# 二十世紀的數學

## 2000年世界數學年講詞

作者 阿提雅 Michael Atiyah
譯者 翁秉仁

**物理學在20世紀最後數十年對數學造成的重要影響，將成爲21世紀數學的主要研究課題。**

本文摘要

/ 豐饒的二十世紀數學比起前兩個世紀不遑多讓。阿提雅以清楚的主題式說明，闡述20世紀數學在研究內容與方法上都有長足的進步。

/ 阿提雅特別探究幾何與代數這兩根數學支柱的根源，討論兩者之間長久以來孰輕孰重的緊張關係，並提出「浮士德交易」之警語。

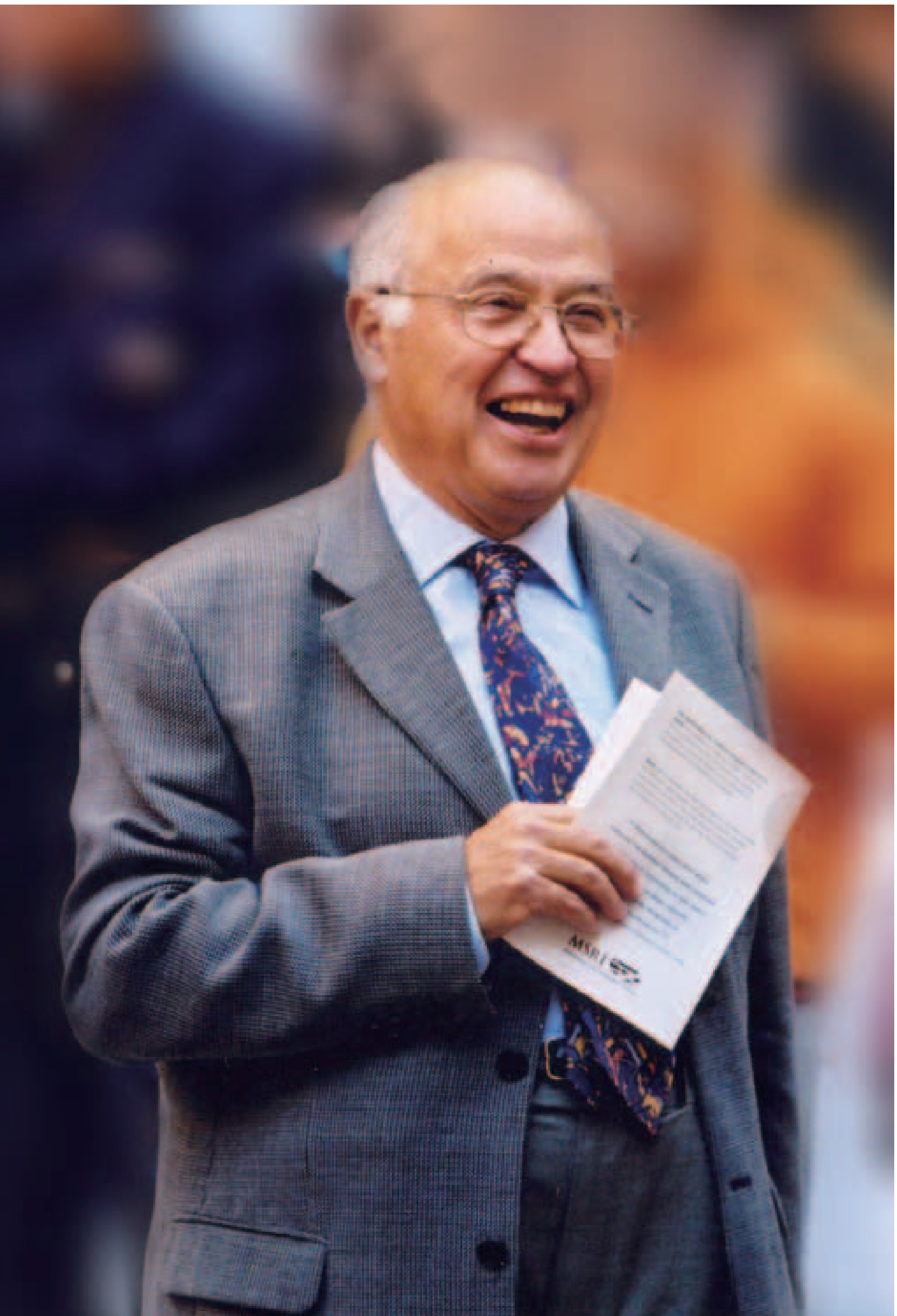
/ 阿提雅特別強調物理學在20世紀最後25年的重要角色，認為新世紀數學的走向之一是非線性無窮維的數學，並以量子場論與弦論做為引路人。

謝謝貴會邀請我來參加這個活動。當然，如果有人談論一個世紀的終結以及下個世紀的開始，他面臨兩個都很困難的選擇：一個是概述過去一百年的數學成就；另一個是預測未來一百年的數學發展。我決定選擇比較困難的任務。畢竟任何人都可以預測未來，反正屆時沒有人能夠在場論斷預言的對錯。然而對於過去的任何描述，卻是每個人都可以提出異議。

我能做的是提供我個人的觀點。當然這個演講不可能涵蓋所有內容，我尤其不準備討論某些重要的面向，這也許是因爲我不是這些方向的專家，也可能是因爲有人在別的地方討論過了。例如，我不打算討論邏輯與計算領域之際的著名成就，其中牽涉到希爾伯特（David Hilbert），哥德爾（Kurt Gödel），圖靈（Alan Turing）這些偉大的人物。除了基礎物理的應用之外，我也不打算討論數學的應用面，因爲它包括的範圍很多，又需要個別做特別的處理，每個領域都需要一堂自己的演講。不過，大家也許可以在這次會議中，聽到其他一些更詳細的演講。另外，光是列舉過去百年中的數學定理或甚至列出著名的數學家，也沒有什麼意義，那毋寧是枯燥的練習。所以，我將試著選出一些跨越諸多領域的重要主題，並強調這些主題的發展。

