廣義相對論中的數學

2015 年費爾茲研究所講辭

作者：丘成桐　譯者：趙學信

作者簡介：丘成桐為美國哈佛大學數學與物理教授，費爾茲獎、克拉福德獎、沃爾夫獎得主。為幾何分析學之大師，並出入於數學與物理之間。中央研究院院士。科普著作有《丘成桐談空間的內在形狀》、*A History in Sum*、*From the Great Wall to the Great Collider*。

我們都知道，就在整整一百年前，愛因斯坦寫下了他統馭重力和動態時空的著名方程式。愛因斯坦的這項創造被認為是人類歷史上最偉大的成就之一，他的動機是要結合物理學上兩個重要但互不相容的理論：其一是行之已久的牛頓重力論，另一是剛發展出來的狹義相對論。

他必須解決這兩項重要理論的不相容性：狹義相對論是建立在沒有任何資訊的傳遞速度可以超過光速的基本原理上，而牛頓力學則允許遠距作用，容許重力的瞬間傳遞。

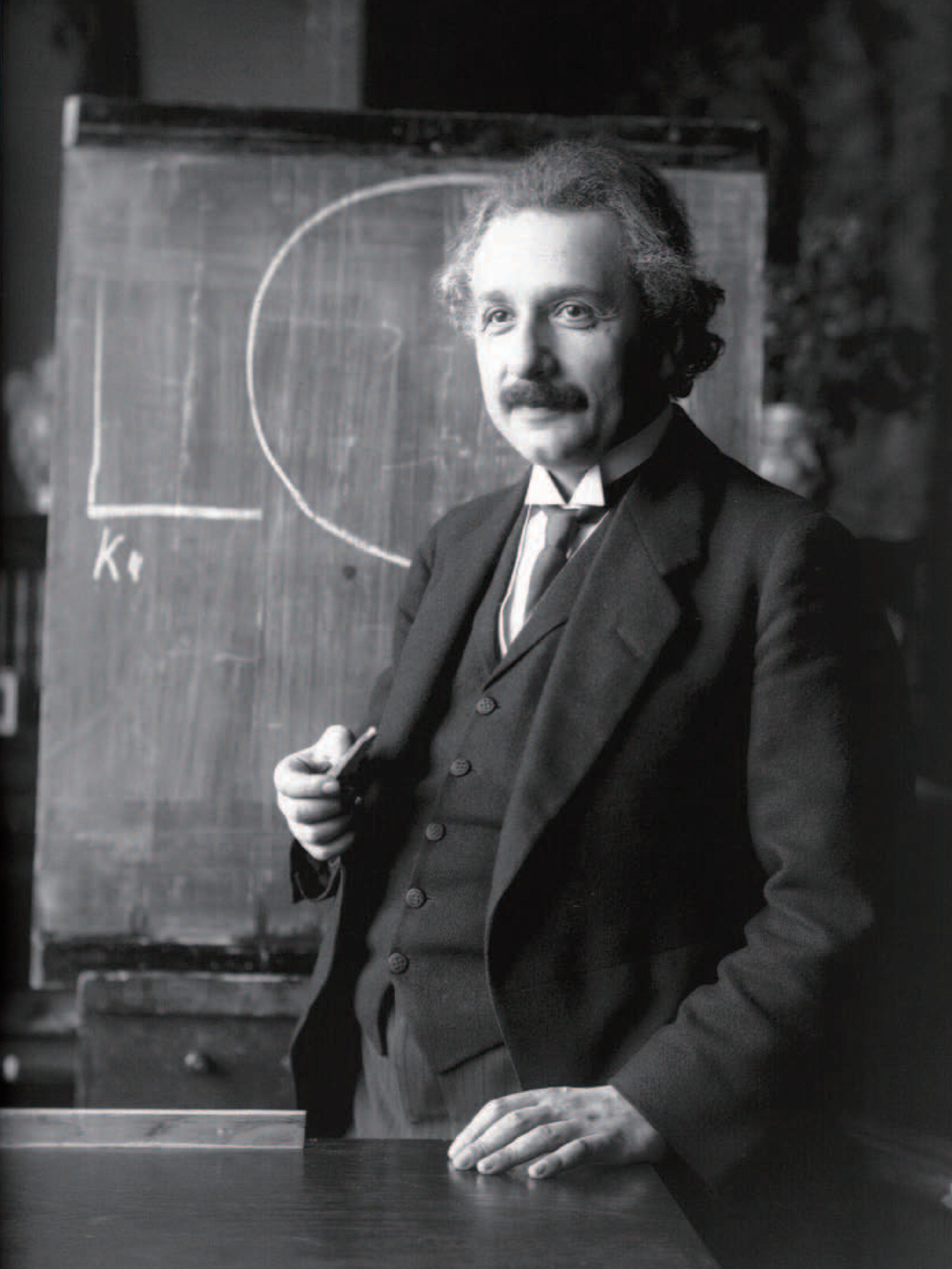
在他嘗試合併這兩大理論之時，愛因斯坦做了許多思想實驗（Gedankenexperiment）。他的理論裡非常重要的一點是改變了牛頓力學絕對靜態空間的想法。在這過程中，他受到了物理學家暨哲學家馬赫（Ernst Mach）的影響。還有一個重要的概念——閔可夫斯基度量（Minkowski metric），是在 1908 年由愛因斯坦的老師閔可夫斯基（Hermann Minkowski）所引入的。閔可夫斯基度量把狹義相對論的重要特徵轉化成四維時空的描述，其中的勞侖茲群是以時空的等距群（group of isometries）呈現的。於是，時間和空間再也無法分割，時空的幾何理論開始出現在物理學的核心。

