

訪談 季理真、翁秉仁



受訪者簡介

北京大學數學所碩士班畢業，普渡大學數學博士，現為新罕布夏大學數學講師。2013年，因學生質數猜想之研究突破，獲得ICCM晨興卓越成就獎。

溫眼看人世 劍起驚九天

張益唐訪談

問 謝謝你接受我們的專訪。請先告訴我們你的父母為什麼給你取張益唐這個名字，也請順便談一下童年的數學經驗。

張 我的名字是祖父取的，他在我很小就過世了，他是中學教師，字寫得非常好。我的「唐」，一方面是因為我媽媽姓唐，當然也代表有益於唐人，也就是中國人。「益」也可以代表一，表示長子。我和妹妹的名字差半個字，她中間的字是「盈」，就是希望她能夠把張和唐這兩個家族給盈滿了。

我們家就兩兄妹，在那個年代中國知識份子的家庭生兩個是正常的。我爸爸是工程師，他對數學好像沒特別擅長，而且因為我童年的經歷，他也沒有機會教我。

我小時候算是不順利的，我父親雖然是搞技術的，也參加過地下黨，但在59年的政治運動時還是受整，也就是所謂反右傾。可能因為這個因素，他並沒把我帶在身過。當我父母在北京時，我父親把我放在上海外婆家。

我的母系是上海浦東川沙縣人，能追溯到的祖先都是上海人。他們是純粹的工人，按照中國當時的政治標準是最好的成份。他們都是機械工廠的工人，技術很好，人也厚道，連我外婆也是退休工人。但是家裡沒人懂數學。

說實話，沒人教過我數學，就是一種天性愛好，喜歡數學。我的啟蒙是上世紀六十年代的一套青少年科普讀物，叫《十萬個為什麼》。我記得開始有五冊，後來又加了三冊，其中第七冊是生物，第八冊是數學。我那時大概是十歲，至少能把問題看懂。《十萬個為什麼》裡面有哥德巴赫猜想，有費馬最後定理，就是沒有學生質數猜想（哈）。

我當時住在上海一個大院裡，我唯一受過的最高教育，是我在那裡認識的一個高中生，他教我一點數學，多少有點影響。我其實沒上過什麼學校，連中學都沒有讀過。因為我爸媽後來都下放到五七幹校，到農村去了，我15歲就跟著下鄉，比那些中學畢業生上山下鄉還早一點。我們去了湖北，在那邊根本沒得讀書。



問 那後來還有什麼其他接觸數學的機緣嗎？

張 1971年，我16歲，回了趟上海看我外婆，那時是文革後期，最瘋狂的時間已經過去，稍微有點恢復，有些文革前的書也重出了，文革前中國的中學教育算是正規的。當時上海復旦大學夏道行寫了一本書叫《 π 和 e 》，介紹這兩個數，很薄的一本書。書中講到 π 和 e 是無理數，我就想弄清楚為什麼 π 和 e 是無理數。那時我已經會證 e 是無理數，但 π 是無理數不好證。至於為什麼它們是超越數，就更想弄清楚。

後來，我到北京到工廠做工時，在舊書店又看到一本華羅庚寫的《數論導引》，從裡頭再學一點，反正就是斷斷續續。我在考大學前沒有什麼基本訓練，都是零散的天生興趣。

問 你考大學時就決定要讀數學嗎？那時有做過什麼準備？

張 是的。1977年底我沒有考好，數學考得還可以，最糟糕的是政治，一點都不懂。那時要考所謂五文，數學、物理、化學、政治和語文，我語文也沒考好，當時要求的都是八股式的黨八股。數學也不算考得好，因為有些題意不大清楚，我會做但是不大會寫。1977年底的這次考試分數是夠了，但上不了好學校。

所以我過半年後再考，有了經驗，這次知道要怎麼準備，就考得很好錄取了。數學考90幾，政治考得最差，70幾。我比較自豪的是語文這科，在文革前高考的語文一向都是命題作文，但1978年這次沒有那種我不喜歡的八股作文，這次考語文要考綜合能力，對詩詞、成語、古文的了解，我考得相當高，100分滿分得82分。