但首先，我有一個一般性的原則。「世紀」只是一個粗略的數目，大家當然不相信在一百年之後，有些事情會突然停頓再重新開始。所以當我描述20世紀的數學時，對日期不會那麼考究。如果有段故事開始於1890年代再進入20世紀，我將忽略這一類的細節。我會像個天文學家，只考慮近似的數字。事實上，有很多事情都是萌芽於19世紀，直到20世紀才開花結果。

做這項回顧的困難，是不容易把我們擺回到1900年時數學家的定位，因爲20世紀的數學有許多已經被我們的文化、我們自己所吸收。現



### 作者簡介

阿提雅長期任教於英國牛津與劍橋大學，現為愛丁堡大學榮譽教授；1966年費爾茲獎與2004年阿貝爾獎得主。他是往來於數學和物理學之間，思考最深入的數學家之一。

代人很難再去想像不用這些術語來思考的年代。事實上，就算現在有人做出眞正重要的數學發現，在當時也可能會被完全忽略！完全消失在背景之中。想要回到過去，我們就要試著想像在不同時代，人們用不同方式思考問題的景象。

## 從局部到大域

一開始，我準備列出一些主題並以它們爲中心來討論。第一個主題大概就是大家會說的，從局部到大域（global）的轉變。在古典時期，人們大致已經用局部坐標或其他工具研究了小尺度的現象。在20世紀，重點則轉移到試圖了解大域或大尺度的行爲。由於大域性質比較難理解，大多數得到的結果是定性的，因此拓樸概念就顯得非常重要。爲拓樸發展做出先驅貢獻，而且也預言拓樸將成爲20世紀數學重要元素的是龐卡赫（Henri Poincaré）。附帶一提，曾經提出一系列著名問題的希爾伯特卻沒能意識到這一點。在希爾伯特的問題中沒有拓樸的形跡，但是龐卡赫卻很清楚拓樸將扮演重要的角色。

我將列出一些領域，讓大家理解我的意思。例如，複分析（過去稱爲「函數論」）是19世紀數學的核心，是一些傑出數學家如懷爾斯查司（Karl Weierstrass）的研究成果。對他們來說，函數就是單一複變數的函數，對懷爾斯查司而言，函數甚至就是冪級數，是可以動手、寫下來，明確描述的東西；也可以說就是公式。在過去，函數就是公式，是很清楚的東西。但是接下來阿貝爾（Niels Abel）、黎曼（Georg Riemann）以及後續研究者，把我們帶上另一條路。函數的定義不再只是明確的公式，而更要囊括函數的大域性質，其中包括函數奇點（singularity）的分布、定義域的所在、取値的範圍。這些整體性質才構成函數獨到的特徵，而函數的局部展開則只是一種檢視函數的方式。

類似的故事也發生在微分方程中。最初，解微分方程就是要找明確的局部解，是可以寫下來、動手操作的東西。但隨著後來的發展，微分方程的解變成間接性的，不見得能用清楚的公式來描述。解的奇點才是眞正決定其大域性質的東西。這和複分析的情況，意義相近，只是細節不同。

在微分幾何中，高斯和其他數學家的古典研究所描述的是一小片曲面，包括小區域的曲率與描述局部幾何性質的局部方程。從局部轉往大尺度的研究很自然，因爲我們想瞭解曲面的整體圖像以及它的拓樸性質。從小尺度轉移到大尺度時，最具有意義的就是拓樸的特色。

儘管數論並不明顯適用於這個框架，卻也有類似的發展。數論學家所區分的「局部理論」是討論單一質數、逐次考慮一質數、或有限個質數的情況。而「大域理論」則是一次同時討論全部的質數。這種質數和點之間、局部和大域之間的類比，對數論的發展有重要的影響，拓樸學發展的概念也對數論造成衝擊。

在物理學中，古典物理所關注的當然是局部的理論，試著寫下描述小尺度行爲的微分方程，但隨後就必須研究物理系統的大尺度行爲。所有物理學眞正關心的都是如何從小範圍、從你清楚理解的地方開始，預測出未來在大尺度的行爲並得到結論。

## 維度的增加

第二個主題有點不同，我稱之爲維度（dimension）的增加。我們再次從古典的複變理論開始，古典複變函數論主要是仔細討論單一複變數的情況，研究得相當細密。基本上到了20世紀，才推廣到兩個或甚至更多變數的情況，並在其中發現新現象。多變數和單變數的理論並不完全一樣，出現了嶄新的特色。現在 $n$ 個變數的研究愈來愈佔優勢，這是20世紀最成功的故事之一。

從前的微分幾何學家研究的主要是曲線和曲面，但我們現在研究的是 $n$ 維流形（manifold）的幾何性質。大家必須用心想想，才能領會到這是一項卓越的轉變。在過去，曲線和曲面是空間中眞正能看見的東西。而更高的維度總帶有一點虛構的成分，人們或許可以透過數學去想像，但大概不會當眞。認眞看待

高維空間，並且花同等心思去研究的想法，實質上是20世紀的產物。同樣的，對19世紀的先行者來說，也幾乎沒有明顯的理由要增加函數的數目，從單一函數改成研究多個函數或向量值函數。所以在20世紀，獨立和非獨立變數的個數也都增加了。

線性代數當然總是涉及多個變數，但它維度的增加幅度更大，因爲它是從有限維增加到無窮維，從線性空間推廣到有無窮變數的希爾伯特空間，其中當然涉及了分析學。在多變數的函數之後，現在又有了函數的函數，或稱泛函（functional）。這些是函數空間上的函數，基本上都具有無窮多個變數，這也就是所謂的變分學（calculus of variation）。類似的情形發生在一般（非線性）函數的情況。這個課題雖然古老，但直到20世紀才眞正取得傑出的成就。以上就是我的第二個主題。