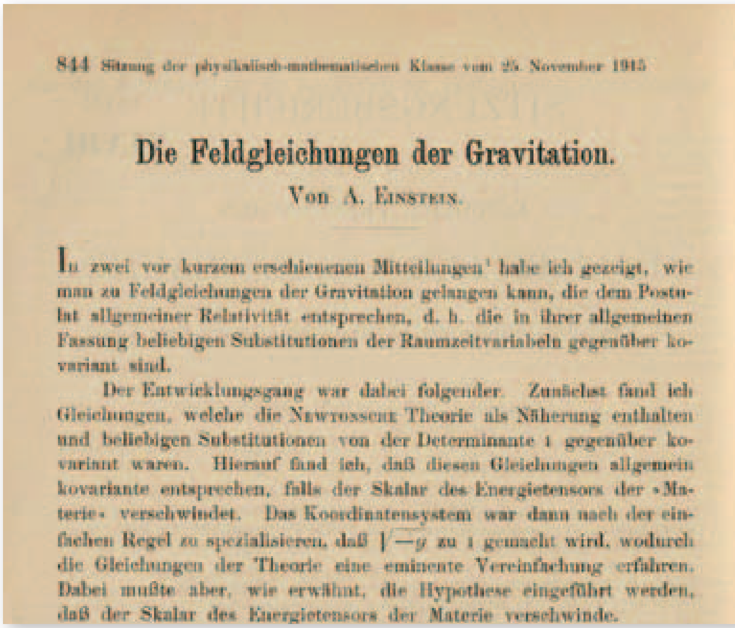
廣義相對論的誕生

這對愛因斯坦是一個重要的轉捩點，他瞭解到時空力學不可能只是單純牛頓理論和狹義相對論的結合。因為牛頓重力論是由純量函數所主宰的。而在狹義相對論裡，物理量會隨速度及物體的移動方向而改變，因此愛因斯坦問他的數學家好友格羅斯曼（Marcel Grossmann），哪種數學理論可以解釋這樣的量。格羅斯曼回答說，研究黎曼幾何的克里斯多福（Elwin Christoffel）和李維奇威塔（Tullio Levi-Civita）所發展出來的張量（tensor）概念應該是他需要的數學概念。

於是借重黎曼幾何裡的黎曼度量張量（metric tensor），愛因斯坦要用它來描述重力場，為了尋找與牛頓場類似的方程，愛因斯坦藉由他最重要的思想實驗成果——等效原理。根據等效原理，愛因斯坦知道，描述重力的方程應該在一般坐標變換之下是共變的（covariant，或譯協變），而不只是靠選擇特定的坐標。比照牛頓的方程，重力場方程的一邊是與物質有關的張量，另一邊則應該是表現重力場的黎曼度量的某種二次微分，而且基於等效原理這個微分必須是張量。

愛因斯坦在維也納講演，攝於 1921 年。（Ferdinand Schmutzer 攝影，維基百科）




844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

愛因斯坦的“Die Feldgleichungen der Gravitation”（重力場方程）於 1915 年 12 月 2 日發表在普魯士科學院學報。（影印截圖）

愛因斯坦堅持要格羅斯曼幫他找出更多關於度量張量的資料。格羅斯曼最後在圖書館裡發現，義大利幾何學家黎奇（Gregorio Ricci-Curbastro）所發現的黎奇曲率張量（Ricci tensor）似乎是適合的張量。它是把度量微分兩次的曲率張量經縮約（contraction）而得的，也是坐標變換下的共變量，而且又有正確的變數數目，很符合愛因斯坦的期待。

愛因斯坦和格羅斯曼在 1913 年和 1914 年合寫了兩篇論文，在其中寫下了重力場用張量描述的方程式。但是愛因斯坦還有一項很重要的使命：他想要解釋水星近日點進動（precession of perihelion）時的不正常現象，這是天文學的一個重大問題。由觀測可知，水星的繞日軌道每次都會略有不同，這個現象無法以牛頓方程來解釋，已經令天文學家困惑了許久。愛因斯坦和格羅斯曼所得到的方程式也無法解釋這個現象，因此愛因斯坦仍須繼續與他的新理論奮鬥。

在 1914 年到 1915 年間，愛因斯坦為此請教李維奇威塔和希爾伯特（David Hilbert），得益於希爾伯特的協助，愛因斯坦最後終於找到了重力場方程（見 12 頁 BOX）。

