

黑臉：數學教育的兩難

作者：翁秉仁

作者簡介：台大數學系副教授。

拉克哈特的小冊子《一個數學家的嘆息》是近來很熱門的數學教育科普書。數學家多半欣然同意書中的基本描述：現在的數學教育一團糟，學生沒有學到數學的精華，也無法領會數學的美好。

不過在閱讀的過程，我心裡的警鐘也時時敲起。幾年前的「建構數學」也希望學生像個小數學家，探索、討論、發表，直探數學的美好。不過「建構數學」無法推動的主因之一是教師素質，我看不出拉克哈特有什麼魔棒可以點石成金，不然加州大學的伍鴻熙就不用投入大量心血在美國的師資培育上。

書中最迷人的勾子是「數學是一種藝術」，為這點心動的讀者很多，書中舉的例子也頗有吸引力，尤其當你從未聽過想過的話。

先提醒一件事：除非你對藝術的標準很低，或者打一開始你就不準備下場打球，不然所有藝術都有程序訓練的成分。單是愛唱歌，許多人就要在KTV磨歌，愛畫畫的人，一定會隨手塗鴉，練線條顏色。

「數學是藝術」比喻的第一個問題是，大多數小孩都愛唱歌、畫畫、跳舞，但是數學到底有多少成分屬於天性能？

你也許注意到，書中的清新示例都和視覺有關。人類基本的幾何直覺，和人類在演化過程中視覺能力強大發展有關（這也是為何小學老師將幾何課當作喘息課的原因）。我很同意利用認知長處進行教學，如書中運用對稱性的教學。在幾何教學一味使用「代數式」證明，抑制學生的幾何感，其實是反幾何的教學。

但是算術或代數問題就很不一樣，即使在小學就需要某種引導與約定。例如假設我們單純的問 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 是多少？我賭從未想過的學生幾乎百分之百都會猜是 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$ 。美國大學生犯這種錯的比率不小。這種計算不但簡易而對稱（美），而且有一定的合理性（真）。不信你看：

甲班男生比率是 $\frac{16}{31}$ ，乙班男生比率是 $\frac{17}{32}$ ，兩班合起來男生比率是多少？

做為應用題，這個問題是個不完整的壞題。但如果是實作，例如學生製作圓形圖的過程，寫出 $\frac{16}{31} + \frac{17}{32} = \frac{33}{63}$ 的「正確答案」，小學老師會不會被唬到。畢竟如果缺乏數學理解的支撐，任何「合理」而且答案又正確的算式看起來都是對的。

問題是一旦學生一開始就這麼發揮，你要怎麼「引導」呢？



又例如學生從小學習的算式就是由左到右，這個後天的「本能」干擾了很多後續學習，例如乘法交換律的解釋、四則運算法則，甚至等量公理的學習。（用等號表示結果的「本能」，也保留在程式語言中。）

小學橫式計算的約定是代數的基礎，但約定就是約定，沒有什麼天生直覺（倒是有後天的熟練）。如果放任學生發展，只能說結果會很有趣。這些質疑，一樣可以用到不確定性的學習，人類關於機率的知識姍姍來遲，其來有自。

「數學是藝術」的第二個問題是，如果數學「只是」一種藝術，我相信這數百年來，世界各國把菁英教育下放到國民甚至義務教育的結果，學校的「數學課」恐怕節數不會比音樂或美術課多，或許根本變成像圍棋、橋牌的益智社團。畢竟數學不比唱歌、畫畫更直接普遍的感動人心。

國民教育中的數學課程大到不能倒，只有一個簡單的政治經濟學理由：對國家的發展，數學實在太重要，重要到當局認為養許多天才瘋子難辨的數學家，仍然非常值得。這就是拉克哈特為什麼能在大學研究教書、拿不錯的薪水，還可以大放厥詞藐視數學實用面的原因。

「數學是藝術」的這兩個疑問，導引出「數學教育的兩難」：我們需要比音樂美術多得多的數學教師，但是偏偏教得好的數學老師比率似乎比音樂或美術老師少。這還不計因為數學太重要而另謀他就無法回饋教育職場的人數。大家不擔心美術音樂老師素質，但總是呼籲要

提高數學教師素質，這是根本原因。

古代沒有這個兩難，因為菁英教育是少數人的事，拉克哈特的理想或許近於古希臘（其他文明就算人數少，數學教法也不是這樣）。這個兩難是現代教育多數人教多數人產生的問題。

拉克哈特一書的確有許多精闢的見解，但令人匪夷所思的是他蔑視數學實用性，並視之為副產品。或許一旦他接納了數學用處的說法，就不得不牽就數學綱要的內容和時程，箝制了他和學生上課發展的自由。

我們找一個博雅通儒又對教育下過功夫的數學家來平衡一下。懷德海（Alfred N. Whitehead）曾經與羅素合寫名作《數理原理》（*Principia Mathematica*）。他出身劍橋數學系，日後深思數學、科學、人文與教育問題，晚年任教於哈佛哲學系。他的學養看知名的《懷德海對話錄》（*Dialogues of Alfred North Whitehead*）便知一二。

