。在 [MET] 中也有類似的綱要，那是 2001 年撰寫的，旨在為大學數學系的數學師資課程提供指導方針。它的重點在於帶動數學研究者參與數學教育的討論。儘管其他人可能有不同意見，我個人的看法是，它的語言對數學家還不夠有說服力，而其中的數學也太常忽略了數學基本原理。

對於數學研究者，大學前的數學顯然沒有疑難之處。他們可以輕易從頭開始構造這些數學知識。但如果要將這些內容傳達給老師，他們就得花時間看看教學現場的實況。如果一位數學家的親身經驗可做為參考，上述教學上的疏漏只有在數學家**獲得 K-12 教學現場的充分資訊**才能夠避免。做為開端，數學家可以到附近學區的辦公室看看學校現在使用的教科書，應該會大開眼界。數學家也應該和在職老師聊聊老師的教學經驗，以及學生學習困難之處；若可能的話，實際參訪教學現場更佳。然而，最終極的考驗自然是教導在職老師或準老師 K-12 數學，並請他們提供坦白的回饋意見。如果大學數學系和教育學院之間關係良好，那麼透過教育同事的牽線，可讓與學校老師的接觸過程便利許多。

此外還有一項重要的貢獻是數學研究者可以提供的，這一點似乎在迄今的教育討論中還沒得到充分強調。數學家常需要迅速掌握新觀念，即使單單出於學術界的生存壓力，他們必須在新概念還未被精確表述之前，就能理解其直覺意義，知道創造特定技巧的背後動機，並且對於要追尋的方向有大致的了解。這正和學生要學新東西時須具備的能力相去

[1] 我們可以定義相似是平面到平面的一對一對應，其中任兩點距離以定值 k 的比例改變，並將全等定義為 $k=1$ 的情況。然而這種方法基本上在學校課堂裡不可行。

[2] [Wu2011b] 是一門「中學數學」三學期課程的課本，這是加州大學柏克萊分校為主修數學並有志從事老師工作的學生而開設的必修課程。

不遠。這些數學研究者的經驗肯定能協助闡明學生的學習歷程。因此，這也是一項在幫助老師和教育家更加了解教學時，宜善加利用的重要資源。

數學基本原理

我在這篇文章數度提及「數學基本原理」，現在讓我來概略說明，解釋它們是什麼，以及為什麼很重要。我相信至少有五項原理，它們互有關聯。而且因為教科書和學校教育文獻經常違背這些原理（下面會解釋），如果老師希望教好學生，他們就應該多加注意。

（1）每個概念都被精確定義，而且定義提供了邏輯推導的基礎。現今學校數學課程對於定義的忽視，已經使得許多老師搞不清定義和定理的差別。老師間普遍認為定義是「又一個得牢記的東西」。我們已經指出在現今的學校教育文獻中，分數、等速、全等及相似的概念幾乎都沒被定義。更嚴重的是，K-12 數學課程中有更多基本概念沒有正確定義，或者即使有定義，也未能融入整體架構，成為推理的一部分。這些概念包括數、有理數（初中課程）、小數（在小學高年級課程做為分數的一種）、分數的大小、長度、面積、體積（在各年級）、直線斜率、直線隔出的半平面、方程式及其圖形、函數不等式、正數的有理指數，以及多項式。

（2）數學敘述是精確的。不論何時，我們都能區分何為已知、何為未知。然而在學校數學的課本和教材中，有太多地方模糊了何者為真、何者不為真的界線。啟發式的論證往往被併入正確的邏輯推理中。舉例來說，對於正數 a、b 的等式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 常是指定幾個 a、b 的特定值，然後用計算器確認等式成立就算解釋完了。（更多的例子可參見 [Wu1998]3-5 頁）。有時造成不精確的原因是符號或術語的濫用，像是使用 $25 \div 6 = 4\ \ R\ \ 1$ 來表示「25 除以 6 的商是 4，餘數是 1」（這既不是兩個自然數，也不是兩個分數間的等式）。又有些時候是隱藏的假設未被明確表示出來。FASM 的未被明文陳述，大概是這類缺失最顯著的例子。

（3）每個斷言都有邏輯推理的支持。推理是數學的生機來源，也是解決問題的平台。既然學校數學往往缺少推理（可參考前述關於分數和等速的討論），我們又怎能在老師沒有能力帶領學生做邏輯推理的情況下，要求學生具備解決問題的能力呢？