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = T_{ij}$$

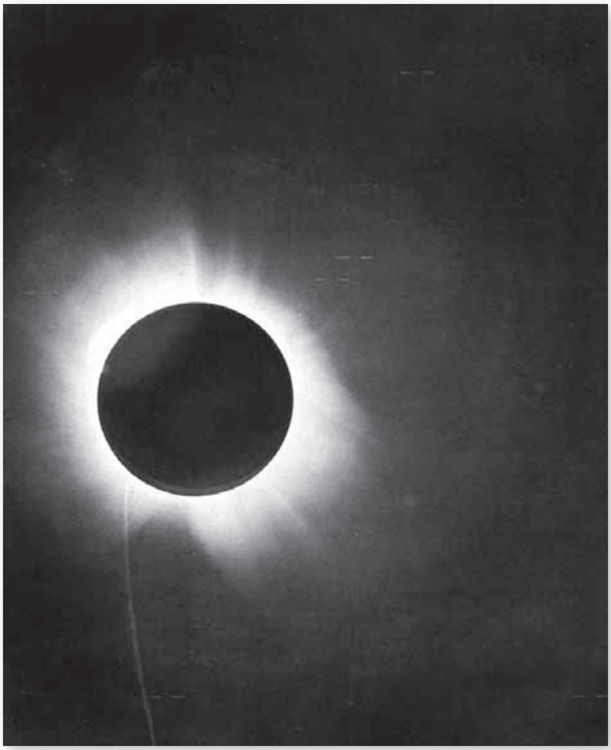
其實希爾伯特在愛因斯坦發表結果的前十天，也發現了這個方程，同時還找到利用作用量原理推導方程所需的拉格朗日函數。儘管如此，實際做計算，而且確認這方程可以解釋水星進動現象的還是愛因斯坦。希爾伯特也大方的承認這是愛因斯坦的方程與理論。

愛因斯坦還使用廣義相對論來解決光線路徑的問題，說明如果一顆恆星發射的光線來到地球，當光接近太陽時會如何被時空曲率所彎曲。此一現象在 1919 年，由兩組天文學家分別在非洲西岸和巴西兩地觀測日全食而得到證實。經由新聞報導，一夕之間愛因斯坦成為婦孺皆知的名人。令人驚訝的是，我們現在仍使用同樣的原理來設計全球衛星定位系統（GPS），以確保其精確性。

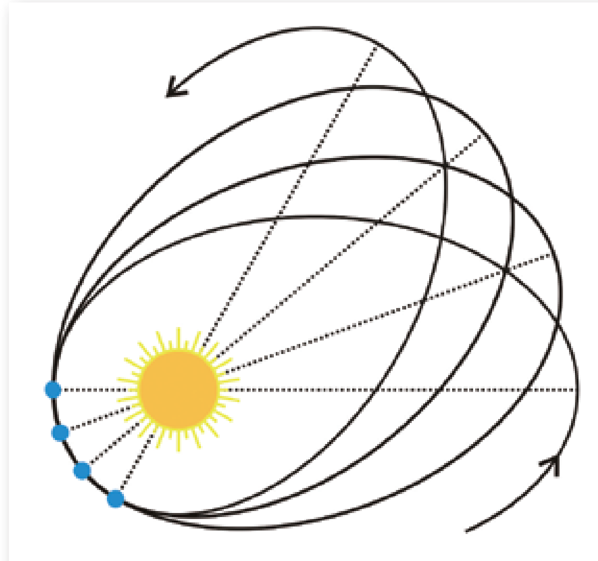
許多物理學家以為廣義相對論是憑空創造出來的，他們並未考慮到黎曼及其追隨者所發明的幾何新觀念所帶來的深遠影響，沒有這些已經成熟的數學概念，愛因斯坦就不太可能找到恰當的數學架構，可以表述廣義相對論。

而在另一方面，廣義相對論也對近百年的幾何學發展，提供了最深刻的動力和影響。在愛因斯坦提出廣義相對論的一年後，史瓦茲席德（Karl Schwarzschild）寫下了著名的愛因斯坦方程的球對稱解，不但有助於光線偏折的計算，這個解更成為靜態不自轉恆星或黑洞的主要模型，它也是最早發現與大自然相關的內稟度量（intrinsic metric）。

數學家立即著手研究廣義相對論。伯克霍夫（G.D. Birkhoff）證明了愛因斯坦方程球對稱解的唯一性。更重要的是，包括李維奇威塔、卡當（Élie Cartan）、魏爾（Hermann Weyl）、卡魯



愛丁頓 1919 年 5 月 29 日在西非觀測到的日全蝕，驗證了愛因斯坦廣義相對論關於太陽重力場造成光偏折的預測。（維基百科）



水星近日點進動示意圖。（維基百科）

札（Theodor Kaluza）在內的許多數學家開始推廣廣義相對論，把物理學的其他相關領域涵納進來。他們的研究，對物理學和數學都做出了根本性的貢獻，例如像是基本規範場論，以及廣義相對論額外維度的卡魯札－克萊恩模型（Kaluza-Klein model）❶。