問 在進大學前，你怎麼學習這些中國語文？

張 我沒上過中學語文課，都是自己看書。數學跟文學有點相通，像文言文我是怎麼讀的，我並不是說自己的文言文水準有多高，而是一個東西你並沒

有完全看懂時，就能感覺他有意義、很美，這點數學和語文可能是相通的。

我上大學前，無意中從朋友那看到唐朝詩人白居易寫給元稹的〈與元九書〉，很多字我不認識，但就能感覺這文章怎麼寫得那麼好。

問 你23歲進北大，是不是就計畫以後要做數學研究？做哪個方向？

張 是，我希望能做數學，想做數論。也許我只是重複人們的感覺或天性，因為數這個東西，問題那麼簡單，一般的中學生都懂，但是解決的方法又那麼難，也許是這點很吸引我。

順便說一下，我並不是受當時國家宣傳陳景濤的影響而想學數論。倒是1973年18歲時，我膽子很大，微積分只知道一點點就開始讀陳的論文，大致過程還是讀懂的，當時費了很大的勁。

問 從近幾十年來看，不管人家說北大好壞，很多最好的學生還是北大出來的，你是北大文革後第一屆的學生，能描述當時北大的情況嗎？

張 我們這一屆當時的價值觀很清楚，就是把數學學好。即使沒人管你，大家都很用功，無論是微積分，代數，就喜歡這種有挑戰性的東西。北大強調基本功要扎實嚴謹，這學風是很好的，到現在還有影響。但北大也有一個缺點，因為文革或其他的原因，跟外面接觸不多，跟不上國際數學的主流，在當時已經落伍。我六月份在紐約演講也提到，北大教學過份嚴謹的要求，會不會顯得太陳舊，會不會束縛想像力的發展。雖然我不確定別的學校是怎樣，但我猜海峽兩岸也許都有這個問題。

北大學生比其他學校好，有一點是肯定的，就是入學成績高一點，學生好一些。北大的要求也比較高。

問 請談談北大的老師。

張 我進北大大一上基礎課時，沈燮昌老師教數學



張益唐在ICCM獲頒卓越成就獎，與丘成桐合影。

分析，丁石蓀教解析幾何，他們教書教得真好，對我很有影響。學了微積分就能自己看數論，讀陳景濶的文章。後來我的研究生導師潘承彪，他教解析數論也講得很好，其他一些老師也都不錯。

我在美國新罕布夏大學教書時，一直在回憶沈燮昌和丁石蓀的上課，要怎麼教書讓學生有興趣，能不能吸引學生。有人問過我怎麼把書教好，因為我在美國的教學紀錄非常好。事實上我只問怎麼樣不把書教壞，不要以為你懂的，學生一定懂。必須下功夫去想，如何將材料組織和呈現出來，才會對學生最有幫助。一個大一學生剛進來，老師怎麼講課，對學生的影響很大。我教書模仿沈的原則，不是定理、證明一直寫下去。我先提問題，希望和學生一起來想，然後我才歸納一下。當時沈雖然不是完全這麼做，但至少讓學生思考，是啟發性的教學。

遺憾的是，老師不僅要會教書，也要做研究，要做在最前面。我們那一代最缺的，就是特別好的老

師，不是說他們人不好，教得不好，但是也許因為文革，研究沒到最前沿。如果當時有一個這樣的人，對學生關心又能帶領我走的話，也許我的獲益會更大。如果有好學生，我希望將來我能充當這樣的老師。

問 接下來，請談談你在北大的研究生生活。

張 我的研究生導師是潘承彪，我跟他學解析數論的基礎知識，以前在大學數論只是瞎看，跟著他學了正式的課程。基本功還是很重要的，解析數論中很重要的就是階的估計，在他的教導下，我對這方面非常敏感。像這次學生質數的問題，我就是能感覺出上界應該是多少，怎麼去達到。如果你沒有這種基本感覺，這種問題是做不下去的。這是在研究生時打下的基礎。

另外，當時中科院朱堯辰講丟番圖逼近論，裴定一講模形式，對我都有影響。當時修模形式的沒幾個人，裴定一是從1971年志村五郎的《自守函數的算術



理論導論》(Introduction to Arithmetic Theory of Automorphic Functions) 選幾章來講。現在回想起來，講模形式跟個人的研究方向有關，我沒學到幾何上的東西，只是分析。模形式是一個很有意思的東西，特別是到了90年代因為懷爾斯(Andrew Wiles)證明費馬最後定理，讓模形式更有價值。