（4）數學是連貫的，它是把概念和技巧用邏輯編織成一體的織錦。數學老師的專業養成通常不是強調程序（以前），就是強調直覺（現在），但從來不曾強調數學的連貫性（結構）。連貫性或許是大多數老師最難掌握的面向（容我斗膽的說，教育家亦然）。在唸大學之前對數系❶ 的連貫性渾然不察，或許就是這個緣故，所以分數被當成是和自然數「不一樣的東西」來教（也因此學習自然數幾乎和學習分數毫無關聯）。我們之前提過在全等前先教相似所導致的課程不連貫。一個更常見的例子是幾乎處處可見的等值分數定理「證明」：對於所有分數 $\frac{m}{n}$和自然數 c，

$$\frac{m}{n}=\frac{cm}{cn}$$

所謂的「證明」如下：

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{n}\times 1=\frac{m}{n}\times\frac{c}{c}=\frac{cm}{cn}$$

這個證明的問題在於，此定理基本上必須在定義分數後就馬上證明，但是分數乘法，做為分數四則運算中觀念最複雜的一項❷，在通常的分數教學中，是很後來才教到的。

數學的連貫性包含了（當然不僅限於）概念和定理的循序漸進；從邏輯上較簡單者推進到邏輯上較複雜者的順序不能任意破壞。然而，對於沒有長期、有系統的沉浸在數學中的人，很難抗拒漠視這種循序漸進做法的誘惑力。前面的兩個例子充分闡明了這項事實。

（5）數學是目標導向的，放進標準課程中的每項概念或技能都有其目的。能夠體認這些數學目的

的老師，便是得到一項增加課堂吸引力的法寶。當學習全等和相似的目的只是做「趣味活動」時，學生會開始看不到數學，並懷疑為何自己得學這些。當學生只把配方法看成得到二次方程式公式解的技巧，而非學習二次函數的中心概念時，他們對於這項技巧的理解也只止於表象。但在教學上最沒有目的性的例子當屬教學生四捨五入到百位或千位，卻沒有告訴他們這有何用處（見 [Wu2011a] 10.3 節）。大部分的小學生認為四捨五入是完全無用的技巧，只是為了應付考試才學的。如果老師教四捨五入時能提及為何和如何做估計，應當能得到較佳的教學效果。

老師需要了解的數學

我希望上述對於數學基本原理的討論能說服讀者，關於學校課程數學老師尚有大量實質的數學要學習。這些知識或許初等，但絕不淺薄，就如同筆記型電腦背後的理論或許初等（只不過是 19 世紀的電磁學理論），但絕非不值一顧。上述的討論事實上關係到數學教育最核心的問題：「究竟」是怎樣的學科知識可以增進學生的表現？（參考本文先前提及貝格的研究）雖然目前缺乏對於這個問題的研究數據，但這對於踏出改良數學師資教育的第一步並非必要。不論所需要的學科知識是什麼，它都必須**包含**呈現方式與數學基本原理一致的課程。

讓我盡量把它闡述清楚：我並非天馬行空的要求老師必須了解某些高等數學，甚至並不堅持他們非得懂高等數學，但他們必須**了解**他們要教給學生的內容。「了解」一詞在此的意義和數學家平時的用法無異[3]。了解一個觀念，表示知道它精確的定義、知道它的直覺內容、為什麼需要它、以及它在那些脈絡扮演關鍵角色。而了解一項技術或技能，表示知道它的精確敘述、它的恰當使用時機、如何正確證明它、創造它的動機，以及在各種情境中正確應用它的能力。就這種毫無曖昧不明的意義，老師如果不能同時對執教年級前後三、四年的教材內容有相當了解，就不能宣稱了解該年級的數學（參見 [NMP1] 的第 19 項建議）。

數學老師真正了解所教數學的必要性，說明我們為何希望高中老師能懂一些抽象代數：這門學科讓他們理解為何其實只有兩種算術運算（＋和×），而不是四種；了解有理數和有理函數如何相像；也能理解他們在幾何中遇到的公設系統[4]，其實在數學中是普遍的做法。老師理解所教數學的必要性，也解釋了為何我們希望教高中微積分的老師能懂一些分析學，而不僅僅是初等微積分。

當下而言，大多數老師並不了解他們執教年級前後三年的課程內容，因為我們的教育體系並沒有這樣要求。我們有義務導正這項疏失。

學科知識和數學知識

本文的標題寫的是數學老師的教育，但我們目前只談到學習數學，還沒提到教學的方法。懂得數學對於有效教學無疑是必須的，但這很明顯還不夠。舉例來說，我們希望老師知道精確的定義，也了解它們在發展數學技巧和想法時的角色，但我們並不希望他們使用研究所課程那種「定義 / 定理 / 證明」的方法來教學校數學。然而，事實也顯示當老師越了解一項定義（它所滿足的歷史需求，為何大家偏好某一種表述、它可以如何運用），他們就越能讓

