

3D 臉部形變的 殺手級特效？

作者：林文偉 · 樂美亨

計算保角幾何與 3D 動畫

作者簡介：林文偉是德國畢勒費大學應用數學博士，現為交通大學應用數學系講座教授及丘成桐中心執行長。主要研究領域有數值分析、矩陣理論及計算、動態系統、最佳控制、計算保角幾何。

樂美亨是交通大學應用數學系博士生，現為哈佛大學訪問博士生。

影像形變 (morphing) 是由一張影像流暢的變化成另一張影像的漸變過程。1991 年，流行音樂之王麥可·傑克森 (Michael Jackson) 在歌曲 *Black or White* 的音樂影片結尾就使用了這種特效，接連將不同種族的人臉，從一張連續的變化成另一張，視覺感受令人驚豔。隨後許多廣告影片也紛紛開始模仿運用影像形變的特效。隨著電腦技術的快速發展，2D 影像形變特效的技術已近乎成熟，被廣泛應用於影片的製作中。然而，處理 3D 影像的形變特效仍有許多困難之處。隨著 3D 列印科技日漸進步，3D 影像處理的技術也隨之漸漸受到重視。

近年來，中央研究院丘成桐院士致力於推動應用數學的發展，特別是運用拓樸與幾何的想法，將實際的問題化繁為簡，以達到更高效解決問題的目的。他率先將二維曲面保角幾何的理論與數值演算法有系統地結合，並寫成了《計算保角幾何》(Computational Conformal Geometry) 一書。他於 2002 年提出了保角映射 (conformal mapping)

的數值計算方法，其應用範圍包含 3D 動畫、表情分析、人臉辨識、古物保存、工業檢測、醫學影像等。本文將對於保角映射在曲面形變的應用做進一步的介紹。

3D 影像的擷取

以電影《阿凡達》為例，其拍攝過程使用了特殊的攝影機，結合 3D 影像的後製技術，將虛擬的材質與擷取的影像合成，其合成的視覺品質取決於投資人力的多寡，以及影像的後製技術，其核心問題在於影像的對應。有了正確的對應關係，才能將材質紋理貼到正確的位置，以達到理想的視覺效果。然而，相較於平面影像的對應問題，3D 影像的對應要來得困難許多。畢竟 3D 影像比平面影像多了一個維度，也就是多了一個自由度，其幾何資訊也比平面影像豐富許多。在本文中，我們將會介紹如何透過幾何的手法來簡化 3D 影像的對應問題。

在硬體方面，現階段我們可以藉由 3D 影像掃描儀 (3D 照相機) 來擷取 3D 影像。圖 1 為交通大



圖 1 3D 影像掃描儀 GV3 (3D Scanner GV3)。

學丘成桐中心的 3D 影像掃描儀 GV3，其尺寸接近一台家用微波爐的大小，正面左邊的是投影機鏡頭，右邊的是照相機鏡頭，透過投影機鏡頭投射出的結構光 (structured-light)，照射到物體後，從反射的光線可探測出物體的幾何，並由照相機鏡頭以三角網格的形式記錄立體影像。其背面需連接電源線與三條訊號線，透過訊號線，將擷取的影像輸入電腦儲存。

3D 照相機是如何得到 3D 影像呢？它得到的是是一大堆的點。將這些點用三角網格連接在一起，就成了一個離散的曲面，也就是所謂的幾何資訊。每一個點上都有它的顏色，稱為材質資訊。以 GV3 為例，所拍攝的每張 3D 照片，包含了黑白的材質資訊以及幾何資訊，分別以 bmp 點陣圖檔及 obj 格式檔案記錄。其中，obj 格式檔案包含歐氏空間 \mathbb{R}^3 中的三維座標點集，以及將點連接起來的三角網格。換句話說，所擷取的每張照片都是一個空間中的離散曲面，即嵌入 \mathbb{R}^3 中的三角網格 (見圖 2)。

在圖 2 中，我們可以看到中圖的網格中有許多破洞，網格的邊界也不平整。由於這些點的位置是

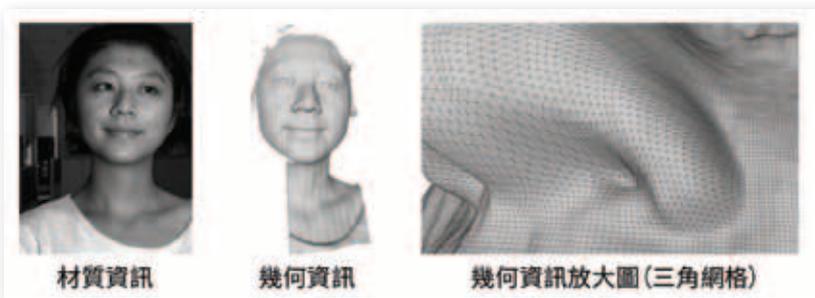


圖 2 透過 3D 影像掃描儀 GV3 所擷取的原始資料。

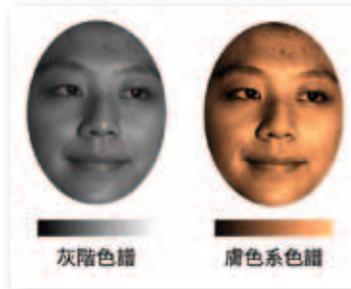


圖 3 不同色譜的效果。

透過結構光的反射得到的，對於不反光的地方，如眼珠及頭髮，會被 3D 照相機判定為破洞。因此，在實際應用之前，需要透過適當的剪裁與修補。另一方面，由 GV3 拍攝得到的材質資訊是黑白的。對於人臉的照片，我們可以透過改變色譜 (color map) 將不同深度的灰色換成深度不同的膚色來得到比較美觀的色彩 (圖 3)。