## 從交換到非交換

第三個主題是從交換到非交換的轉變。這可能是20世紀數學（尤其是代數學）最大的特色之一。代數非交換的面向表現得非常顯著，當然它的根源可以上溯到19世紀，而且有好幾個不同的起源：漢米爾頓（Willaim Hamilton）的四元數研究可能是其中最令人讚嘆的成就，並有著重要的影響，他的研究事實上受到物理問題的啓發；還有格拉斯曼（Hermann Grassmann）在外代數（exterior algebra）方面的工作，這個代數系統現在已經融入微分形式（differential form）的理論。當然，凱里（Arthur Cayley）以線性代數爲基礎的矩陣研究，以及迦羅瓦（Évariste Galois）的群論研究也都很傑出。

這些不同的方法和面向構成了將非交換乘法引入代數學的基礎，並形成20世紀代數工具中我所謂的柴米油鹽。現在看起來或許不值一提，但在19世紀，以上所有的例子都是各自不同領域中的重大突破。當然，後來這些概念被令人意外的用到不同的方向，矩陣和非交換乘法在物理中和量子論一起出現，海森堡（Werner Heisenberg）的對易關係（commutation relation）是非交換代數在物理中最重要的應用範例，後來更被馮諾曼（John von Neumann）推廣到他的算子代數論。

群論也是20世紀的支配性理論，我稍後再談。

## 從線性到非線性

我的下一個主題是從線性到非線性的轉換。大部分古典數學基本上是線性的，就算不是完全線性，至少也是透過某種擾動的展開來研究，因此是接近線性的。眞正的非線性現象要困難得多，只有到了20世紀才能進行相當程度的嚴謹研究。

故事從幾何學開始：歐氏幾何、平面的幾何、空間的幾何、直線的幾何，一切都是線性的。然後經過不同階段的非歐幾何，才到達黎曼更一般的幾何學，其中討論的對象基本上都是非線性的。

在微分方程中，關於非線性現象的嚴格研究，已經掀開了各式各樣古典研究沒見過的新現象。在這裡我只舉兩個例子：孤立子（soliton）和混沌（chaos），這是微分方程理論中兩個非常不同的面向，在20世紀已經成爲極重要又流行的研究主題。它們分別代表很不同的極端，孤立子代表非線性微分方程中令人意外的組織性現象，而混沌則代表出乎意料的無組織現象。兩者出現在不同的領域，都很有趣又重要，而且基本上都是非線性現象。我們一樣可追溯孤立子研究的早期歷史到19世紀末，但很零星。

在物理學裡，電磁學的基本方程馬克士威方程當然是線性偏微分方程。與之對應的是著名的楊/米爾斯方程（Yang-Mills equation），這個方程被認爲是描述物質結構作用力的非線性方程。楊/米爾斯方程之所以是非線性的，是因爲它本質上是馬克士威方程的矩陣版本，而矩陣乘法不可交換的事實正是微分方程中出現非線性項的原因。所以這裡可以見到非線性與非交換之間的有趣關聯。非交換性的確產生某種特殊的非線性性質，這非常有趣，也很重要。

## 幾何與代數

以上我選擇了一些具有一般性的主題，但我現在想討論數學的一種二分法，這個二分法與我們長相左右、來回擺盪，這也讓我有機會做一點哲學性的思辨或評述。我所要談的就是幾何和代數的二分法。幾何和代數是數學兩根正式的支柱，兩者都有悠久的歷史。幾何可以溯源到古希臘文明甚至更早以前，代數則出自古阿拉伯和古印度文明。所以兩者對數學都很基本，但它們之間卻有種令人不安的關係。

讓我先從歷史講起。歐氏幾何是數學理論的主要典例，它是純幾何的理論，直到笛卡兒（René Descartes）引入現在稱爲笛卡兒平面的代數座標。笛卡兒嘗試將幾何式的思考化約成代數的運算，這當然是代數學家對幾何的一個重大突破或重大衝擊。如果在分析學中比較牛頓和萊布尼茲（Gottfried Leibniz）的研究，會發現他們隸屬不同的傳統，基本上牛頓是幾何學家，而萊布尼茲則是代數學家，這其中有著確實又深刻的原因。就牛頓而言，幾何或者他所發展的微積分，是用數學來描述大自然法則的嘗試。他關心的是廣義的物理，而物理則是從幾何的世界中產生的。如果你想了解萬物運行的道理，就要從物理世界的觀點來思考，以幾何圖像的方式來思考。當牛頓發展微積分時，他想建立的形式是要盡可能貼近背後的物理脈絡，所以他採用了幾何的論證，因爲這樣才能與眞實的意義寸步不離。另一方面，萊布尼茲則有一個目標，一個企圖遠大的目標，他想要將整個數學形式化，變成龐大的代數機器，這與牛頓的理路悖然相反，並且兩人還使用了極爲不同的數學符號。眾所周知，在牛頓和萊布尼茲這場大論戰裡，萊布尼茲的符號贏得最後的勝利，我們現在寫偏導數時使用的是他的符號。但是牛頓的精神依然存在，只是被埋藏了很長的時間。

到了100多年前的19世紀末，出現了龐卡赫和希爾伯特這兩位重要數學家，我前面曾經提過他們。大概來說，他們各自可以算是牛頓和萊布尼茲的使徒。龐卡赫的思想比較接近幾何和拓樸的思考方式，並以這些想法做爲他的根本洞察。希爾伯特則比較算是形式主義者，他想做的是將數學公設化、形式化，並給出嚴格與形式的呈現方式。他們兩人很顯然分屬不同的傳統，雖然偉大的數學家並不能輕易歸類。

在準備這個演講時，我覺得我應該也要舉出一些能夠承繼這兩個傳統的當代數學家。討論還活著的人非常不容易，名單上該放誰呢？我後來自忖，又有誰會介意自己被擺在這份著名數學家名單的哪一側呢？於是我選了兩個名字：阿諾德（Vladmir Arnold）是龐卡赫/牛頓傳統的繼承人*；布巴基（Bourbaki）我認爲是希爾伯特最著名的傳人。阿諾德毫無隱諱的坦言，他的力學與物理的觀點基本上是幾何的，可以歸源於牛頓。他認爲介於這二者之間的想法都是錯誤的，只有少數人如黎曼（他只是有點偏離）是例外。布巴基試著繼續希爾伯特的形式化綱領，將數學的公設化和形式化推廣到引人注目的程度，並獲得部分的成功。兩種看法各有優點，但兩者之間存在著一種張力。