魏爾所引入的規範場論對現代物理學和數學有著重大的影響。愛因斯坦對規範場論的評價甚高，但他指出，魏爾的第一篇論文不合乎物理學，因為它的平行移動（parallel transportation）在長度上並不守恆。

十年之後，魏爾受到量子論的啟發，把他理論中的規範群換成圓群（circle group），於是在平行移動時保有長度守恆的性質。魏爾的規範場論被楊振寧和米爾斯（Robert Mills）推廣到非交換規範群（nonabelian gauge group），後者成為粒子物理標準模型的核心要素之一。

卡魯札則引入了重力的五維理論。他發現愛因斯坦方程在五維時空中的圓對稱真空解，在降到四維時，可以得出有效的重力理論和馬克士威方程。如此一來，電磁力即可被納入到重力理論。愛因斯坦很喜歡卡魯札的理論，但根據這理論會多出一個純量場，而這在自然界是觀察不到的，所以並不符合物理現實。

儘管如此，卡魯札－克萊恩理論並未從此絕跡，比方說，它又出現在現代弦論裡，只不過原先的圓被卡拉比－丘流形（Calabi-Yau manifold）所取代。

廣義相對論中的質量

讓我們再回到愛因斯坦寫下方程的時間點，看看緊接在後他所關心的課題。譬如有些問題是以廣義相對論此一新理論來理解古典的物理量，他大多數的論證所根據的是線性逼近。我們知道，最重要的物理量是質量、（線性）動量和角動量。在牛頓力學裡，它們可以用時空的連續對稱群來定義（諾特

❶ 譯註：這裡的克萊恩是 Oskar Klein，不是 Felix Klein。

BOX

愛因斯坦重力場方程式

愛因斯坦重力場方程 , 可寫如下式

$R_{ij}-\frac{1}{2}R\,g_{ij}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$

其中左邊方程式的時空幾何部分，g_{ij} 是度量張量，R_{ij} 是黎奇張量，R 是純量曲率（scalar curvature），右邊則是方程式的物質部分，T_{ij} 是應力能量張量（stress energy tensor），G 是牛頓重力常數，c 是光速。

不過在 1917 年，為了呼應當時流行的穩定宇宙觀點，愛因斯坦不得不加入一個宇宙常數 λ ，維持解的穩定。於是重力場方程變成 $R_{ij}-\frac{1}{2}R\,g_{ij}+\lambda g_{ij}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$

但後來從各種觀測證據如哈伯望遠鏡知道宇宙膨脹的事實後，愛因斯坦認為他犯了一生最大的錯誤，傷害了方程的美感。

因此一直到 1980 年代，物理學家認為宇宙常數是 0，還有人認為這是人類觀察大自然得到最準確的數據。但是由於後來發現宇宙暗能量的現象，近日物理學家傾向留住宇宙常數，並希望用它解釋真空能量，於是錯誤又變成正確了。無論如何宇宙常數是否為 0，仍然是重要的問題。

定理，Noether’s theorem），但在廣義相對論的時空裡，根本沒有連續對稱。

首先，愛因斯坦對「孤立物理系統」的概念感興趣。如果一個時空在無窮遠處近似平坦的閔可夫斯基時空，其中沒有質量也沒有重力，則我們會說它是孤立的物理系統。然而，一個時空如何能夠在無窮遠逼近平坦閔可夫斯基時空？這是一個棘手的問題。愛因斯坦處理這個問題，並且定義孤立物理系統的總質量和線性動量。但更嚴格的表述則是由阿諾維特（Richard Arnowitt）、戴瑟（Stanley Deser）和米斯納（Charles W. Misner）在 1962 年總結提出 [1]。

請注意質量的概念，在廣義相對論和牛頓力學裡不同。在牛頓力學裡，質量可以寫成質量密度的積分；但在廣義相對論裡，由於等效原理的緣故，這種寫法是不可能的。只有孤立物理系統才能定義總質量，因為漸近龐卡赫群（asymptotic Poincaré group）可以作用在時空的無窮遠處。

孤立物理系統的質量是否為正，是廣義相對論的一個重要問題。如果質量不恆為正，系統會變得不穩定，而廣義相對論的正確性也變得難以確保。這個問題自愛因斯坦當時便一直懸而未決，直到 35 年前才由孫理察（Richard Schoen）和我使用幾何分析的方法解決。

數年之後，韋頓（Edward Witten）又根據比較線性的旋量理論（theory of spinors），提出另一個證明。過去三十餘年，這兩種論證方式在研究古典廣義相對論的問題時，都極為有用。

只能定義孤立物理系統的總質量用處很有限。長久以來，我們一直不確定廣義相對論中是否存在「準局部質量（quasi-local mass）、線性動量和角動量」。也就是說，假定有一個二維空間，例如時空中的球面，對於這個球面所圍繞的三維區域，我們能否以某種測量方式來定義其質量、線性動量或角動量。