3D 影像的顯示

在顯示器的部分，3D 立體顯像設備可分為濾鏡式與裸眼式 [8]。當今的 3D 立體電影放映設備即是屬於濾鏡式顯像，其特徵為觀眾必須配戴特製的眼鏡來觀賞 3D 影片，以達到立體的視覺效果。濾鏡式顯像設備又可分為偏光濾鏡式 (polarizing filter) 和紅藍濾鏡式 (anaglyph)。偏光濾鏡式的顯像設備為兩台可以投射出偏振光的投影機，需配戴偏光眼鏡觀看，其鏡片呈淡灰色，左右眼的鏡片不同，左眼為 45 度偏振光鏡片，右眼為 135 度偏振光鏡片，因此，兩眼看到的影像不同，讓影片中的物體看起來是立體的。缺點是當頭部傾斜時，偏光鏡片無法完全濾掉另一個方向的光線，讓眼睛看到另一眼的畫面。紅藍濾鏡式顯像設備即一般的投影機，需配戴紅藍眼鏡觀看影片，顧名思義，其鏡片左眼是紅色，右眼是藍色，因此，讓兩眼看到不同顏色濾鏡的影像，產生立體的視覺效果。缺點是影片的畫面會因為紅藍濾鏡而只剩下單一色調。

另一方面，裸眼式的 3D 立體顯像設備大致可分為全息影像

顯示器，其特徵為觀眾必須配戴特製的眼鏡來觀賞 3D 影片，以達到立體的視覺效果。濾鏡式顯像設備又可分為偏光濾鏡式 (polarizing filter) 和紅藍濾鏡式 (anaglyph)。偏光濾鏡式的顯像設備為兩台可以投射出偏振光的投影機，需配戴偏光眼鏡觀看，其鏡片呈淡灰色，左右眼的鏡片不同，左眼為 45 度偏振光鏡片，右眼為 135 度偏振光鏡片，因此，兩眼看到的影像不同，讓影片中的物體看起來是立體的。缺點是當頭部傾斜時，偏光鏡片無法完全濾掉另一個方向的光線，讓眼睛看到另一眼的畫面。紅藍濾鏡式顯像設備即一般的投影機，需配戴紅藍眼鏡觀看影片，顧名思義，其鏡片左眼是紅色，右眼是藍色，因此，讓兩眼看到不同顏色濾鏡的影像，產生立體的視覺效果。缺點是影片的畫面會因為紅藍濾鏡而只剩下單一色調。

(holography) 和 2D 多工式 (multiplexed 2D)。目前市面上所見到的裸視 3D 顯示器都屬於後者，當今流行的任天堂 3DS 掌上型主機就是一個例子。其概念近似於偏光濾鏡的顯像原理。不同的是，觀眾無需配戴偏光眼鏡，且沒有視角的限制。透過螢幕表面的特殊光柵，利用兩隻眼睛的距離約六公分的差異，讓左右兩眼看到不同的畫面，達到立體的視覺效果。

全息影像是利用紅、藍、綠三種顏色的雷射光源，透過多面鏡將立體影像呈現出來。能讓觀眾在 360 度都能夠觀賞影片是其優點之一。值得一提的是，以上所描述的 3D 立體顯像設備之中，只有全息影像需要真實的 3D 影像資料，其他顯像方式僅需要 3D 影像的兩個投影面即可達到立體的視覺效果。然而，在立體電影錄製的過程中，許多原始資料仍是三維的，因此需要三維數據的處理技術。

影像的編輯與後製

在軟體方面，對於平面影像，當今已有許多成熟的軟體可以有效處理傳統的平面照片，如 PhotoScape、Photoshop。然而，對於 3D 影像的處理仍有許多困難的地方。核心問題在於 3D 影像多了一個維度，但我們的螢幕是平面的，一次只能看到 3D 影像的其中一個投影面。在操作上，自然也就沒有像處理平面影像時自如。當今常見的 3D 繪圖軟體有 AutoCAD、3ds Max、SketchUp 等，對於 3D 建模的功能已很齊全。然而，這些軟體在處理點數上萬的網格時，效率仍很有限。以 3D 影像掃描儀 GV3 來說，所擷取到的幾何資訊網格點數約為 12 萬到 13 萬點。對於點數如此龐大的三角網格，其處理技術尚在研發階段。接下來，我們將介紹如何運用黎曼保角映射 (Riemann conformal mapping)，將 3D 影像的處理簡化成平面影像的處理。

關鍵的數學理論——保角映射

保角映射又稱為共形映射。透過保角映射，我們可以將三維的影像攤平，成為一個二維的影像，簡化了 3D 影像編輯的操作。此外，保角映射是一個保持角度的變換。也就是說，曲面（或平面）上的 90 度角，透過保角映射到另一個曲面（或平面）上，其角度仍然保持 90 度。這對 3D 影像的材質貼圖很重要，它能夠保證材質的圖樣不會因為貼到複雜的曲面上而產生扭曲。

根據數學上的龐卡赫單值化定理 (Poincaré uniformization theorem)，我們知道僅有單一邊界的單連通 (simply connected) 黎曼曲面保角等價於 (conformally equivalent) 平面上的單位圓盤。換言之，透過保角映射，我們可以將空間中的曲面映到平面上的單位圓盤。這樣的保角映射稱為黎曼保角映射 (Riemann conformal mapping)。以下，我們依序介紹球面保角映射 (spherical conformal mapping) 的計算，以及如何透過球面保角映射，實現黎曼保角映射的計算 (見圖 4)。