關於幾何和代數的差異，讓我試著解釋我自己的觀點。幾何學討論的當然是空間，這點無庸置疑。當我看向這個講堂裡的聽眾，我一下就可以看到很多人，在一秒或一微秒內接收到很多資訊，當然這絕非偶然。人類大腦的構造相當著重於視覺，我從研究神經生理學的朋友知道，視覺大致佔用了80%或90%的大腦皮層。腦中大概有17個中樞，專門負責處理不同的視覺過程，有的與垂直有關，有的是平行，有的是色彩或透視等，最後有的則處理意義和解釋。理解並感知可見世界是人類演化極爲重要的一環，所以空間直覺或空間知覺是威力宏大的工具，這也正是幾何學爲何成爲數學重要分支的原因，它不只能運用於顯然具有幾何特性的東西，甚至對並非如此的東西也有用，我們可以試著爲它賦予幾何形式，如此一來就能運用我們的直覺。直覺是我們最有力的武器，當你試著向學生或同事講解一段數學時就很明顯，你

*阿諾德已於2010年六月過世。

的論證既長又難，但是當學生最後明白時，他會怎麼說？他說：「我看到了（I see，我懂了）！」這裡「看」與「理解」是同義詞，另外我們也用「知覺」（perception）這個詞同時表達這兩種意思，至少在英語裡是這樣的，把這個現象和其他語言相比應該很有趣。我認爲心靈演化出這麼龐大的能力，以瞬間的視覺作用吸收大量的資訊，這是非常根本的能力。數學不但善用它，還讓它更完美。

另一方面（也許有些人從未如此想過），代數在本質上所涉及的是時間。無論我們做的是哪一種代數，系列的運算都需要一步步執行，而「一步步」正表示我們必須先要有時間。在靜態的宇宙裡，人們無法想像出代數，而幾何基本上卻是靜態的。我坐在這裡看，不需要什麼變化，仍然可以繼續看。然而，代數涉及的是時間，我們的運算必須依序執行。這裡我所謂的「代數」，並不只是現代的代數學。任何演算法或計算過程，都是一連串一步步執行的步驟，現代電腦的構造清楚顯示這一點，它輸入一系列0和1的資訊，然後給出答案。

代數關注的是在**時間**中操作，而幾何關注的是**空間**。這是世界兩個互相垂直的向度，也代表數學兩種不同的觀點。因此以前數學家爲了代數和幾何孰輕孰重的爭論或對話，代表某種非常非常根本的思考。

當然，把這個問題想成誰輸誰贏的爭論並不值得。我喜歡用一種類比的方式來思考這個問題，問人：「你想成爲代數學家還是幾何學家？」就像是問人：「你想當聾子還是瞎子？」。人的眼睛瞎了，就看不到空間；人的耳朵聾了，就無法聽，而聽覺是在時間之中產生的。通常我們寧可二者都要。

在物理學中也有一個關於物理概念與實驗的類似（大致平行的）劃分。物理學有兩個部分：理論（包括概念、想法、字詞、定律）與實驗機制。我認爲概念廣義來說是幾何的，因爲概念關注的是發生於眞實世界的事物。另一方面，實驗則更像是代數計算：我們在時間中做事，測量數據，將數據代入公式等等，但是實驗背後的基本概念是幾何傳統的一部分。

如果將上述的二分法用更哲學或文學的架構來描述，那代數對幾何學家來說，就好像「浮士德的交易」。大家都知道在歌德的故事裡，透過魔鬼的交易，浮士德只要出賣他的靈魂，就可以得到他想要的任何東西（浮士德想要的是一位美女的愛）。代數就是魔鬼提供給數學家的交易。魔鬼說：「我給你這部威力十足的機器，它能夠回答你的任何問題。你只需要把靈魂給我，放棄幾何，就可以坐享這部美好的機器。」（今日你可以把這部機器想成電腦。）當然我們兩者都想要，也許我們可以騙過魔鬼，假裝出賣自己的靈魂，卻沒眞的拋棄掉。不過這部機器對靈魂的威脅依然存在，因爲當你進入代數的計算模式時，基本上就會停止思考，停止以幾何的方式思考，停止思考其意義。

我以上的說法對代數學家是重了一點，但是基本上，代數的目標總是要得到一個公式，人們把東西擺進這部機器，拉一下把手，就可以得到答案。你拿著本來有意義的事物，把它轉換成公式，然後取得解答。在這個過程中，你不需要再去思考代數計算在不同階段的幾何對應意義。就這樣我們失去了洞察力，這本來在不同的階段可能很重要。我們絕不能完全放棄洞察力！你以後也許還會需要它。這就是我所謂浮士德交易的意思，我確定這種說法很挑釁。

這種在幾何和代數之間的選擇，導致某種模糊兩者的混同產物，使得代數和幾何的區隔，並不像我剛剛談論的那麼直接和天眞。例如，代數學家們經常使用圖式（diagram）。運用圖式，不就是承認了幾何直覺嗎？

## 通用的技術

讓我們回來談一些不再以內容劃分的主題，或許該談的是以技術和常用方法來區分的主題，我希望描述一些廣泛應用到眾多領域的常用方法。

## 同調論

在傳統上，同調論（homology theory）是做爲拓樸學的分支發展起來的。它所關注的是底下的情況：給定一個複雜的拓樸空間，我們希望從中抽取出一些簡單的資訊，像是計數它的洞或類似的東西，進而得到與這個複雜空間有關的線性可加不變量。如果你喜歡的話，可以想成這是一種從非線性情境得到線性不變量的構造方式。從幾何的角度，你讓閉鏈可加可減，就可以得到該空間的同調群。同調論是一項發明於20世紀上半葉的基本代數工具，用來取得拓樸空間資訊，是從幾何中萃取代數的理論。