直到最近，王慕道、陳泊寧和我找到了這些古典量的令人滿意的定義。我們能夠計算這些量，當球面遠離孤立物理系統時，而不必把極限取到無窮大。這讓我們可以測量重力波穿越二維球面時所攜帶的能量。

重力輻射

重力輻射是一種存在於廣義相對論，而在牛頓重力論中付之闕如的現象。1917 年時，愛因斯坦以線性逼近的方式孤立出重力場的輻射模式，而且導出著名的四極矩公式（quadrupole formula）。長

期以來，總有人質疑它的導出是否依賴線性化或是坐標的選擇。其實早在 1922 年，愛丁頓（Arthur Eddington）便曾說，愛因斯坦寫下的這些解是「以思考速度傳播」的坐標變換。

顯然在某個時期，連愛因斯坦本人都對重力輻射有所懷疑，他說道：「我和一位年輕的合作者得到了一個有意思的結果：重力波並不存在。雖然我曾很確定它們的存在並計算到一階逼近。這足以顯示，非線性的重力場方程所告訴我們的，或說所限制我們的，遠比我們迄今所以為的還多。」❷

但是到了 1960 年代，對於重力輻射的信心又再恢復了。當時，物理學家邦迪（Hermann Bondi）和薩克斯（Rainer K. Sachs）藉由研究在零無窮遠（null infinity）的度量漸近性 ❸，發現了一個更內稟的輻射表述。人們發現將零無窮遠的割跡朝未來移動時，邦迪質量會減少，這表示輻射確實帶走了某些質量。此一事實提高了他們理論的可信性。同時，許多學者（包括孫理察和丘成桐）證明了邦迪質量永遠為正，這表示重力輻射不能把所有的能量都輻射掉。

邦迪、梅茲納（A.W.K. Metzner）和薩克斯等人對於零無窮遠的分析，產生了一個稱為 BMS 群的無窮維群（以三人姓氏的首字而得名）❹。BMS 群的表現（representation）對於古典物理和量子物理的重力理論都很重要。然而從數學的觀點來看，邦迪等人對於時空在零無窮遠的緊緻化研究做得還不夠完美。

潘洛斯（Roger Penrose）曾提出一種漸近平坦時空的緊緻化。這對廣義相對論的許多課題都是很重要的假說。它可以推導出描述魏爾曲率張量（Weyl curvature tensor）在無窮遠時如何衰退的「剝解定理」（peeling theorem），但它能否成立，仍然還有待驗證。

克里斯托杜婁（Demetrios Christodoulou）和克萊納曼（Klainerman）處理了其中一種重要情形，他們考慮的是接近平坦閔可夫斯基時空的時空結構。結果顯示，潘洛斯的想法並非完全正確。

克里斯托杜婁根據他們的研究提出了重力輻射的記憶效應（memory effect），這是愛因斯坦方程非線性特性的結果。有些學者——包括畢耶利（Lydia Bieri）、陳泊寧和我——循此方向繼續研究，我們的工作是以畢耶利和齊卜瑟（Nina Zipser）的廣泛研究為基礎，後者的研究結合了重力和馬克士威方程組。

黑洞面面觀

如前所述，史瓦茲席德寫出了愛因斯坦方程的第一個解，他的解包含奇點，也就是曲率趨於無窮大的點。在奇點上，一切的物理定律都會失效。這出現在後來由克爾（Roy Kerr）、弗立德曼（John Friedman），以及萊斯納－諾德斯聰（Reissner-Nordström）等人所做的推廣。許多人試圖用微擾來消除奇點，但這些努力一直未能成功，然後潘洛斯和霍金（Stephen Hawking）證明了著名的奇點定理，從而表明奇點不能藉由微擾來消除。他們的論證運用了囚陷曲面（trapped surface）的概念，當光線以垂直於曲面的角度射出，不管是向內或向外射出，最後都會收斂。潘洛斯和霍金證明了黑洞的存在蘊含時空奇點的存在。這是一個非常精采的一般性定理，證明的手法極為巧妙。