圖 4 利用保角映射將獅子的表面映到球面。

球面的保角映射演算法，首先由丘成桐與紐約州立大學石溪分校資訊科學系的顧險峰於 2002 年提出 [6]。其想法是基於曲面 M 映射到球面 S^2 上的調和映射 (harmonic mapping) 是保角的事實。調和映射 φ 是曲面之間的光滑映射，可以透過求解非線性的熱擴散方程 (nonlinear heat diffusion equation) 得到：

$$\square \frac{d\varphi}{dt} = -\Delta\varphi$$

由於 φ 是映射到球面，在迭代求解非線性方程 1 的過程中，我們僅考慮水平的分量（即切平面上的投影），以保持 $\varphi(\mathcal{M}, t)$ 為球面。在限制條件 $\varphi(\mathcal{M}, t) \in \mathbb{S}^2$ 之下，非線性方程 1 可改寫成

$$2 \frac{d\varphi}{dt} = -(\Delta\varphi)^\parallel$$

其中 $(\Delta\varphi(v))^\parallel$ 代表 $\Delta\varphi$ 在切方向的投影（水平分量），也就是將垂直的分量扣掉。即

$$3 (\Delta\varphi(v))^\parallel = \Delta\varphi(v) - (\Delta\varphi(v))^\perp$$

式中 $(\Delta\varphi(v))^\perp$ 代表 $\Delta\varphi$ 在法向量 $\mathbf{n}(\varphi(v))$ 上的投影（垂直分量），即

$$(\Delta\varphi(v))^\perp = \langle \Delta\varphi(v), \mathbf{n}(\varphi(v)) \rangle \mathbf{n}(\varphi(v))$$

這裡的 v 是離散曲面 \mathcal{M} 上的點。在數值方法上，可以採取較有效率的準隱式歐拉法（quasi-implicit Euler method）[5]，其迭代式為

$$\left[I + \delta t^{(m)}(K - D^{(m)}) \right] \varphi^{(m+1)} = \varphi^{(m)}$$

其中， K 是拉普拉斯矩陣（Laplacian matrix）， $D^{(m)}$ 是對角矩陣，定義為

$$\left[D^{(m)} \right]_{ii} = \left\langle K\varphi^{(m)}(v_i), \varphi^{(m)}(v_i) \right\rangle$$

迭代的初始值 $\varphi^{(0)}$ 可由高斯映射（Gauss map）得到。高斯映射是把曲面 \mathcal{M} 上的點 v 對應到該點單位法向量的映射，其值域為單位球面，滿足上述之限制條件。當迭代至收斂後，所得到的映射就是曲面 \mathcal{M} 對應到球面 \mathbb{S}^2 的調和映射，即球面保角映射。接下來，我們將介紹如何透過球面保角映射來實現黎曼保角映射。

黎曼保角映射的計算

黎曼保角映射的計算方法 [7]，如圖 5 所示，對於一個單連通的離散曲面 \mathcal{M} ，可以透過將之複製一次，並將兩者的邊界黏接起來，成為一個封閉的曲面 $\overline{\mathcal{M}}$ 。接著，仿照前例，透過非線性的熱擴散方程，計算 $\overline{\mathcal{M}}$ 的球面保角映射。最後，

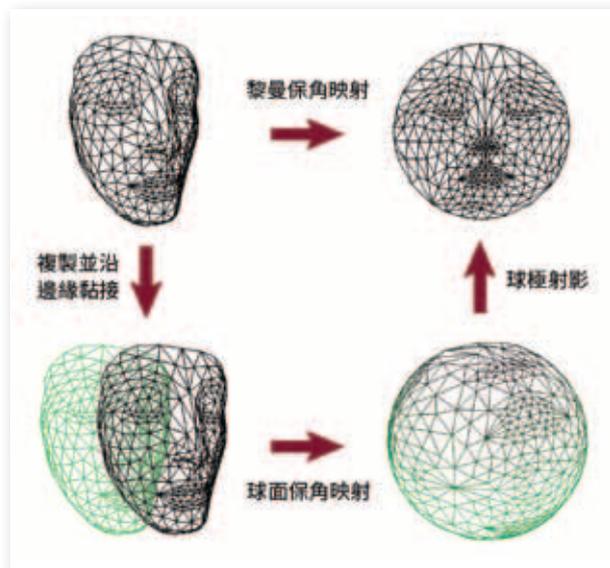


圖 5 黎曼保角映射的計算方法是意圖。

將半球沿著赤道剪下，並對這個半球做球極投影（stereographic projection）到單位圓盤上，即得到離散曲面 \mathcal{M} 映到單位圓盤的保角映射，這就是所求的黎曼保角映射。

以下頁圖 6 中的八個臉部表情為例，其相對應的黎曼保角映射如圖 7，詳細資訊如表 1。從表中可看出，對於一張六萬點的照片，計算黎曼保角映射僅需花費不到六秒的時間。至於如何看出這些映射確實是保角的，可以利用保角映射的性質——將直角映到直角——來檢視。具體而言，要檢驗其保角的性質，可以透過在單位圓盤上貼棋盤格貼圖，並映回空間中的離散曲面，檢驗棋盤格貼圖的每個方格是否保持直角（圖 8）。從圖中可看出，棋盤格貼圖的每個方格大致上都保持直角，這意味著透過數值實現的保角映射，其保角性十分良好。

更值得一提的是，黎曼保角映射是可逆的。也就是說，離散曲面 \mathcal{M} 透過保角映射 φ 映到單位圓盤 $\varphi(\mathcal{M})$ 之後，可透過逆映射 φ^{-1} 將該單位圓盤還原為曲面 \mathcal{M} 。因此，透過黎曼保角映射，我們可以將空間中的曲面對應問題，簡化成平面單位圓盤之間的對應問題。接下來，我們將介紹如何運用