同調概念也出現在其他的數學脈絡。另一個來源可以追溯到希爾伯特與多項式的研究。多項式是非線性函數，彼此相乘就會得到更高次的多項式。由於希爾伯特的偉大洞察力讓他開始思考「理想」（ideal）的概念，這表示一些具有公共零點的多項式的線性組合。他想要找的是理想的生成元（generator），但有些生成元可能是多餘的，因此他檢視生成元彼此之間的關係，以及關係與關係之間的關係，於是他得到一系列涉及這些關係的階層，後來被稱爲「希爾伯特關係鏈」(Hilbert syzygies)。希爾伯特的理論非常精密，他試著將多項式這類非線性的情境化約到線性的情境。基本上，希爾伯特建立的是線性關係的複雜系統，其中包含了非線性物件（也就是多項式）的部分資訊。

這個代數理論與前述的拓樸理論實際上是平行的，而且已經融合成所謂的「同調代數」（homological algebra）。在代數幾何裡，1950年代最偉大的成就之一就是發展了層（sheaf）的上同調理論，並推廣到解析性的幾何，這些是法國學派如勒黑（Jean Leray），昂利・卡當（Henry Cartan），塞爾（Jean-Pierre Serre）和格羅騰迪克（Alexandre Grothendieck）的成就，結合了黎曼/龐卡赫的拓樸觀與希爾伯特的代數觀，另外再加入一些分析。

結果，同調論在代數的其它分支還有更廣泛的應用。你可以適當引入同調群的概念，只要記得它總是從非線性物件所對應的線性物件。例如選取一個群（如有限群）或李代數，這兩者都有相應的同調群。而在數論上，透過迦羅瓦群，同調論也有非常重要的應用。結果同調論在分析一整批數學情境時，成爲強而有力的工具，這正是20世紀數學的典型特色。

## K理論

另外有一種方法在很多方面都與同調論類似，應用廣泛並滲透到許多數學分支。只是它發展得比較晚，直到20世紀中期才出現，儘管它也有更早的根源。我說的就是所謂的「K理論」，它實際上和表現論（representation theory）有緊密的關係。例如有限群的表現論可以上溯到19世紀，但是其現代形式K理論則發源較晚。K理論也可以當做是處理矩陣論的想法，矩陣的乘法是不可交換的，但K理論試圖構造出可交換或線性的矩陣不變量。例如跡、維度以及行列式都是矩陣論的可交換不變量，而K理論則是試圖處理這類不變量的系統方法，有時也稱爲「穩定線性代數」（stable linear algebra）。K理論的想法是，如果考慮階數夠大的矩陣，那麼本來不能交換的矩陣A和B，因爲可以擺在互相正交的不同區塊而變成交換，這是因爲維度夠高、空間夠大，我們有餘裕任意移動它們。從近似的觀點，你或許認爲這已經足以提供一些資訊。就技術面來說，這就是K理論的基礎。K理論和同調論類似，因爲兩者都是從複雜的非線性情境萃取線性的資訊。

在代數幾何，K理論是由格羅騰迪克所首先引介，並獲得令人矚目的成功，這與剛剛談到層理論時的故事密切相關，並且也和格羅騰迪克在黎曼/羅赫定理的研究有關。

在拓樸學方面，賀茨布魯赫（Friedrich Hirzebruch）和我複製了這些想法，並應用到純粹的拓樸脈絡中。在某種意義下，如果說格羅騰迪克的研究與希爾伯特關係鏈有關，那我們的成果就更接近黎曼/龐卡赫式的同調研究，其中連續函數取代

了多項式的地位。K理論也在橢圓算子的指標理論（index theory of elliptic operator）和線性分析中扮演一定的角色。

另一個不同的方向是K理論的代數面向，由米爾諾（John Milnor）、奎倫（Daniel Quillen）和其他人所發展，它可能有數論的應用。在這個方向，它已經促成許多有趣的問題。

在泛函分析方面，包括卡斯帕洛夫（Gennadi Kasparov）在內的許多數學家已經將連續的K理論推廣到非交換的 $C^*$ 代數。我們知道一個空間的所有連續函數在函數乘積之下會構成一個交換代數，但在其他情形則會產生非交換的類似產物。對於這類問題，泛函分析提供了非常自然的討論背景。

因此，K理論是另一個能夠讓數學大量不同分支運用的簡單形式架構。但是在不同領域，這些嘗試會各自面臨該領域專屬的技術性難題，這又會再連結到此領域的其他理論。因此K理論不是一致的工具，反而更像一致的框架，不同領域彼此可作類比並具有相似性。這理論的大部分已經被孔因（Alain Connes）推廣到所謂的「非交換微分幾何」（non-commutative differential geometry）。

非常有趣的是，最近韋頓（Edward Witten）藉由他在弦論（基礎物理學的最新理論）的研究，已經發現一些有趣的方法，讓K理論成為討論所謂「守恆量」（conserved quantity）的自然棲所。雖然過去大家曾經以為同調論才是自然的框架，但是現在K理論似乎提供了更好的答案。

## 李群

另一個不僅只是技術工具的統一性概念是李群（Lie Group）。所謂李群基本上就是正交群（orthogonal group）、酉群（unitary group）、辛群（symplectic group）以及一些例外群，它們在20世紀數學史裡扮演了重要的角色。李群的想法也發源於19世紀，李（Sophus Lie）是19世紀的挪威數學家。李、克萊恩（Fleix Klein）以及其他人一起推動當時所謂的「連續群理論」。起初對克萊恩而言，這是試圖統一不同幾何的方式，其中包括歐氏幾何和多種非歐幾何。雖然這個課題萌芽於19世紀，卻要到20世紀才真正起飛。李群理論深刻支配20世紀，因為它是研究許多不同問題的統一框架。