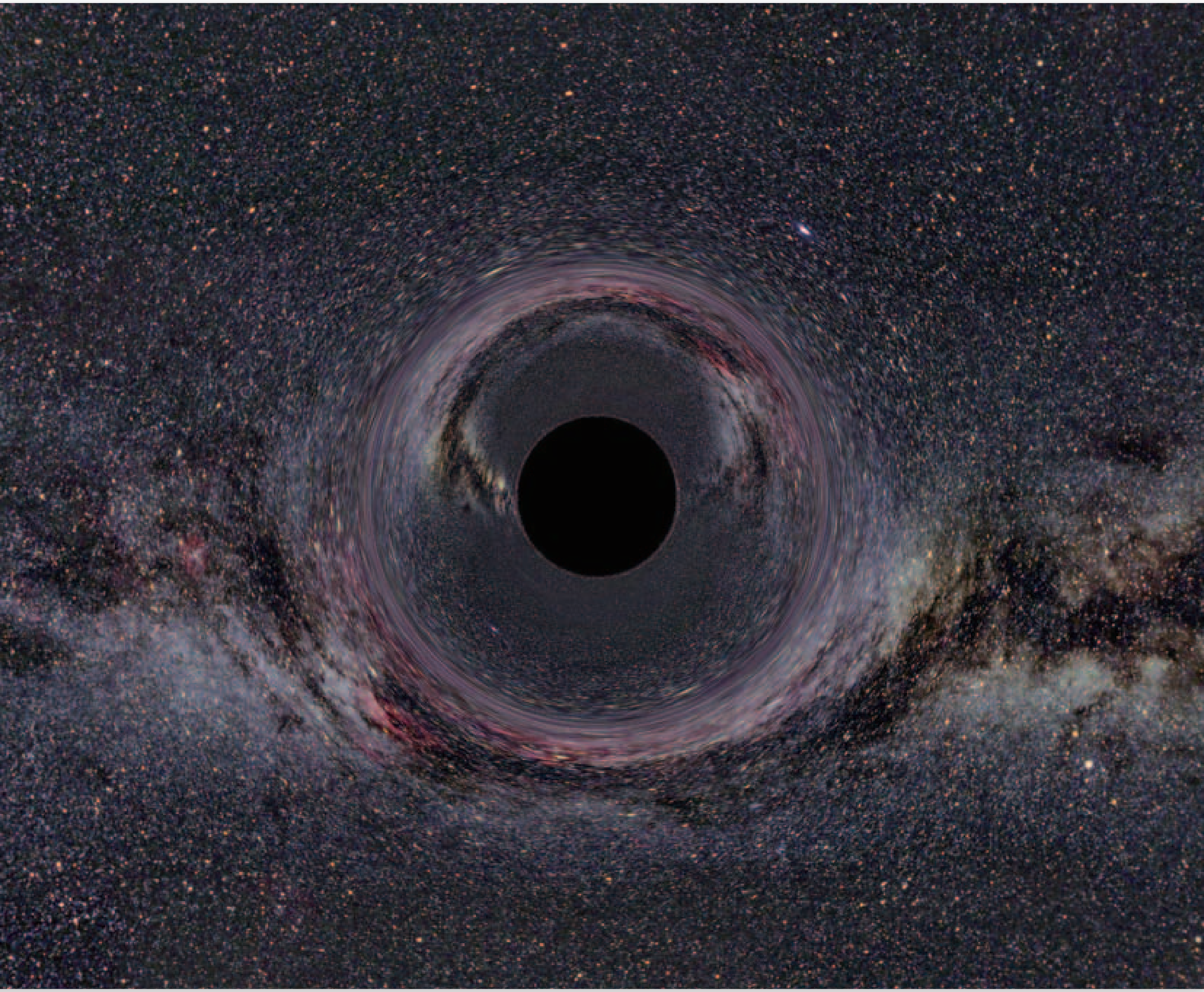
然而他們的證明迥異於傳統雙曲方程理論的奇點

❶ 參見《Gravitation: an introduction to current research》，L. Witten 編輯，Wiley & Sons 出版。

❷ 轉引自 D. Kennefick 於 2005 年在紐約石溪大學的演講。

❸ 編註：在狹義相對論中光隨時間演化的軌跡形成光錐，由於其時空長度為 0，故亦稱為零錐。零錐將時空分成類時區與類空區，對於討論因果性是重要的限制條件。在廣義相對論中延襲類似的想法，將光的未來或過去軌跡的無窮逼近部分稱為零無窮遠。

❹ M.G.J. van der Burg 也參與他們關於重力輻射的研究，並有重要貢獻。



從 600 公里外看到的黑洞模擬圖，黑洞的質量相當於 10 個太陽，背景則是銀河系。（Ute Kraus 製作，Universität Hildesheim， Gallery of Space Time Travel；Axel Mellinger，背景圖；維基百科）

定理，我們並不知道奇點的行為。而且他們的證明假定了囚陷曲面的正則性（regularity），這在恆星坍陷時不見得能成立。

無論如何，「包覆在囚陷曲面」裡的時空奇點可稱為黑洞。黑洞的第一個模型是由史瓦茲席德解給出的，它是靜態、不旋轉的黑洞。

旋轉黑洞的精確解則是由克爾在 1963 年提出。克爾解是古典廣義相對論最卓越的成就之一，其中出現了許多神祕的性質。克爾解是由兩個參數所刻劃：質量和角動量。當角動量遠大於質量時，就會

出現裸奇點（naked singularity），也就是說，該奇點並未被事件視界包圍住，所以可以被外界觀察到。類時（timelike）的基林場（Killing field）在黑洞外，可能會變成類空（spacelike）的。潘洛斯利用此一事實，提出從旋轉黑洞汲取能源的方法。

澤爾多維奇（Yakov Zel'dovich）觀察到，當有波射向旋轉黑洞時，與黑洞的角動量方向相同部分的波會因為散射而被強化，因而在離開時帶有比入射時更大的能量。這個過程稱為超輻射（superradiance）。