圖 6 3D 攝影的八個人臉表情。



圖 7 八個表情對應的黎曼保角映射成像。



圖 8 八個表情相對應的棋盤格貼圖。

| 表情 | 點數 | 面數 | 矩陣大小 | 迭代步數 | 時間 (秒) |
|------|--------|---------|---------|------|--------|
| 面無表情 | 62,240 | 123,487 | 123,489 | 9 | 6.11 |
| 微笑 | 58,432 | 115,908 | 115,910 | 8 | 4.95 |
| 難過 | 56,799 | 112,653 | 112,655 | 9 | 5.30 |
| 噘嘴 | 57,547 | 114,143 | 114,145 | 7 | 4.54 |
| 苦笑 | 58,836 | 116,713 | 116,715 | 7 | 4.48 |
| 痛苦 | 60,914 | 120,837 | 120,839 | 10 | 5.99 |
| 鬼臉 | 61,811 | 122,626 | 122,628 | 10 | 5.97 |
| 生氣 | 60,323 | 119,660 | 119,662 | 9 | 5.67 |

表 1 計算黎曼保角映射所需的時間。 (Laptop: Intel Core-i7 2.9GHz with 12GB ram)

這樣的構想來建構三維臉部表情之間的對應函數。

建立臉部函數的對應

曲面的對應在 3D 動畫拍攝的後製中扮演著重要的角色，錯誤的對應會造成不自然的形變，甚至疊影。對於離散曲面對應的問題，顧險峰等人利用臉部曲面的特徵點，找到兩個人臉曲面的球面保角映射之間的最佳莫比烏斯變換 (Möbius Transform) [6]，讓兩人臉曲面之間的對應函數為保角變換。在考慮臉部表情之間的對應時，我們允許肌肉的扭動。然而，扭動的行為本身不是保角的。因此，我們藉由基底函數 $r^2 \log r$ 來描述肌肉扭動的行為 [2]。

在衡量臉部表情動畫的串接效果時，觀眾最容易注意到五官特徵變化的瑕疵。因此在建構對應函數時，在五官特徵的附近，如眉毛、眼睛、鼻子以及嘴巴，其對應勢必要求精確。其他部位，如臉頰與額頭，其幾何特徵與材質特徵都比較不明顯，對於精確度的容忍相對較大。基於這個考量，我們採取以特徵點為基準的全局對應函數 (landmark-based global matching)。此外，為了確保對應函數能夠把邊界映到邊界，我們也在單位圓盤的邊界均勻地選取 16 個點 $(\cos \frac{k\pi}{8}, \sin \frac{k\pi}{8})$ 作為特徵點，其中， $k = 0, \dots, 15$ 。

具體而言，我們不妨假設分別在兩張人臉 S_a 及

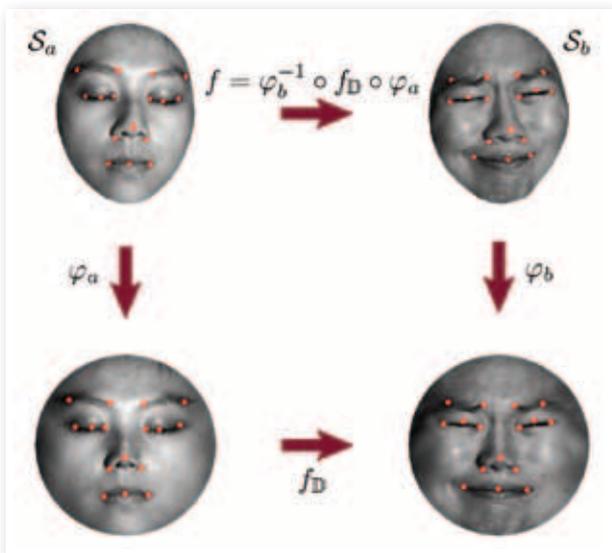


圖 9 建構曲面對應函數的示意圖。利用黎曼保角映射（垂直部分的映射）與 f_D ，得到上方的人臉（曲面）間的映射。

S_b 上選取了 m 個特徵點，分別記為

$$\left\{ p^{(i)} \equiv (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}) \right\}_{i=1}^m \subset S_a$$

以及

$$\left\{ q^{(i)} \equiv (q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}) \right\}_{i=1}^m \subset S_b$$

我們的目標是建構一個對應函數 $f: S_a \rightarrow S_b$ (圖9)，使得 $f(p^{(i)}) \approx q^{(i)}$ ，其中 $i = 1, \dots, m$ 。首先，利用黎曼保角映射 $\varphi_a: S_a \rightarrow \mathbb{D}$ 以及 $\varphi_b: S_b \rightarrow \mathbb{D}$ 將兩個離散曲面分別映到單位圓盤 \mathbb{D} 。我們分別將這 m 個映到單位圓盤上的點 $\varphi_a(p^{(i)})$ 與 $\varphi_b(q^{(i)})$ 記為

$$p_{\mathbb{D}}^{(i)} \equiv (p_{\mathbb{D},1}^{(i)}, p_{\mathbb{D},2}^{(i)}) \text{ 以及 } q_{\mathbb{D}}^{(i)} \equiv (q_{\mathbb{D},1}^{(i)}, q_{\mathbb{D},2}^{(i)})$$

