

## 乘著數學想像的翅膀飛翔

IMAGINARY 來臺灣了！

我用家裡不算快的網路，下載 SURFER，從安裝到畫出圖 1 中的三個圖，挑個恰當的角度、喜歡的顏色，時間不到六分鐘。這是小 Mac 的時間，用我另外一台老舊的 XP，花的時間也差不多。

用 JAVA 寫的 SURFER，不是 Mathematica 或 Matlab 這種專業級程式。功能雖然不很強大，但已足夠演示三變數多項式所決定的曲面圖形。我挑方程式沒花特別心思，只是將 SURFER 初始畫面的預設算式，做了對稱又不對稱的修改，調整參數  $a$ ，確定包含參數的奇點情況，就得到這些效果。

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz + a = 0, \quad a = -1, 0, 1$$

圖 2 是兩圓柱互相垂直交穿，展現 SURFER 也可繪製多曲面的聯集與交集，不過因為程式沒有繪製曲線功能，所以必須把交線「吹胖一點」。

SURFER 描繪的是多項式方程式，任何人從三種加、減、乘日常運算，就能憑空畫出各種妙趣橫生的曲面，而且能眼見難以想像甚至超出想像的數學現象（如奇點與對稱）。再加上 SURFER 有很強的空間表現力，旋轉、縮放、上色、打光，速度又快，這麼一個輕巧又專業的軟體，是這個 IT 時代的美好產物，完全可以放在科學館裡吸引訪客的眼光。只要一點點想像力或好奇心，就可以在這個曲面、奇點、對稱的世界，玩上好一陣子。

事實上，SURFER 正是為了這個目的而打造的。

∞

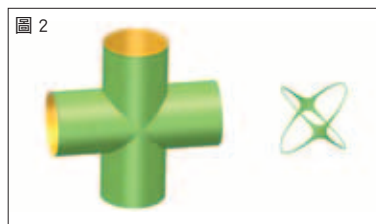
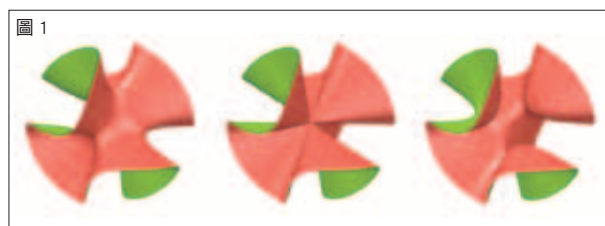
自從聯合國科教文組織 (UNESCO) 在新世紀初推動「世界數學年 2000」之後，數學推廣的浪潮便風起雲湧。2008 年被數學大國德國定為德國數學年。就在這一年，位於德國南部慕尼黑、知名的歐伯沃爾法數學研究院 (Mathematical Research Institute of Oberwolfach, MFO) 配合籌劃並創立了名為「IMAGINARY 看見數學」(IMAGINARY — through the eyes of mathematics) 的數學推廣計畫。

剛開始，這只是一個德國 12 個城市的巡迴展覽，由於展覽驚人的成功，隨即擴展至西歐各國如奧地利、瑞士、西班牙、英國、烏克蘭。

展覽中最吸引觀眾眼光的，就是具有強大互動性與表現力的 SURFER。事實上，SURFER 可以說是體現了整個策展的目標：以數學的視覺與美學面向作為抓睛的焦點，然後以互動的方式向訪客說明數學的背景，最後希望因此改善數學艱澀的形象，增進公眾理解，提升小孩與成人對數學的興趣與熱情。

從 2008 年起，IMAGINARY 除了持續在德國展出外，已經推廣到全世界，總共有 30 餘國、130 多個城市參與，參觀人數超過 200 萬人次。除了展覽之外，通常還伴隨著在地的各種演講、討論會與影音活動。2014 年 8 月在漢城舉行的世界數學家大會 (ICM) 裡，更出現了迄今 IMAGINARY 規模最大的展覽。

臺灣在跨越 2015-2016 年的半年裡，也迎來這項知名的數學展覽，先後將在南臺灣的高雄與北臺灣的臺北展出（資訊請見文後）。在臺灣展覽的內容不但包括原來 IMAGINARY 展覽的精美繪圖、立體雕塑、互動程式、影音作品，也將有臺灣本地的作品參展。除了各種演講活動之外，甚至還有 SURFER 繪圖的線上競賽。





∞

但是，IMAGINARY 已經不只是一個展覽，而是一個數學品牌。

2008 年之後沒多久，UNESCO 開始策劃 2013 地球數學年（MPE）的活動，將重點放在數學對地球這顆行星的全球問題的貢獻，像是自然災害（颶風、地震、海嘯）、氣候變遷、流行疾病、永續生存等難題。在這個促進數學能見度的大型活動裡，還提出一個準（虛擬）數學主題策展的競賽，於是這正好讓已經經營五年的 IMAGINARY，找到一個轉型發展的契機。