模形式是定義在上半平面的函數，而且在邊界上在某些地方是解析的甚至等於0。這可以做為一個純分析的課題，但是它的含意遠遠不只於此，要看老師怎麼教。過去國內的老師只講一半，證明證得非常細。我記得朱堯辰老師講羅特定理(Roth's theorem)的證明，到最後根本就記不住，一步一步你都過去了，弄完還不知道在幹什麼。過多的陷入技術性的細節，會削弱整體的東西。學數學和給人審稿不一樣，不能只看每一步的對錯。

問 這麼說起來，你在出國之前的訓練主要是比較分析的，是解析數論這部份，那關於代數數論與代數幾何呢？

張 當時大陸主要缺的是幾何的背景，代數數論還是有人做。中國教育太強調基本功訓練，畢竟人的時間和精力是有限的，那會限制你的思維方式，如果細節一定要搞得很清楚，就可能造成廣度不夠，很難發現和其他東西的聯繫。解析數論到目前為止，就是自己的路，但代數數論到後來必須和幾何有關，這方面當時走得不夠。

問 你出國後選了代數幾何，論文題目選了雅可比猜想(Jacobian conjecture)，你為什麼選這麼有名的問題。怎麼沒想到要選數論的老師，像夏希迪(Freydoon Shahidi)？

張 這也是碰上了，因為我的導師莫宗堅就做這方面，本來有可能做完，好像他也寫過一些東西描述這段經過。這方面我不太想說，過去了就算了。我出國沒有找別的老師，是因為莫宗堅和丁石蓀是好朋友，我出國時已經答應做莫的學生。

我從莫學到一些代數幾何，莫的方法是比較具體，要去算、去估計，我比較習慣這種不抽象的做法，讓我知道即使是代數幾何，有很多東西到最後也要具體去算，這是給我印象很深的。

我這人並不擅長理論性推導的東西，像數論中著名的泰特論文(Tate's Thesis)我就沒辦法完全弄懂，他弄出 ζ 積分，又有解析延拓，又有函數方程，然後有L函數，確實很漂亮，但我就是還想知道，到底這個積分等於幾，到底有沒有漸近的表達式。

問 你91年底從普渡畢業，99年到新罕布夏大學，有八年的時間不在學術崗位。你能夠長時間的堅持，考慮很難的問題，非常不簡單，可以大致描述一下嗎？

張 也沒什麼，那時就不用教書，網路一般說我在打工，其實也不算，主要是在朋友店裡，他開了好幾家店，雖然我沒有正式的會計師執照，但是幫忙管帳做會計。

雖然是不相干的工作，忙有時也忙，但總是有時間。如果你心思很單純，真的喜歡數學，就不會把數學忘掉，還是可以繼續。我自己留了一些資料。那段時間讀了很多東西，不斷的想一些問題，包括邦比耶里(Enrico Bombieri)、弗利蘭德(J. B. Friedlander)、伊凡涅茨(Henryk Iwaniec)的工作，都是在那時候才讀的，另外也包括了代數幾何領域的東西。

問 葛立明跟我說，當時你在做個大問題，快做出來了，所以找你去新罕布夏大學。

張 那是關於席格零點(Siegel zero)的工作，我有一篇網路文章，是不完整的。目前我還不敢說我完全做成，但是的確有很大進展。學生質數這個問題我做了三、四年。但希望大家不要誤會，這個問題我是想了三、四年，但不是說我所有時間都在做它。一直到去年9月，我因為肯定可以做出來了，才暫時放下別的東西。

張益唐重要著作

- On the zeros of $\zeta'(s)$ near the critical line. *Duke Math. Journal*. 110 (2001) no.3.
- Bounded gaps between primes. 將刊登於 *Ann. of Math.*