其中 $i = 1, \dots, m$ 。

接著，透過基底函數 $r^2 \log r$ ，在單位圓盤上構造對應函數

$$f_{\mathbb{D}}(x_1, x_2) = \left(f_{\mathbb{D}}^{(1)}(x_1, x_2), f_{\mathbb{D}}^{(2)}(x_1, x_2) \right)$$

如下式：

$$f_{\mathbb{D}}^{(k)}(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{n^2} \left(\alpha_j^{(k)} r_{x,j}^2 \log r_{x,j} \right), k = 1, 2$$

在上式中， $r_{x,j} = \|x - c^{(j)}\|_2$ 為點 x 到點 $c^{(j)}$ 的距離， $x = (x_1, x_2)$ 為單位圓盤上的點，另外

$c^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)})$ 為佈於正方形 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 的 $n \times n$ 棋盤格點， $\alpha_j^{(k)}$ 是待定的係數，其中 $j = 1, \dots, n^2$ 。我們透過求解以下最小平方方法問題來得到這些未知的係數：

$$\operatorname{argmin}_{\alpha^{(k)}} \|S\alpha^{(k)} - q_{\mathbb{D},k}\|_2, k = 1, 2$$

其中，矩陣 $S = [S_{ij}]$ 定義為

$$S_{ij} = r_{i,j}^2 \log r_{i,j}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n^2$$

$r_{i,j} = \|p_{\mathbb{D}}^{(i)} - c^{(j)}\|_2$ 為點 $p_{\mathbb{D}}^{(i)}$ 到點 $c^{(j)}$ 的距離， $\alpha^{(k)}$ 與 $q_{\mathbb{D},k}$ 分別代表

$$\alpha^{(k)} = \left[\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{n^2}^{(k)} \right]^T$$

與

$$q_{\mathbb{D},k} = \left[q_{\mathbb{D},k}^{(1)}, \dots, q_{\mathbb{D},k}^{(m)} \right]^T$$

當 $n^2 \leq m$ 時，由於未知數的個數小於限制條件的數量，這個最小平方問題可以很容易地透過 QR 方法 [4] 來解決。反之，當 $n^2 > m$ 時，未知數的個數會大於限制條件的數量，因而造成 $\alpha^{(k)}$ 有無窮多組解。為了確保解的唯一性，我們利用吉洪諾夫正則化 (Tikhonov regularization) [3] 來處理這個問題。具體而言，我們要解線性系統

$$(\varepsilon I + S^T S) \alpha^{(k)} = S^T q_{\mathbb{D},k}$$

其中，微小量 ε 可取值 0.001。當係數 $\alpha^{(k)}$ 被決定之後，單位圓盤之間的對應函數 $f_{\mathbb{D}}$ 也就被唯一地決定了。

圖 10 呈現了函數 $f_{\mathbb{D}}$ 的對應，從圖中可看出紅點 $f_{\mathbb{D}}(\varphi_a(p^{(i)})) \approx \varphi_b(q^{(i)})$ ，其中， $i = 1, \dots, m$ 。換

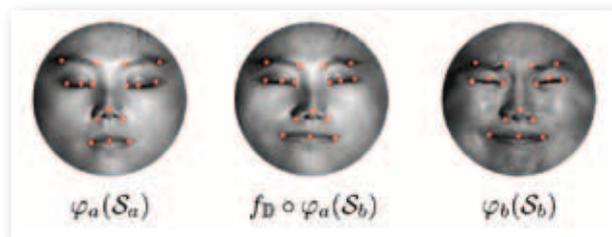


圖 10 利用特徵點建立對應函數 $f_{\mathbb{D}}$ ，比較右圖與將左圖變換得到的中圖，會發現紅色特徵點的位置相近，臉部表情特徵也類似。

句話說，將圓盤 $f_{\mathbb{D}} \circ \varphi_a(\mathcal{S}_a)$ 與 $\varphi_b(\mathcal{S}_b)$ 重疊在一起，臉部的特徵點（圖 10 中的紅點）將會約略重合。有了兩個單位圓盤之間的對應函數 $f_{\mathbb{D}}$ ，兩離散曲面 \mathcal{S}_a 及 \mathcal{S}_b 之間的對應函數 $f = \varphi_b^{-1} \circ f_{\mathbb{D}} \circ \varphi_a$ 可透過保角映射的可逆性質得到。有了兩個離散曲面的對應關係，我們可以透過以下步驟，將兩個離散曲面的網格結構統一：

1. 在單位圓盤上統一取點，並建構網格；
2. 將這些點透過保角映射的逆映射，映回空間中的離散曲面。

對應函數的作用在於讓統一後的網格能夠保持特徵點的對應。因此，透過統一後的網格，我們可以做到臉部表情合成的特效。接著，我們將介紹樣條插值 (spline interpolation) 的計算，以及如何透過樣條插值來描述表情的連續變化，將不同的臉部表情串接在一起，就可以製作成動畫，進而發展相關的應用。

表情變化的描述——樣條插值

人們的肢體動作是一個連續且大致平滑的過程，臉部表情的變化亦是如此。因此，用平滑函數來描述臉部表情的變化是很自然的想法。我們不妨將臉部的曲面看成一個定義在時間區段 $[0, T]$ 的函數 $\mathcal{S}(t)$ 。如圖 11 所示，透過 3D 照相機，我們拍攝到一系列的曲面 $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_1}, \dots, \mathcal{S}_{t_{n-1}}, \mathcal{S}_T$ ，也就是說，當時間 $t = 0$ 時， $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}_0$ ，當 $t = t_k$ 時， $\mathcal{S}(t_k) = \mathcal{S}_{t_k}$ ，其中， $k = 1, \dots, n-1$ ，當 $t = T$ 時， $\mathcal{S}(T) = \mathcal{S}_T$ 。在其餘的時間 t ，則用平滑函數