我剛剛提到克萊恩觀點在幾何的角色。對於克萊恩，幾何空間是某種均勻的齊性空間（homogeneous space），其中物體可以任意移動而不扭曲形狀，因此這個全等特性是由它相應的等距群（isometry group）來決定的。例如由歐氏群得出歐氏幾何，而雙曲幾何則來自另一個李群。於是每一齊性幾何空間都各自對應到不同的李群。但是後來，大家跟隨黎曼的幾何研究觀點，更關心非齊性的幾何空間，其中曲率會隨位置而改變，空間也不再有大域的對稱性。縱然如此，李群仍然扮演重要的角色，這是因為切空間使用的是歐氏座標，於是李群會因此出現在無窮小的層級上。所以從無窮小的角度，在每一點的切空間上李群再度現身，只是因為我們需要比較空間上的不同點，因此必須用某種方式去移動物件才能處理不同點的李群。結果這個理論由埃里・卡當（Élie Cartan）實質發展完成，並成為現代微分幾何的基礎，它也是愛因斯坦相對論的基本框架。當然愛因斯坦的理論大力的推動了微分幾何全面性的發展。

進入20世紀，我前面提到的大域觀點，涉及了大域層次的李群和微分幾何。其中一項重要發展可以用伯瑞爾（Armand Borel）和賀茨布魯赫的研究來刻畫，他們給出了所謂「特徵類」（characteristic class）的資訊。特徵類是一種拓樸不變量，結合了三個關鍵的領域：李群、微分幾何和拓樸。

在更分析學的方向上，我們得到現在稱為非交換調和分析（harmonic analysis）的理論。這是傅立葉理論的推廣。基本上，傅立葉級數或傅立葉積分對應的是圓和直線上的交換李群，如果用更複雜的李群取代，就會得到一個非常漂亮又精巧的理論，結合了李群表現論和分析學。這基本上是黑利希錢卓

（Harish-Chandra）的終身研究方向。

在數論，整個所謂的「朗蘭茲綱領」（Langlands program）發生於李群理論中，也緊密聯繫到黑利希錢卓的理論。針對每一李群，各有相應的數論和朗蘭茲綱領，有些在某種程度上已經完成了。在20世紀的下半葉，朗蘭茲綱領深深影響了代數數論的大部分研究。模形式（modular form）的研究就是這段故事的良好例證，其中包括了懷爾斯（Andrew Wiles）在費馬最後定理的研究。

也許有人認爲李群需要考慮連續變化，因此只在幾何脈絡中才特別重要。但是有限體上的李群類比會得到有限群，而且大多數有限群都可以透過這種方式來得到。因此李群理論的一部分技巧，甚至可以用到有限體或局部體這些離散的情況中。在這方面有許多純代數性的工作，例如那些與盧茨提格（George Lusztig）名字連結的工作，他們研究的是有限群的表現論，而前面我提過的許多技巧，在這裡都可以找到對應。

## 有限群

以上的討論正好把我們帶到有限群，這也提醒我得好好承認有限單群（simple group）分類是一項有價值的研究。好幾年前，就在有限單群的故事將要結束時，我曾經接受採訪，他們徵詢我的看法。我當時冒然地回答說，我不認爲這件事有多重要。我的理由是因爲有限單群的分類結果，告訴我們大多數的單群都是已知的，只有一些少數的例外。就某種意義來說，這只是一個研究領域的結束，並沒有開展出什麼新問題。而我對於將結束而非新開始的事情並不怎麼興奮。當然了，許多我在這個領域工作的朋友聽到後，都感到非常非常生氣。從此以後，我就必須經常穿著防彈衣了。

但這項研究有一個可取之處。我當時的確曾指出，在這些所謂「零散群」（sporadic groups）的名單中，最大的群被稱爲「怪物群」（Monster）。我認爲只有發現怪物群這件事是這個分類研究最令人興奮的結果。怪物群是一個非常有趣的傢伙，大家還在理解它當中。怪物群與其他數學領域的許多分支有著令人意外的關聯，像是橢圓模函數，甚至理論物理與量子場論。這是分類研究的有趣副產品。分類研究本身正如我說過的，關閉了一扇門，但是怪物群又開啓了另一扇門。

## 物理的衝擊

現在讓我進入另一個主題，談談物理對數學的衝擊。物理與數學之間的悠久連結遍及整個歷史，大部分的數學如微積分是爲了解決物理問題而發展的。但是到了20世紀中期，這份關聯似乎變得不太明顯，因爲大部分的純數學不依靠物理也發展得非常好。但是到了最後25年，事情有了戲劇性的變化，讓我試著簡短回顧物理和數學之間的互動，尤其是幾何學。

19世紀，漢米爾頓發展古典力學，引入現在稱爲漢米爾頓系統（Hamiltonian formalism）的理論。從古典力學可以導出目前所謂的「辛幾何」（symplectic geometry）。這是幾何學的一個分支，雖然早該有人討論了，卻到近二十年才獲得嚴謹的研究，結果造就了一個非常豐富的幾何領域。按我使用的說法，幾何學有三個分支：黎曼幾何、複幾何、辛幾何，分別對應到三類李群。辛幾何是其中最年輕的領域，在某種意義下或許最有趣，而且當然也與物理有極爲密切的關係，這是因爲辛幾何的歷史根源與漢米爾頓力學有關，而近年更連結到量子力學。

還有我前面提過的馬克士威方程，它是電磁學的基本線性方程，也啓發了赫吉（William Hodge）在調和形式（harmonic form）的研究和代數幾何的應用。這是一個非常豐饒的理論，支撐著許多1930年代以來的幾何研究。。

我已經提過廣義相對論和愛因斯坦的研究。另外，量子力學當然也提供大量的輸入給數學。這不僅表現在對易關係上，而且更有意義的是強調了希爾伯特空間和譜論（spectral theory）。

基於更具體和明顯的方式，古典形式的結晶學關

心的是晶體結構的對稱性，繞點變換的有限對稱群成爲第一個被研究的群，就是因爲結晶學的應用。在20世紀裡，群論比較深刻的應用則和物理學有關。目前被假設構成物質的基本粒子，在最小的層次上具有隱藏的對稱性並牽涉到某些李群，雖然這些我們看不見，但是在研究粒子的實際行爲時，這些對稱性就會顯現出來。所以在你提出的粒子模型裡，對稱性必須是基本的要素。而目前流行的各種理論中，都包括某些基本李群如 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 做爲最根本的對稱群。因此這些李群就像是構成物質的基石。