在新罕布夏大學教書，我積累了許多經驗，很遺憾在那裡沒有好的學生。我教過很多課，主要是微積分，再高一點像抽象代數、複變，也給學生開過數論的研讀課程。我很喜歡教書。

問 網路上都講你在去年7月3日找到解題的靈感，而且證明中還用到威伊猜想，請跟我們說明一下。

張 這其實是很有意思的故事，去年夏天我因為問題想不出來，就準備到科羅拉多朋友家去好好度假，什麼書、論文、電腦都沒帶。我朋友是指揮家，我喜歡古典音樂，所以在那邊聽了很多音樂。但是後來心思不知不覺又回到數學上，7月3日我突然得到一個靈感，可以把問題歸納到幾種情況，其中兩個情況用克羅斯特曼和 (Kloosterman sum) 都可以解決。最後第三種情況，本來以為是最簡單的，其中牽涉到一個數表示成三個數的乘積有多少種表示法。我以前有個錯覺，覺得這個是最簡單的，到最後才知道是最難。於是就去查了1985年弗利蘭德和伊凡涅茨的論文。從他們其他文章，我知道他們做過這方面的工作，但細節不清楚。我查到要用到威伊猜想的其中一部分推論，也就是柏奇-邦比耶里 (Birch-Bombieri) 結果，這是做為他們文章的附錄而發表的。但是即使直接用他們的結果，還是差一點，後來用了一些我常用到的方法，結果就成功了。

從這裡可以講，假如做學問牽涉到某些主題，一定都要先讀透讀懂了，可能要花很長時間。有時開始不能確切知道什麼是需要的，等到需要的時候再去補，那時效率會很高，因為你知道關鍵要什麼東西，它能提供什麼。所以那時我連論文的細節都沒看，就那套方法給我印象特別深，我用上了，結合柏奇-邦比耶里結果再加上模的分解，這個成果我很滿意，是最滿意的一步。因為我補得很快。

問 說到這，我就想到中國的學生常常希望把所有準備知識都學好才開始做研究。

張 我這個論文也有這個問題，很多人說要把我這篇論文先讀懂。那裡面是有些想法，可以再往前走，也許能解決別的問題，但能走多遠我不敢說，我並不主張費很大力氣來完全讀懂。我覺得以我的方法，質數距離儘管可能降低很多，但應該沒辦法真的做到學生質數猜想。

問 葛還告訴我一個事情，他說以前你常替系裡換水，現在成名了，系裡的秘書問葛，你還會替系裡換水？他說你還是會繼續換。

張 我前兩天離開前，還換了水，這沒什麼，只要我還在那就還會換。那種飲水器用個倒過來的大水桶，但是別人都換不好，只有我換得好，所以秘書老太太還挺喜歡我。這沒什麼，不會因為我出名了，就不做這種事。

問 你出了這個名後，對你有沒有什麼影響，外在或內在的？

張 我是出了名之後，才知道別人說我這個人很孤傲什麼的，這些是別人對我的感覺，我自己都不知道，我倒覺得自己還挺隨和的。也沒有因為出了名，就傲氣十足的吧。

問 我比較訝異的是你在普渡還當過中國同學會的會長，這應該證明你不是孤傲的人。

張 那是六四天安門事件的時候，但我這個會長也是被別人硬推上去的，實際上我是最不擅做這些什麼「長」的。



我出了名後，網站上的東西我都不怎麼看，不敢看，也沒時間看。我只抱怨了一件事，就是自由時間變少了，這弄得我非常頭疼，我希望我還能繼續做數學，我知道名也許會帶來一些利益，這些過去我不看重，將來也不會。



華羅庚

問 有人這麼評價，中國數學最好的時間可能是50年代，當時華羅庚回來領導解析數論，很有希望。解析數論是中國的強項，你對現在中國解析數論的現況和前景有什麼看法。

張 50年代那時的價值標準就是做最好的數學，華老是解析數論的領袖人物。華的脾氣是很大的，他都叫學生上台講，據說有次王元忘了不會講，他就說不行，今天不講不許下課。中國數學50年代，從華羅庚到陳景濶，那時人心思單純，做數學是好的，喜歡做也願意投入。那時大陸發不了財，工資都一樣，沒有雜念。於是就努力去做，做到最後，華老從50年代開始，建立中國人的學派，最後陳景濶達到頂峰。