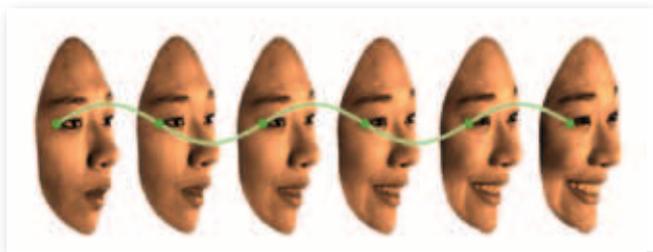


圖 11 利用樣條插值法來做表情變換（形變）的示意圖。

來描述。至於平滑函數的選取，可以採用三次樣條插值函數 (cubic spline interpolation)。它是讓泛函 $F(x) = \int_0^T |x''(t)|^2 dt$ 達到最小值的函數，而這個泛函 F 則是對全曲率 (total curvature) 的一個近似。

一般來說，我們僅需考慮曲面上的一個點 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}(t)$ ，其餘的點可以用相同的手法來決定。同樣地，對於這個點 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ ，我們僅需考慮 $\mathbf{x}(t)$ 在 x 軸上的投影 $x(t)$ 即可，在另外兩個軸上的投影 $y(t)$ 和 $z(t)$ 可以用相同的手法來決定。接下來，我們回顧三次樣條插值函數是如何建構的 [1]。

三次樣條插值是根據一些給定的點 $(t_j, x(t_j))$ ，其中， $j = 0, \dots, n$ ，構造平滑函數 $x(t)$ 的經典方法 [1]。它是由 n 段三次多項式拼接而成。也就是說，當 t 落在區間 $[t_j, t_{j+1}]$ 時， $x(t) = x_j(t)$ 是定義在區間 $[t_j, t_{j+1}]$ 的三次的多項式，其中， $j = 0, \dots, n-1$ 。由於函數 x 會通過點 $(t_j, x(t_j))$ ，其中， $j = 0, \dots, n$ ，也就是說，每一段三次多項式 x_j 會滿足

$$(i) \quad x_j(t_j) = x(t_j), \text{ 其中}$$

$j = 0, \dots, n$ 。根據函數 x 連續的假設，三次多項式 x_j 會滿足

$$(ii) \quad x_j(t_{j+1}) = x_{j+1}(t_{j+1})$$

其中， $j = 0, \dots, n-2$ 。

另外，根據函數平滑的假設， x 的一次導數是連續的。也就是說，三次多項式 x_j 會滿足

$$(iii) \quad x'_j(t_{j+1}) = x'_{j+1}(t_{j+1})$$

其中， $j = 0, \dots, n-2$ 。

同樣地，根據函數平滑的假設， x 的二次導數也是連續的。也就是說，三次多項式 x_j 會滿足

$$(iv) \quad x''_j(t_{j+1}) = x''_{j+1}(t_{j+1})$$

其中， $j = 0, \dots, n-2$ 。

由於每個三次多項式都需要四個條件才能完全確定曲線的形狀，而我們總共有 n 個三次多項

式。因此，需要 $4n$ 個條件來決定。以上 (i)-(iv) 四點，一共有 $4n - 2$ 個條件，因此，我們還需要額外的兩個條件。我們不妨假設初始與結尾的加速度為零。也就是說，

$$(v) \quad x''(t_0) = x''(t_n) = 0.$$

如此一來，這 n 個三次多項式就能被唯一地決定。滿足以上 (i) - (v) 的三次樣條函數，稱為自然三次樣條 (natural cubic spline)。接下來，我們介紹如何計算自然三次樣條插值函數。

自然三次樣條插值的計算

我們不妨把三次多項式 x_j 寫成

$$4 \quad x_j(t) = a_j + b_j(t - t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3$$

a_j, b_j, c_j 和 d_j 是未知的係數， $j = 0, \dots, n - 1$ 。以下，我們利用上述的條件 (i) - (v) 來求解這些未知的係數。

首先，將 $t = t_j$ 代入 4。根據條件 (i)，我們得到等式

$$5 \quad x(t_j) = x_j(t_j) = a_j$$

為了方便起見，我們定義 $h_j = t_{j+1} - t_j$ 。根據條件 (ii)，考慮 $j + 1$ 時，我們得到等式

$$6 \quad \begin{aligned} a_{j+1} &= x_{j+1}(t_{j+1}) = x_j(t_{j+1}) \\ &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \end{aligned}$$

其中， $j = 0, \dots, n - 1$ 。另一方面，對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，我們考慮 $x_j(t)$ 的一次導數

$$7 \quad x'_j(t) = b_j + 2c_j(t - t_j) + 3d_j(t - t_j)^2$$

根據條件 (iii) 以及 7，我們得到等式

$$8 \quad b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$$

其中， $j = 0, \dots, n - 1$ 。同樣地，對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，我們考慮 $x_j(t)$ 的二次導數

$$9 \quad x''_j(t) = 2c_j + 6d_j(t - t_j)$$

其中， $j = 0, \dots, n - 1$ 。根據條件 (iv) 以及 9，對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，我們得到等式

$$10 \quad d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j)$$

對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，將式 (10) 代入式 (6)，我們得到等式

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1})h_j^2$$

也就是說，

$$11 \quad b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1})h_j^2$$

另一方面，對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，將 10 代入 8，我們得到等式

$$12 \quad b_{j+1} = b_j + (c_j + c_{j+1})h_j$$

將 12 中的足碼減去 1，即

$$13 \quad b_j = b_{j-1} + (c_{j-1} + c_j)h_{j-1}$$

其中， $j = 1, \dots, n$ 。最後，13 中的 b_j 及 b_{j-1} 都以關係式 11 代入，我們得到線性方程組

$$14 \quad \begin{aligned} h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} \\ = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \end{aligned}$$