[1] 自然數、整數、分數、有理數、實數及複數。

[2] 複雜來自學生可以有效運用 $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$ 之前，至少必須解釋三件事實：（1）它是長為 $\frac{m}{n}$，寬為 $\frac{k}{l}$ 的長方形面積。（2）它是將 $\frac{m}{n}$ 等分成 l 份後，取其中 k 份所得到的總量。（3） 它和 $\frac{mk}{nl}$ 相等。（1）或（2）都能做為 $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$ 的定義，然後必須證明另一項，接著也得證明誘人的公式（3）。（3）外表看似簡潔，但這種簡潔正是導致許多分數乘法教學觸礁的女妖之歌。

[3] 教育家通常只就字面意義來使用「了解」一詞：指能夠記住事實、定義或步驟。

[4] 我並不是鼓吹使用公設來教高中幾何。

學生理解。同樣的道理也可以運用到每一項數學基本原理。

這讓一些數學家和教育家對目前師資教育何者最急迫的歧見浮上檯面。數學家傾向認為在數學老師的養成中，學習必要的數學是最難的步驟，因此教授這些知識是師資培育課程的首要任務。可想而知，一些教育家認為真正困難的是教學的部分，是如何將學科知識順利傳送進教學現場。這個理論認為，如果把數學和教學法一起教授，老師會學得更好。要解決上述歧見的關鍵點——到底是學習教學法還是學習數學比較困難——我們可以擇機進行大規模的研究，確認到底是缺乏堅實的學科知識還是缺乏教學技能對教學成效不彰[1]的影響較大。另一方面，一些小規模的研究，像是 [Ball] 和 [Ma] 指出缺乏學科知識是比較嚴重的問題。一些非正式的證據也指向相同原因。

我個人曾用了十一年的夏季，在四個州教導小學及中學老師（有時一年不只一輪），也曾在柏克萊教了四年準中學老師，我的經驗是絕大多數人的數學基礎仍嫌不足（參見 [Hill-RB]）。甚至有時我在教學中加入教學議題，這些老師往往把心力用在學習數學，幾乎不做教學方面的討論。一些官方統計，像是《陷入危險的國家》（A Nation at Risk；見〈關於教學的發現〉（Findings Regarding Teaching）[NAR]）裡的數據，也符合上面的概述。正是因此，我在本文中特別將重點放在老師的學科知識上。

此一關於學科知識的討論應當要放進舒爾曼（Lee Shulman）在 1985 年的演講時所提出的學科教學知識（pedagogical content knowledge, 見 [Shulman]）的脈絡中來看，亦即數學老師為了有效教學，特定**與教數學有關**的教學知識。討論時有兩點需要釐清：「數學學科知識是什麼？」而「相關的教學知識又是什麼？」波爾等人為了改革數學師資教育，最近開始將這兩種知識的內涵條文化 [Ball-TP2008]。不可不提的是，若無堅實的數學知識基礎，談論學科教學知識也只是白費唇舌。

老師在職進修的需求

在本文的開始，我提過波爾調查老師對於分數除法的理解程度（[Ball]），其結果確實讓人心驚。我猜測，如果她的調查對象都學過合乎五條數學基本原理的 K-12 數學，調查的結果肯定會好很多❷。除非我們先改進大學內的數學師資課程，否則學校內的數學仍然會是坑坑疤疤。我們得教給老師合乎基本原理的 K-12 數學，才能打破這個惡性循環。

然而在大學短暫期間的學習，無法袪除準老師從幼稚園到高中十三年所受的錯誤教育。因此若要讓所有數學老師的學科知識都達到一致的水準，就需要州政府和聯邦政府對老師的在職進修進行長期的大量投資。為了達到這個目的，我們需要直接強調學科知識的在職進修。然而政府各部門似乎對學科知識的重要性不以為意，因此這類專業進修計畫不易獲得資金補助。舉例來說，來自 41 個州由州政府經辦的「數學與科學夥伴關係」（Mathematics and Science Partnership；MSP）計畫，最近洛夫勒斯、恩利克和凱利（Loveless, Henriques & Kelly）針對優勝提案的調查研究（[Loveless-HK]）發現：「有些提案似乎旨在提供健全的專業養成，但許多卻沒有清楚描述老師到底會學到什麼。」一般來說，「這些提案的專業養成活動明顯偏向教學法。」。