我認為解析數論如果確實有一批人想去，仍然是有希望的。當然這需要一定的條件，因為科學的發展有它的階段性。比如華老那套東西，篩法也好，圓法也好，不能永保青春。後來，一方面是做到頭了，一方面因為文革，中國沒有機會吸收新東西，所以就慢慢停滯了。

但現在這些條件都具備，你可以積極吸收新的東西，像是弗利蘭德和伊凡涅茨，或者新一點像葛林（Ben Green）和陶哲軒的東西。我和葛也談過，我的直覺是將這些跟古典解析數論技巧結合起來，應該是有前途的，現在各方面條件都有了，只是怎麼把新的方法融入傳統解析數論去，我希望中國年輕一代自己敢於給自己提新的問題。

我自己在潘承彪老師指導下寫的第一篇論文，現在我連看都不想看了，那時我就有感覺，怎麼路越走越狹窄了，你不能就是這一套。這時你需要有點勇氣，看膽子大不大，敢不敢否定自己走過的路，要自問我們這領域裡頭能不能和新的東西結合起來，要不斷的問自己，天天問自己。

當然如果有機會出國，也許會容易一些。我2001年發表了一篇黎曼函數導數的文章在《杜克數學期刊》（*Duke Mathematical Journal*），那結果評價還挺高的。結果我收過一些雜誌邀我審稿，但是我這人可能太挑剔了，就說這結果不宜在《倫敦數學學會期刊》（*Journal of the London Mathematical Society*）發表，建議在小一點的雜誌發表。那些結果是對的，但是沒有太大意義。我想不論中西，做學問都需要保持一個活水，不是一個死水潭。

問 想請教你對華羅庚《數論導引》這本書的評價，另外也請談談其他比較好的數論書。

張 《數論導引》做為一本入門書，現在來看內容是陳舊了點，但仍然是一本非常好的書，不僅是數學好，華的文學功底也是好的，讓一個對數論有興趣的年輕學子來說，一看就懂，很容易入門，他的

風格明快又豐富，一本書很難寫成這樣。

我想《數論導引》有受到哈第 (G.H. Hardy) 和萊特 (Edward M. Wright) 的《數論導論》 (*An Introduction to the Theory of Numbers*) 的一些影響，但華寫的更多一點。有幾位英國人的書也寫得非常好。像梯奇馬許 (E. C. Titchmarsh) 的《黎曼ζ函數理論》 (*The Theory of the Riemann Zeta-Function*)。他從1950年出第一版後，還沒有書可以超過。又豐富又明快。

問 你會不會也想寫本書？

張 我暫時還沒什麼想法，寫書恐怕很難，要考慮能不能寫得有啟發性，不能只是定義、定理、證明，要寫出中間的想法。

我是希望能用中文寫本解析數論的書。潘承洞和潘承彪兄弟有一本《解析數論基礎》，那本書其實寫得很好，但是他們只寫到90年代，後面例如克洛斯特曼和，或者代數幾何的材料那些沒寫進去，這是個缺點。伊凡涅茨和柯瓦斯基 (Emmanuel Kowalski) 也寫過一本《解析數論》 (*Analytic Number Theory*, 2004, AMS)，這本書寫得很好、很豐富，但對初學者來講太難，因為密度太大了。

我倒是希望我能寫，也許把自己的心得講出來，但我還沒正式去考慮這問題。

問 你有沒有什麼數學英雄，像是比較敬佩和喜歡的數學家？

張 這有點說不出來。小時候當然高斯是我心目中的英雄，但是長大之後好像就沒有了。像是有些人他們數學做得很好，但是我總覺得自己不會做得比他們差。所以現在在我心目中沒有什麼英雄。但是在人格上佩服的倒是有兩個，一個是懷爾斯，另一個是帕瑞爾曼 (Grigori Perelman)。



張益唐會後在臺大與學生交流

問 你前面提到華羅庚的文字好，我們也知道你對中國和俄國文學的愛好。請談談你覺得數學和人文之間有什麼關係。

張 別人問我純數有什麼用，我只能說沒用。前一陣子Google請我去演講，我不敢去，萬一他們關心的是實用價值，讓我要怎麼說，我又不能閉著眼睛說瞎話，說這東西非常有用。但對他們說沒有用，又讓人失望，所以我就不去了。