其中， $j = 1, \dots, n - 1$ 。從 5 中，我們知道 $a_j = x(t_j)$ 為已知的數值，且 $h_j = t_{j+1} - t_j$ 也是已知的，因此，只要能決定係數 c_j ，三次多項式 x_j 的形狀就完全確定了。而係數 c_j 可以透過求解線性方程組 14 來得到。為了計算上的方便，我們把 14 寫成矩陣的形式 $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ，其中， A 是一個 $(n + 1) \times (n + 1)$ 的矩陣，見下頁圖 12。

這裡的矩陣 A 為嚴格對角優勢 (strictly diagonally dominant)，即矩陣每一列的對角項之絕對值大於同一列其他項的絕對值總和。這能夠保證線性方程組 14 有唯一的解 [1]。因此，對於 $j = 0, \dots, n - 1$ ，三次多項式 x_j 都被唯一決定，而三次樣條插值函數 x 也就隨之被唯一決定了。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

圖 12

應用到 3D 動畫

在處理了離散曲面的網格之後，對於網格上的一個點，我們都計算它的樣條插值函數，即可平滑地還原 3D 照片之間的動作。以還原兩張照片之間的動作為例，假設在時間 $t = 0$ 時的表情為曲面 S_a ，在時間 $t = 1$ 時的表情為曲面 S_b 。對於時間 t 介於 $(0, 1)$ 區間，我們構造曲面

$$S_t = (1 - t)S_a + tS_b$$

其相關的應用如三維幾何形變、3D 影片壓縮、3D 數位驅動，以下我們依序介紹。

底下我們將呈現幾個兩張 3D 照片之間的幾何形變特效。右邊圖中，最左方的人臉以及最右方的人臉為真實拍攝的照片，而中間的幾張人臉為透過樣條插值所生成的影像。圖 13 與圖 14 呈現幾何與材質的形變，圖 13 為不同表情之間的變換，圖 14 則是不同人之間的變臉，先由一位女孩的臉變成男孩的臉，再繼續變成另一位女孩的臉。圖 15 為德國物理學家普朗克（Max Planck）臉部與獅頭的幾何形變。圖 16 則呈現女孩的臉變成獅頭的幾何形變（材質不改變）。

隨著高解析度的影片漸漸普及，影片壓縮的技術也隨之受到重視。3D 影像資料更是需要龐大的硬體儲存空間。以電影《阿凡達》為例，一分鐘長的片段原始資料需佔用 17.28GB 的儲存空間。如何