舉例來說，雖然 [TAMS] 裡所描述的專業工作坊並不在 [Loveless-HK] 的調查範圍內，卻符合該調查對典型優勝提案的描述。[TAMS] 開宗明義寫道，「TAMS 風格的師資訓練可增進老師的學科知識。」但除了提到「老師工作坊以資料分析和測量為重點。……低年級老師也學習長度、面積、體積」，至於其他關於數學專業養成的討論則集中在說服老師接受「建構式問題導向的教法」。[TAMS] 絲毫未察覺小學老師到底需要什麼樣的學科知識，而這種情形並不罕見。改變在職進修計畫的補助方向是一個亟需重視的議題，重要性絲毫不亞於在師資養成教育中加強學科知識的必要。

結語

在結束本文前，讓我再強調兩點。大學以前所學的數學不只是老師，也是數學教育家以及教育行政人員❸ 數學資訊的主要來源。若教育家和行政人員

---

❶ [Hill-RB] 對一、三年級老師所做的大型研究發現老師的學科知識和學生的學習成就呈現正相關。因此即使在這麼早的學習階段，學科知識可能都是主要因素。

❷ [Hill-RB] 中的研究雖不是直接驗證這個假設，但結果和此頗為一致。

❸ 若有人納悶我為何提及行政人員，我得說，學區層級關於選用教科書和師資培育的可怕決策可謂罄竹難書。

仍因為數學界的輕忽以致在知識上有所欠缺，那麼數學教育就不可能進步。例如，若是研究者所接受的 K-12 數學教育符合前述的五條原理，他們關於分數的研究就不大可能會漠視邏輯推理（見 [Wu2008a] 33-38 頁）。有些數學教育家同樣也不曾接觸過這種數學課程，因而不免對數學產生曲解。本文即在於闡明，數學研究者眼中理所當然的數學，以及老師和教育家所認為的數學，兩者間的鴻溝已嚴重斲喪了數學教育。為了減輕傷害，我們至少需要把 K-12 數學梳理清楚，為此目的，我們必先得培育出一群對數學有正確認知的老師。後者應該是數學界的短期目標。

談到數學家和教育家間的溝通障礙，我得指出這種學科間的溝通不良其實並不罕見。華生（James Watson）在他那本講述 DNA 雙螺旋結構發現經過的名著裡（[Watson]），提到他和克利克（Francis Crick）在英國劍橋建構模型時，曾經遵循有機化學的標準用書[1]，將相同的鹼基配在一起。幸運的是，美國結晶學家唐納休（Jerry Donohue）碰巧來訪，並且和他們共用一間研究室。唐納休告訴華生，不但他的配對方式錯誤，而且化學教科書中的相關資訊也大多不正確（同上，190 頁），華生寫道：

> 要是他［唐納休］沒來到劍橋，我大概還是會繼續拽著相同鹼基配對的模型不放。（209 頁）

換句話說，要不是湊巧有個真正懂得物理化學的人出現，華生和克利克可能就沒辦法猜對雙螺旋模型，或至少這項發現會延後很久。

我們能從這故事學到，要是連這麼高端的科學都存在錯誤的資訊，數學教育應當也可能發生類似的問題，尤其數學教育相較之下更為自由隨興。這指出了師資教育真正的進步需要數學界和教育界的緊密合作，小心的去蕪存菁。而且考慮到教育文獻和學校教科書中長期累積的數學謬誤，教育家應當更有強烈動機去重新審視目前的 K-12 數學課程，並且批判的思考其中的問題。

最後同樣重要的是，整篇文章我不斷強調要讓老師以及（連帶的）教育家了解 K-12 的數學。這並不代表數學老師只要懂 K-12 的數學就夠了。和貝格的想法相反，在數學教育中，並沒有了解（就本文稍前所界定的意思）太多數學這回事。任何一點一滴的數學知識長久下來都會有助益。然而，針對目前最棘手的問題——改善所有數學老師的教育水準——我們只好先專注在審慎可行的第一步：確保所有老師都了解 K-12 的數學。讓我們完成這項任務吧。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

Notices 58（2011）No.3 AMS

譯者簡介

林真為臺灣大學數學系大三學生

延伸閱讀

▶「伍鴻熙個人網頁」（https://math.berkeley.edu/~wu/）有 1994 年以來迄今的數學教育文章連結，包括許多關於 CCSS 的文章。

▶梁耀強 "Mathematics K-12: Crisis in Education, Interview of Wu Hung-Hsi" *Mathematical Medley* 38 （2012） No.1, SMS. 中文翻譯可見《數學傳播》37 卷 2 期（2013）。

▶趙潔、林開亮〈美國小學數學師資培訓教材《數的基礎理論》簡介—兼論伍鴻熙教授的教育工作〉《數學傳播》37 卷 3 期（2013）。

[1] J.N.Davidson 所寫的《核酸生物化學》（*The Biochemistry of Nucleic Acids*）。