另外，在物理學中並不只會用到緊緻（compact）李群，有些非緊緻李群如勞倫茲群（Lorentz group）也會出現。事實上，是物理學家先開始研究非緊緻李群表現論的，這類表現必須用到希爾伯特空間。因爲雖然緊緻李群的不可約表現（irreducible representation）都是有限維的，但非緊緻李群卻需要無窮維的表現空間，這也是物理學家先認識到的。

## 量子場論的影響

20世紀我們剛過完的最後25年裡，已經有大量的新想法從物理學注入數學，這也許是整個世紀最引人注目的故事，可能需要另一個完整的演講才夠。不過基本上，運用量子場論和弦論，已經在數學許多領域得到非常卓越的新結果、新概念和新技術。我的意思是說，物理學家基於對物理理論的了解，已經能夠預言某些數學的眞確敘述。當然，這些不是嚴格的證明，但是卻獲得非常多而有力的直覺、特例和類比的支持。這些物理學家的預測有一些已經被數學家檢驗，發現大致上是正確的，儘管證明十分困難，其中有很多還沒有完全證明。

過去25年裡，在這個方向上數學已經獲得大量的輸入，而且這些結果有很詳細的細節。物理學家絕不只是說：「這樣子的結果應該是正確的。」他們說的是：「這是明確的公式，這是前面十項（其中涉及超過12位數的數）」。他們所給出的是複雜問題的精確答案，這些不是能隨便猜出來的，而是需要有工具才算得出來的。量子場論提供了非凡的工具，雖然很難從數學來理解，但在應用上卻有著令人意外的回報。這是近25年眞正令人興奮的故事。讓我列出一些重要的成果：多納森（Simon Dona1dson）四維流形的工作、瓊斯（Vaughan Jones）的結不變量、鏡對稱（mirror symmetry）、量子群（quantum group），再加上我剛才提到的怪物群。

這個主題的眞正意義是什麼呢？正如我先前提到的，20世紀數學見到了維度的提高，最後到達無窮維。但物理學家所做的遠超過這些。在量子場論裡，他們眞的是要對無窮維空間進行深度的詳細探究，他們所處理的無窮維空間是各式各樣的典型函數空間，結構十分複雜，箇中原因不只是因爲維度無窮，而是因爲它們也具有複雜的代數、幾何與拓樸結構，而且還牽涉到很大的李群——無窮維李群。因此，正如大部分20世紀數學所關注的，是有限維李群和有限維流形上的幾何、拓樸、代數與分析性質，而前述這部分物理學則關注於處理其無窮維的類比。當然，這是非常不一樣的故事，卻有許多回饋。

底下讓我解釋得更詳細一點。量子場論發生於空間和時間之中。空間原則上是三維的。但某些簡化的模型先只考慮空間是一維的情形。在一維空間和一維時間裡，物理學家要處理的典型對象，如果用數學語言來描述，就是圓的微分同胚群，或者由圓到緊緻李群的可微映射所構成的群。當考慮這種維度類型的量子場論時，這是兩個非常基本的無窮維李群的範例。它們是很合理的數學對象，而且數學家已經研究一段時間了。

在這種1＋1維的理論裡，可以將時空取成黎曼面並得到很多新結果。例如，研究給定虧格的黎曼面模空間（moduli space），是一個起源於19世紀的古典主題。而量子場論可以導出這些模空間的上同調結構的新結果。另一個很類似的模空間，是虧格 $g$ 黎曼面上的平坦 $G$ 叢（flat $G$-bundle）所構成的模空間。這些空間非常有意思，而量子場論可以給出精確

的結果。尤其是他們得到了體積的漂亮公式，其中牽涉到ζ函數的值。

另一個應用與曲線的計數有關。考慮給定次數和類型的平面代數曲線，你想知道例如有多少曲線會經過某些給定的點，這是代數幾何裡的枚舉問題（enumerative problem），是19世紀的古典問題，而且非常困難。但現在它們已經被所謂的「量子上同調」（quantum cohomology）這種現代工具給解決了，這正是量子場論故事的其中一部份。或者我們還可以探討更困難的問題，討論那些不在平面而是在彎曲解形（variety）上的曲線，結果最後得到的是另一個具有清楚結果的美妙理論，稱爲鏡對稱。所有這些結果都來自1＋1維的量子場論。

如果提高一個空間維度，就是二維空間和一維時間的量子場論，由此可以得到瓊斯的結不變量，物理學家已經用量子場論的術語，爲這個不變量理論給出優雅的解釋或闡述。

這個維度的另一個結果是所謂的「量子群」。目前量子群最好的部分是它的名稱。量子群絕對不是群！如果要回答量子群的定義，我大概還需要另外半個鐘頭說明才夠。量子群很複雜，但無疑與量子論有深厚的關係。它們雖然源自物理學，但目前正由當行的代數學家實際應用到確切的數學計算上。

如果再將維度提高，回到完整的四維理論（3＋1維），這就是多納森四維流形理論的立身之處，也是量子場論產生重大影響的地方。尤其是它讓賽伯格（Nathan Seiberg）和韋頓建立了他們的替代理論，雖然是基於物理直覺，卻獲得許多不可思議的數學結果。這裡只是一些例子，其實還有更多。

接下來是弦論，但這已經過時了！現在大家談的是M理論，這是一個很豐富的理論，其中包括了大量的數學面向。我們從中得到的結果尚待消化，足夠讓數學家在未來忙碌很長的時間。

## 歷史的總結

讓我很快的做個總結，簡單回顧歷史，數學究竟有哪些成就呢？我很隨性的把18世紀和19世紀放在一起，或許可以稱之爲古典數學的時代，這是歐拉和高斯的時代，在這段期間，數學家完成並發展了所有偉大的古典數學。有人也許認爲數學似乎就此終結了，但是恰恰相反，事實上20世紀的數學成就非常豐碩，也就是我以上談到的內容。