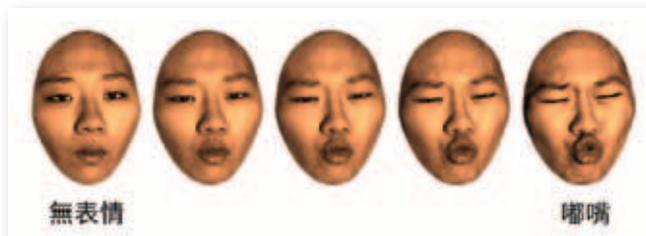


圖 13 幾何與材質形變（表情變換）。

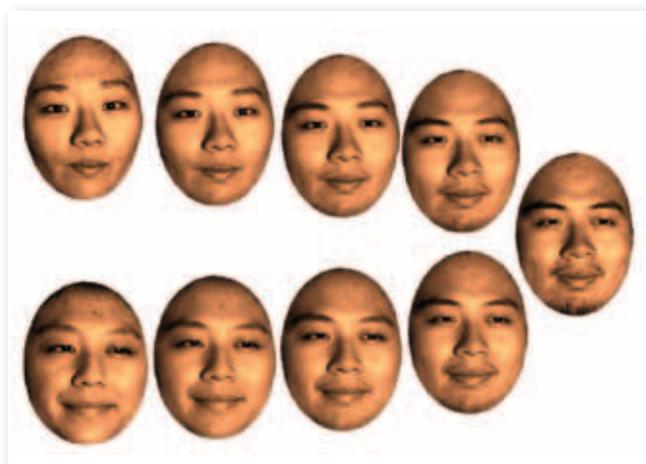


圖 14 幾何與材質形變（變臉）。先從一個女生形變到男生，再形變到另一個女生。

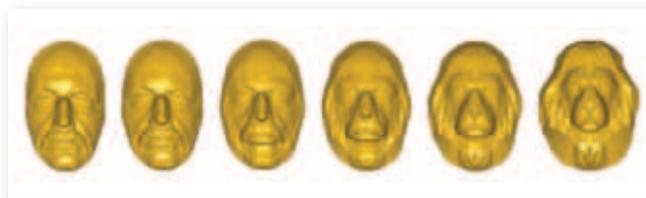


圖 15 幾何形變。普朗克的臉變成獅子的臉。

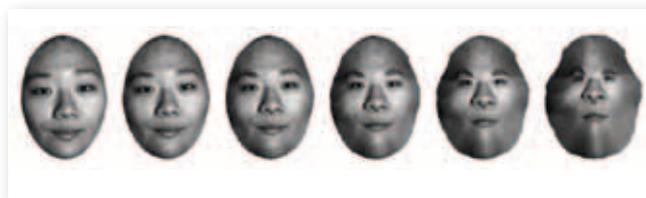


圖 16 幾何形變。女孩的臉變成獅子的臉。

在失真不大的前提下，有效壓縮 3D 影像的幾何資訊是很值得思索的問題。以下，我們提供一個透過對應函數與樣條插值，以達到臉部幾何資訊壓縮的想法與演示。

透過 3D 掃描儀 GV3 所拍出的 3D 影片每秒鐘有 30 幀 3D 照片，而每張 3D 照片約占 30Mb 的



圖 17 3D 影片壓縮構想。真正儲存只有幾幀 3D 圖片，其他在放映時靠形變特效來補足。

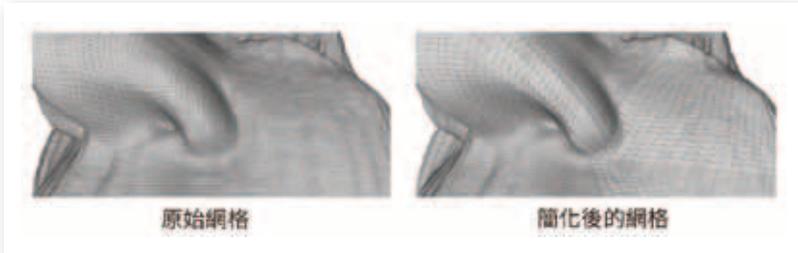


圖 18 將平坦部位的網格簡化。

硬碟儲存空間。換句話說，3D 影片的訊息量相當龐大，僅僅一秒鐘的 3D 影片就需要 900Mb 的硬碟儲存空間。在允許些微失真的情況下，我們可以運用 3D 影像的形變來達到影片壓縮的效果。想法如圖 17 所示，在拍攝 3D 影片時，我們僅需儲存 10% 的 3D 照片，即每秒鐘的 3D 影片僅儲存三幀 3D 照片。當影片播放時，再透過影像形變，將不足的幀數還原，以達到同樣的視覺效果。此外，雖然原始資料的網格點非常密集，然而在較為平坦的部位，譬如臉頰與額頭，其實並不需要這麼多網格點。如圖 18，我們可以將網格簡化，用很少的點數來儲存每一幀照片。壓縮後的網格點數少於原始網格點數的六分之一，因此，總壓縮率小於 1.6%。請參閱文末延伸閱讀的連結，觀看 3D 影片壓縮的演示。

所謂數位驅動 (digital driving 或 regargeting) 指的是透過拍攝真實演員的動作，讓數位角色做出與演員相同動作的手法。這樣的技術已被廣泛應用於 3D 動畫

與 3D 遊戲的製作。在這個技術中相當關鍵的是對應函數，有了演員與數位角色之間的對應關係，在演員動作時，才能讓數位角色在正確的部位做出對應的動作。底下，我們透過本文所介紹的對應函數，將一個咀嚼口香糖的 3D 影片，其咀嚼動作轉移到另一張 3D 照片上。

首先，我們將給定的影片看成一個影像序列，記為 \mathcal{M}_j ，其中， $j = 1, \dots, n$ 。將要驅動的 3D 照片記為 \mathcal{N} 。接著，計算 \mathcal{M}_1 與 \mathcal{N} 之間的對應函數，並統一網格結構。透過

每兩張 3D 影像 \mathcal{M}_j 、 \mathcal{M}_{j+1} 網格點座標間的差異，得到向量場 \mathbf{v}_j ，其中 $j = 1, \dots, n-1$ 。最後，將向量場的長寬高比例調整後，施加在照片 \mathcal{N} 的網格點上，即可將之驅動。

圖 19 是一段數位驅動演示的截圖，透過女孩嚼口香糖的動作，分別驅動一張男孩的照片和一張獅頭的曲面。請參閱文末延伸閱讀的連結，觀看完整的演示影片。除了對應函數之外，向量場的比例控制也是決定數位驅動是否成功的重要因素之一。



圖 19 數位驅動演示的截圖。

結語

黎曼保角映射是 3D 影像處理的核心工具之一，它將空間中的曲面攤平成平面的影像，簡化了曲面的對應問題，減少所需的運算量，提高了 3D 影像處理的效率。本文提供了 3D 影片壓縮與 3D 數位驅動應用的初步想法與演示，其中許多細節尚有很大的改善空間。

好比說，對應函數的特徵點目前是以手動選取，若能結合當今平面影像的特徵追蹤技術，從攤平的平面影像來鎖定特徵點的位置，再透過黎曼保角映射的逆映射來得到曲面上的三維點座標，即可實現 3D 影像特徵點的自動追蹤。

此外，在 3D 數位驅動的演示中，向量場的比例控制是很粗略的。若要達到足以擬真的程度，需要對向量場做細膩的局部微調。因此，若要發展成實用的產品，勢必得投入更多的時間與人力。

現今，3D 影像數據已被廣泛應用於 3D 動畫的製作與 3D 列印的建模。然而，對於 3D 影像的編輯與後製，目前尚無法像編輯 2D 影像般自如。雖然 3D 照相機與 3D 顯像設備等硬體尚未成熟是主要原因之一，但如何發展相關的軟體與應用，也是值得盡早思考的問題。

畢竟科技的發展日新月異，一旦相關的硬體成熟了，勢必會淘汰許多設備、取代許多技術。唯有不斷創新，才能走在時代的最前端。期盼在不久的將來，保角映射的技術能夠應用於 3D 照相機等相關的科技產品。這將是數學與工程應用的完美結合，是推動尖端科技進步的一大助力。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

延伸閱讀

► 本文提到的兩處動畫演示，請見

<http://yaucenter.nctu.edu.tw/journal/201507/ch1/main.php>

3D 幾何剪影



利用一維形式所建構之曲面圖形。

(作者：丘成桐、顧險峰)