懷德海在《教育的目的》（*The Aims of Education and Other Essays*）結集中，開宗明義和拉克哈特一樣，反對學習「奄奄一息的概念」，但結論相反。懷德海認為「再沒有什麼比蔑視現在，對年輕人的傷害更大。」因此一切教育的核心問題，是如何在課程中就讓理論性的概念得到重要的應用。

……介紹給兒童的主要概念要少而重要……兒童應該使它成為自己之物，理解它在當下實際生活中如何應用。從受教育開始，兒童就該體驗發現的快樂。他們必須發現，這些一般性的概念可以對連續湧入他生活的事件之流提供一種理解。這些事件就是他的生活。……

懷德海承認數學是深奧的，但深奧的不是難度，而是牽涉的概念太專門，和思想遠離，他說：

這種深奧的傾向是災難，很容易摧毀數學在博雅教育中的作用。……我對擴大數學教育範圍的憂心不亞於他人。想達到目的，不能單靠盲目要求學習更多的數學，而是要面對阻礙其用途的真正困難。

他認為數學在普通教育中，

……必須經歷選擇和適應的嚴格過程。……這門學科任何階段都自然具備的某些特徵必須嚴格排除。當這門科學向青年學生展示時，必須丟掉其深奧的一面。表面上，它必須直接而簡單的探討具有深遠意旨的一般概念。

懷德海和拉克哈特的差別在於，他正視了國民教育中數學教育的難題，想要對症下藥的處理。

臺灣讀者請留意，從這本書可以認識美國數學教育問題的嚴峻，以及為何一個產生一流人才的大國，始終必須引入更多的科技人才。國民教育已經是社會文化自我反饋的螺旋機制，美國正為過去不重視教師數學素養而大吃苦頭。至於臺灣的數學教師素養問題，如果有也顯然不與美國在同一檔次。如果熟悉臺灣的課程綱要，再仔細檢視書中許多攻擊，就知道我們的課程綱要其實都已考慮過這些問題。根據我的偏見，看得懂這本書眉角的臺灣教師的比率，一定比美國高很多。

不過臺灣仍須面對「數學教育的兩難」，在龐大的國民教育規模，要如何謹慎處理這個難

題呢？臺灣這些年的數學課綱，在亂世中採取謹慎微調又周全的態度是理智的第一步。我們當然樂見任何提升教師數學素養的正面舉措，這本是教改的重點。另外，網路新科技也值得注意，畢竟這是處理勝任教師不足的可能性。

但在緩不濟急的當下，一些教學態度上的改變，也許就可以緩和許多問題。首先，數學老師即使滿懷熱情，也應誠實面對自己，採用適合自己的教學法。拉克哈特教學法需要有充分做數學的體驗，足以應付學生千奇百怪的想法，還要引導學生走向有意義的數學方向。這絕非許多老師該採取的教學法。

其次，教師不要把數學和公式題型畫上等號，更不要練難題（一旦你這樣想，恐怕得快提升自己的數學素養）。讓學生產生這種印象，是數學壓迫學生的主因。這本書在這方面頗能啟迪教師。

當學生用非典型方法提出正確答案，請務必正面謹慎對待。最能扼殺學生興趣與創意的，無疑是教師的負面懷疑態度。誠懇面對數學問題本身，是數學教育中最理想的師生互動。

最後，「從錯誤中學習」在數學教育格外重要。教師應多注意、累積並分享學生犯錯的常見模式，有時這反映了自己的教學偏失，有時反映了年齡階段的認知困難。熟悉常見錯誤絕對有助於改善教學以及學生的溝通。

這本書震撼許多讀者，贏得許多讚美，因為拉克哈特是帶來希望的革命家，做為革命小書，這本書也絕對反映了一些現象與問題。但是我猜家長還是不敢請他來當教育部長，這是本書值得嘆息之處。

後記

拉克哈特又有新書將要在臺灣上市，《這才是數學：數學家的狂喜》（經濟新潮社，2015年3月）的原名是 *Measurement*（測量），這個不相干的中文書名選得聰明（雖然取巧），測量容易想到「有用」的物理量，也連不上他帶來的教育旋風。

拉克哈特在新書談的是量東西的意義，接近幾何學的根源——測量的學問，但本書第二部份還跨入物理，以基礎的方式談時間和空間的測量，尤其談到速度、變化與微積分。（可參考洪萬生的介紹《推陳出新看數學：推薦 Paul Lockhart 的新書 *Measurement*》）

值得玩味的是，他明明排斥數學的用處，但談的卻是人們最有感覺的幾何量，還透過有用的三角函數，最後直接談起影響人類歷史演進的微積分。我猜在拉克哈特心裡，其實數學不只是真與美，而且還有「善」（人世之大用）。柏拉圖寶愛數學，也認為真善美是一體。拉克哈特如果能就這樣談數學，豈不更符合我們對數學的理解。只是眾聲喧嘩，俗人把用處講濫、講乏，甚至大錯特錯，他或許怕「同流合污」，掩蓋了他想彰顯的寶物，只好這樣「基進」了。

我已提過，拉克哈特的想法和教學頗有特色，在一堆假創新、假愛心、假應用的教學法中，他往往能一劍直探關鍵，讓你看到數學的本質。可惜，他絕口不談或鄙夷數學的用處，劍走偏鋒，也可能誤導不少人。∞