20世紀大致可以區分爲兩半。我認爲20世紀上半葉佔優勢的是我所謂的「分殊時代」，這是希爾伯特理路當道的時代，大家試著將東西形式化，仔細地定義，然後讓每個領域盡情開展。我說過布巴基的名字和這種趨勢相連結，人們關心的是從給定時期的特殊代數或在其他系統內可以得到哪些結果。20世紀下半葉則更像我所謂的「統一時代」，在這段期間，領域的邊界被跨越，技術從一個領域轉用到另一個領域，東西相當程度的混種化了。我想這樣說也許太過簡化，但我認爲這的確簡單綜述了20世紀數學的某些面向。

那21世紀呢？我曾經說過21世紀或許是量子數學的時代，或者你喜歡的話，是無窮維數學的時代。這是什麼意思呢？如果做得到的話，量子數學可能意味著「恰當理解各種非線性函數空間上的分析、幾何、拓樸和代數性質。」這裡的「恰當理解」指的是，能爲物理學家想像的那些美麗事物，給出相當嚴格的證明。

有人會說，用天眞的方式處理無窮維空間，提出幼稚的問題，通常只會得到錯誤或無聊的答案。但是物理學的應用、洞察和動機，讓物理學家能夠問出關於無窮維的高明問題，並且用很微妙的方法**眞的**得出合情合理的答案，因此以這種方法研究無窮維分析絕非簡單的工作。你得沿著正確的道路走向目的地才行。我們已經有很多線索，地圖也已經展開。這些是我們該從事的課題，只是路途還很遙遠。

21世紀還有什麼呢？我想強調孔因的非交換微分幾何。孔因建立了一個相當華麗的統一理論，它也結合了一切，結合了分析、代數、幾何、拓樸、物理、數論，所有這些都對這個理論有所貢獻。這個框

架讓我們在非交換分析的脈絡裡，可以研究一些通常微分幾何學家所考慮的主題，包括幾何與拓樸的關係。研究這個理論十分值得，因爲它在數論、幾何、離散群等等領域以及物理中都有（潛在或其他的）應用，其中有一個與物理的有趣關聯才剛剛完成。當然這個理論能走多遠，能有什麼斬獲，都尚待觀察。但至少在21世紀前十年，這個理論是我真的期望能夠有重要發展的課題，而且它可能與有待發展的（嚴格）量子場論有關。

另一個方向，則是所謂的「算術幾何」（arithmetic geometry）或亞拉科洛夫幾何（Arakelov geometry），它試圖盡可能的統一代數幾何和一部分的數論。這是非常成功的理論，它有很好的開始，但路還很長。誰知道結果會如何？

當然，所有以上的方向都有共同的特質。我期望物理的影響能夠盡量散播出去，甚至是數論。不過懷爾斯不同意我的看法，唯有時間能說明一切。

這些是我可以預見將在下個十年出現的方向，但是其中還有一張像鬼牌般難以預料的因素：降低維度到低維幾何的問題。在與前述所有無窮維的華麗事物並列時，低維幾何顯得有點寒傖。但從許多角度來看，我們或我們祖先最開始所認識的維度，仍留下一些謎團。所謂「低維」指的是維度二、三、四的情況。例如瑟斯頓（William Thurston）的三維幾何研究是希望爲三維流形給出幾何分類，這比二維理論艱深得多。瑟斯頓綱領離完成還很遠，完成它當然是一個重大挑戰*。

在三維幾何中，另一個值得注意的主題是瓊斯的研究，他的想法基本上也源自物理。瓊斯的結果提供更多三維幾何的資訊，而且這些幾乎完全與瑟斯頓綱領所包含的訊息無關。如何將這個故事的兩面結合在一起，仍然是極大的挑戰，但最近有些結果暗示兩者可能有關。因此整個低維幾何的領域也都和物理有所關聯，只是箇中實情仍然很隱祕。

最後，我應該提一下在物理學中很顯著的「對偶性」（duality）。大致來說，這些對偶性產生於一個量子理論有兩種古典理論的實現。一個簡單的例子是古典力學中位置和動量的對偶性。這種由對偶空間取代原空間的對偶性轉換，在線性理論中就是傅立葉變換。但是在非線性理論裡，如何找到傅立葉變換的替代品是個重大的挑戰。大部分數學所關注的就是如何在非線性情境中推廣對偶性。在弦論和M理論裡，物理學家似乎已經能以一種卓越的方式找到對偶性，他們製造出一個個具有不可思議對偶性的例子，在廣義的解釋下，這些都是傅立葉變換在無窮維非線性的版本，並且看起來很成功。理解這些非線性的對偶性似乎也將是21世紀的巨大挑戰。

我想我就談到這裡。數學的工作還有很多，能讓我這樣的老人和這麼多年輕人談談，是一件美好的事情。我可以告訴你們，在新的世紀裡，你們還有很多事做。∞

*在阿提雅演講之後的兩年半，帕瑞爾曼（Grisha Perelman）的文章出現在網路上，最後證實結合漢米爾頓（Richard Hamilton）和帕瑞爾曼的努力，已經證明瑟斯頓的幾何化猜想，同時也證明了龐卡赫猜想。

本文出處　譯自2000年6月7日，阿提雅在多倫多「世界數學年2000會議」之演講稿，倫敦數學學會出版（2002）。

譯者簡介　翁秉仁為臺大數學系副教授，《數學知識網站》負責人，合譯有《數學：確定性的失落》（商務）、《丘成桐談空間的內在形狀》（遠流）。

延伸閱讀

+ Gray, Jeremy《希爾伯特的23個數學問題》（2002）天下文化。
+ Atiyah, Michael, Geometry in 2, 3 and 4 Dimensions (2010). 阿提雅在克雷研究院年度會議之演講錄影帶。（YouTube也有。）
+ Atiyah, Michael 等編 *Mathematics:Frontiers and Perspectives* (2002), AMS。本書比較專業，集合29位重要數學家在千禧年對數學的回顧與前瞻。可參閱由阿提雅執筆的序。