但是做為一門知識，做為一個具體做學問的人來講，數學和文學甚至和音樂欣賞是有很多共通之處，都是一種美的追求。往往我們在一種朦朧，不是很清楚規範的時候，反而感到一種美。前幾天一個英國電台採訪我，我說我喜歡莎士比亞，過去我讀過中譯本，覺得真好，到美國後裝模作樣想看英文原本，結果看不懂，因為按照我在中國學的英文語法是不通的。或者像中國的古文，現在兩岸都有很大的爭論要不要學。但是往往這東西在不規範的時候，沒完全讀懂時，反而能感覺有種美感，數學、音樂也是這樣。



問 數學也是這樣？

張 譬如我去年7月3日的靈感，它是非常模糊的東西，事實上最後一步，我認為最簡單，反而是難的地方。但是那時，我不斷用英文問自己：why not? 覺得是可以的。

問 人文的修養對做數學是重要的嗎？

張 我認為是重要的，就一個人的人格來講應該是全面的。你有其他方面的修養，應該也會顯示在數學上，當然也許我這回答本身也很朦朧。我覺得做數學有種忌諱，你如果要把所有東西都弄得具體，每一步都弄清楚，整個東西你就不知道怎麼弄了。但有時你也不知道這些步驟到底對不對，但對整體有種感覺，這種感覺有時很重要，要做出成果可能還真需要這種感覺，

問 年輕學生想要做數學，你有什麼好的建議？

張 如果說要有什麼建議的話，我希望國內有一定名望的老師，能用最大的熱誠來關懷學生。而學生也要多跟老師談一談，在選導師方面多想想再決定，希望做的東西是自己願意去做，至少有若干年願意去付出犧牲的。但我總不能要求學生像我這樣除了數學什麼都不要。

問 我今天問塞爾（Jean-Pierre Serre）一樣的問題。他說他通常不回答這類問題，如果硬要回答，他會選朗蘭茲綱領（Langlands Program），因為總是可以做些什麼，即使結果小也有意義。但他不鼓勵大家做黎曼假說，因為沒有就什麼都沒了。

張 這我倒是可以附和塞爾的講法。但還是希望有人即使在做別的東西時，還是要保持某些你有興趣的困難問題，例如黎曼假說，至少不要把這東西忘了，說做不出來就不要了。你要想各種各樣的方法去嘗試。因為說起來還真慚愧，連弱型黎曼假說，也就是把實部等於1的直線往左移一點點，都不知道怎麼做。像這種東西你可以盡想像力去試，不要以

為前人所做的已經窮盡了。尤其在數論，往往有一個新的想法就有令人驚訝的結果，把以前的東西全部都超越過去。

學數學最重要的第一當然是興趣，再來就是要開拓自己的視野，不斷問自己能不能找到新東西，把傳統的和新的東西結合起來，不斷自省。當然在解析數論裡，說開拓其實選擇也不多，畢竟解析數論太難，就像我剛列出來的弗利蘭德和伊凡涅茨，可以問問是不是還能做得更好。又如果說新一點的，我想要是把解析數論與葛林和陶哲軒的結果結合起來，我認為是有可能的，這是新的東西。

最後，就是掌握四個字：「勤能補拙」。我根本不覺得我這個人有多聰明，但我有足夠的勤奮，這是我能說的忠告。

後記 蘇力颱風過境後的傍晚，我領著初訪臺灣的季理真、張益唐，小心翼翼的走進落葉斷枝散落的臺大校園。益唐一身白，非常紳士的穿著。他深思多聞，講話溫文儒雅而有觀點，慎重、豪氣間而有之。一個人能以磊落的胸懷面對蹇滯的際遇，憑一點傲氣堅持做美好的數學，令人敬佩。

ICCM結束後，張益唐還在臺大數學系多待了幾天，與學生見面交流。其影音檔放在YouTube:

<http://www.youtube.com/watch?v=fWyJOqx61o&feature=youtu.be>

文稿可在臺大數學系網站找到：

<http://math.ntu.edu.tw>

（翁秉仁）

2013/7/13 臺大天文數學館五樓

訪問人 季理真（密西根大學數學系）
翁秉仁（臺灣大學數學系）