在 1967 年到 1975 年之間，以色列（Werner Israel）、卡特（Brandon Carter）和羅賓森（D.C. Robinson）、霍金以一系列的出色定理，證明了真空背景下的穩定黑洞，必定是克爾解。如果考慮黑洞也可以帶有電荷，上述定理連同梅哲（P. O. Mazur）、邦丁（G. Bunting）的研究，推廣證明真空背景下穩定黑洞是帶電的克爾解，惠勒（John Archibald Wheeler）將此一事實稱為無毛定理（no-hair theorem）[1]，這是在研究黑洞時運用很廣泛的基本定理。

然而，如果仔細閱讀他們的證明，可以看到他們假定了黑洞具有某種正則性。我們還不清楚如果減弱正則性的假定，無毛定理是否還能成立。無論如何，我們發現如果耦合重力與楊－米爾斯方程（Yang-Mills equation），則可發現無窮多個（但是離散的）新的靜態黑洞。

在這一方面，巴特尼克（Robert Bartnik）和麥金農（John McKinnon）找到了第一個數值解，嚴格的證明則由史莫勒（Joel Smoller）、瓦瑟曼（Arthur Wasserman）、丘成桐和麥克勞德（J.B. McLeod）提出。找出一個良好的物理原因來解釋這類黑洞的存在，仍是很有意思的問題。

人們發現，能夠產生不無聊的靜態球面黑洞的重力和楊－米爾斯耦合常數，形成一個離散數列。這個獨特的事實曾被從物理或從幾何來解釋。我們很希望知道，它是否是某種自伴算子（self-adjoint operator）的譜。

根據圖科斯基（Saul Teukolsky）的研究，我們已經知道，史瓦茲席德黑洞是線性化穩定的，但對它的非線性穩定性仍無所知。唯一已知動態穩定的時空是平坦的閔可夫斯基時空，這得歸功於克里斯托杜婁和克萊納曼的研究成果。（他們的工作又被畢耶利和齊卜瑟予以強化。）

黑洞的克爾解已知只有在角動量相對小於質量時，才是線性穩定的。這仍是理解這類古典黑洞的一大重要課題。

潘洛斯提出的宇宙審查猜想（cosmic censorship conjecture）是古典廣義相對論的一個最基本的問題，它說的是，給定一般非奇性初始條件，則其重力塌縮結果永遠不會形成裸奇點。這個猜想之所以重要，是因為裸奇點會對我們希望從初始數據預測未來的想法形成干擾。

對於純量場的球對稱初始條件，克里斯托杜婁研究這個問題，發現在非常侷限的情形可以找到裸奇點。達菲摩斯（Mihalis Dafermos）延續他的工作，研究所謂的柯西視界（Cauchy horizon）問題。

黑洞的許多重要幾何資訊，在物理學上具有基本意義的。例如，克里斯托杜婁和霍金發現，黑洞的面積會隨時間而增加。這對貝肯斯坦（Jacob Bekenstein）於 1973、1974 年的黑洞熱力學研究非常重要。貝肯斯坦發現，黑洞熵和它的面積有關，面積增加變成了熱力學第二定律的結果。

受到這個定律的啟發，霍金在 1974 年發展出黑洞的量子理論。他論證，如果納入量子力學的效應，黑洞就不再是全黑的，黑洞輻射會以隨機的方式，從事件視界裡穿隧出來。他所推測的這種現

[1] 編註：刻畫真空背景的穩定黑洞只需要質量、角動量、電荷三個參數，沒有其他物理資訊容身的餘地，因此被戲稱為「無毛定理」。惠勒透露這個詞其實是貝肯斯坦發明的。

象，現在稱為霍金輻射（Hawking radiation）。

面積熵定律連結了量子力學、重力和統計力學，它的一項結果是黑洞必定包含了極大量的資訊。這個謎團由史聰閔格（Andrew Strominger）和瓦法（Cumrun Vafa）在 1996 年使用弦論的保角對稱，而得到部分解決。他們數算黑洞的微觀態（microstate），發現其與貝肯斯坦－霍金的面積熵定律吻合。自此之後，黑洞的量子面向激發了弦論相關數學的許多重大發展。

重訪正質量定理

在證明孤立物理系統的正質量定理時，孫理察和我構造了許多可以滿足局部質量非負的漸近平坦三維流形。我從霍金那兒得知這個構造：

已知一個緊緻流形其保角不變算子具有正格林函數，則我們可以用格林函數的冪次來做度量的保角變換，如此就可以得到一個零純量曲率的漸近平坦流形。

這個新三維流形的總質量可定義，而且與原格林函數在奇點的漸近展開式的常數項有關。根據孫理察和我所證出的正質量定理，這個質量必定是正的。孫理察很有效的運用這項事實來完成懸宕已久的山邊猜想（Yamabe conjecture）的證明。山邊英彥（Hidehiko Yamabe）的猜想是：

每一緊緻流形均可保角變形成一個帶有常純量曲率的流形。

當孫理察和我證出正質量定理時，吉本斯（Gary Gibbons）和霍金正在發展他們的歐幾里得重力理論（theory of Euclidean gravity）。他們需要知道其作用量是正的，換句話說，他們需要四維版本的正質量定理。

結果孫理察和我證明了這個定理，並且接著發展關於正純量曲率流形結構的理論。我們發現可以對這種流形做幾何餘維等於 3 的手術（surgery）[1]。格羅莫夫（Mikhail Gromov）、勞森（H. Blaine Lawson）、史托爾茲（Stephan Stolz）等人運用這點，給出至少在簡單連通情形下，正純量曲率流形的完整理解。

正質量猜想的證明還有許多其他方面的影響。

首先是一個黑洞的一般存在性定理的證明，其定理如下：在一個適當定義的固定半徑的區域內，如果物質密度夠大，就會形成適當質量的黑洞。在此情形下所形成的黑洞，與物質密度有關。另一方面，由於重力本身即具有能量，因此不需要物質也可能產生黑洞。我進一步考察包圍這區域的曲面邊界的效應。

最近，克里斯托杜婁提出了另一種利用聚焦效應的機制——重力波的脈衝。包括于品在內的一些人，循此思路做了後續的研究。

環箍猜想

再來還有黑洞存在性的環箍猜想（hoop conjecture），它說的是，如果一個閉曲面的準局部質量相對於曲面「周長」夠大的話，則這個閉曲面將會塌陷成黑洞。黑洞的產生與消失會和潘洛斯的宇宙審查猜想緊密相關。這方面還需要更進一步的研究。

在潘洛斯思考宇宙審查猜想時，他設想了一個方法來給出反例。在此過程中，他發現對於漸近平坦時空，如果宇宙審查猜想是對的，則此孤立系統的總質量下界，將由黑洞事件視界面積的平方根乘以一個普適常數來決定。這個命題本身即饒有意趣。

為了研究這個猜想，葛洛克（Robert Geroch）提出了一種把事件視界移到無窮遠的流，稱為逆均曲率流（inverse mean curvature flow）。他發現在這個流上，一種稱為霍金質量的物理量是單調遞增的，而且當接近無窮遠時，霍金質量將變成系統的總質量，而在事件視界時，霍金質量則是面積平方根的某個固定倍數。於是透過這個流連結事件視界與無窮遠，就可以證明潘洛斯猜想。

還待證的問題是逆均曲率流的存在性。我建議休斯金（Gerhard Huisken）研究這個問題，他和伊爾曼尼（Tom Ilmanen）合作，在時空對某個類空截面是對時間對稱情況下，得到一個弱解。布瑞（Hubert Bray）根據相同的假設，提出了另一個證明，他沿襲的是孫理察－丘成桐的論證。不過布瑞的證明允許黑洞有許多連通分支。

完整潘洛斯猜想還沒得到完整的證明，儘管如此，這些成果仍對巴特尼克（Robert Bartnik）定義準局部質量的工作提供某種程度的支持。事實上，巴特尼克定義的極值度量（extremal metric）已證明存在，因此而且在某些特例下，巴特尼克質量是可以計算的。

結語

在探索古典廣義相對論的過程中，我們運用並發展出深刻的幾何和偏微分方程理論。另外如果將數值計算運用於相對論，在要理解極其複雜的現象例如黑洞碰撞時，並不如預期的有效，我們仍亟需理論的指引與幾何的推導。

至於量子重力理論，這是一個極活躍的領域，從中已經發展出來許多數學，特別是算子代數、表現論、複幾何的現代理論，不過目前的進展還遠稱不上完備。

可以想見，我們需要某種更適當版本的量子幾何學。一般相信，愛因斯坦、波多斯基（Boris Podolsky）、羅森（Nathan Rosen）三人關於量子纏結（quantum entanglement）的思想實驗，對於理解極短距離的幾何是有必要的。量子幾何學的最終面貌猶未可知，它的發展或許得再花上五十年的光陰。雖然前方充滿未知，但它必定是一段精采的旅程。∞

本文出處

2015 年 6 月 1 日，作者於加拿大費爾茲研究所的「黑洞國際會議」大會演講講辭。

譯者簡介

趙學信，網路工程師，專事翻譯、寫作

延伸閱讀

▶丘成桐、納迪斯《丘成桐談空間的內在形狀》，翁秉仁、趙學信譯（2012）遠流。可參看其中關於正質量猜想的說明。

▶關於黑洞，可閱讀霍金系列科普著作，《胡桃裡的宇宙》（葉李華譯）、《新時間簡史》、《圖解時間簡史》（以上兩書郭兆林與周念縈譯），三書皆為大塊出版。

▶ Thorne, Kip, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (1994). New York : W.W. Norton。在本書中作者有解釋環箍猜想。

❶「手術」是一個數學專有名詞，可以經由特定的切除與併接轉換流形的拓樸型態。例如將球面挖去兩的小圓盤，再接上一根圓柱面，就可以得一個環面（即輪胎面）。