2013 年，地球數學年開始的同時，MFO 新上任的院長微分幾何學家休斯金（Gerhard Huisken），在克勞斯基金會（Klaus Tschira Stiftung）贊助下，招募了一群熱情的數學家、程式師、設計師，將 IMAGINARY 脫胎換骨，發展成一個線上網站：imaginary.org。不但發表 MPE 該年的競賽作品與得獎人，同時更趁勢在社群網站的時代裡，發展成推廣數學的網路開放資源網站。

進入網站，除了 IMAGINARY，就是清楚的副標題「開放的數學」（Open Mathematics），表明這個網站開放社群的特質。網站上除了展出「IMAGINARY 看見數學」和 2013 地球數學年的特展，還有「現代數學一瞥」（snapshots of modern mathematics），邀請 MFO 的訪問學者，撰寫給大眾閱讀的數普文章，以及一個正待開展的數學教育資源 ENTDECKERBOX（發現寶箱）。除此之外，網站內還包括許多可以瀏覽或下載的程式、圖片、實作（包含 3D 列印檔）、影片，只要不商業使用、具名、不改製都可以任意運用與分享。

這個網站繼承了 IMAGINARY 展覽的精神，自始至終的原則，就是互動、直觀、開放。IMAGINARY 喜歡形容自己是“pick and mix science stand”，這話出自“pick and mix sweet stand”，也就是臺灣曾經流行過，自己挑選、自己組合的糖果攤。使用者可以運用網站各種資源或工具，靈活運用可以用於教學、工作坊、數學活動、數學展覽，甚至再回

饋分享給大家。重點是所有資源全部免費！

IMAGINARY 這種全免費、自己拿、分享玩的開放哲學，已經將自己建立成一個非商業、完全開放的特別數學品牌。從一個單純的數學展覽，發展出互相支援合作的數學社群架構，而且是包含許多非專業數學家的數學社群。

由於 IMAGINARY 網站的社群導向非常成功，已經被德國媒體譽為數學界的 YouTube。2013 年德國數學媒體大獎更頒給當初推動 IMAGINARY 展覽的 MFO 前院長葛路爾（G.-M. Greuel），以及主要策展人與計畫經理馬特（A. Matt）。

數學的美是一個迷人的話題。本刊第二期報導過阿提雅參與的認知科學實驗（〈掃描數學家的腦：看到數學之美〉），一年多後曼弗德做了有趣又嚴正的呼應（本期〈數學之美〉），文中還提到正在美國巡迴的數學最美公式的展覽：Concinntas 計畫，這個展覽呈現十幅著名數學家或科學家手書公式的版畫。

美有「陽春白雪」，也有「下里巴人」。IMAGINARY 所展現的美感，深刻或許比不上數學家的抽象美感。但是它以視覺所牽引的驚喜，卻是一個美麗的入口。年輕人在過程中所感受的自由、開放、好奇、無畏與探索，更將是成為真正數學家、科學家，甚至一介世界公民該具備的美好品格。

（編輯室）

#### 相關資訊

► 2015 年 12 月 18 日至 2016 年 2 月 29 日  
國立科學工藝博物館，高雄市  
<http://www.nstm.gov.tw>

► 2016 年 3 月 18 日至 2016 年 5 月 1 日  
國立科學臺灣科學教育館，臺北市  
<http://www.ntsec.gov.tw/User>

► 臺灣「超越無限·數學印象」IMAGINARY 網站  
<http://www.imaginary-taiwan.com.tw>

► IMAGINARY 網站  
<http://imaginary.org>



## 哥德爾和塗林現身量子力學

量子譜隙竟然是不可判定的

我們都知道，在 19 世紀末、20 世紀初，數學哲學的發展極為活躍，數學家與邏輯學家競相致力於為數學建立穩固的基礎。但這些熱切的活動卻在 1931 年受到重挫，因為哥德爾 (K. Gödel) 所證出的兩個「不完備定理」確切無疑的申明任何公設系統如果沒有矛盾，就不可能是完整的，系統中必定會存在不可證明的命題。

哥德爾的定理雖然常引起討論和引申，但它其實是數理邏輯裡的產物，哥德爾的證明方法也非常技術性，很難看出與現實世界有何關聯。不少人曾揣想不完備定理能帶給自然科學什麼啟示，例如物理學家霍金 (S. Hawking) 便曾發表過題名為〈哥德爾和物理的終結〉 (Gödel and the End of Physics, 2002) 的演講，猜測物理學裡是否有終究不可知的事物。但是這些終歸是形而上的類比、隱喻或隨想，不曾被真正引入到理論的核心。然而現在情形似乎有了改變。

《自然》期刊於 2015 年 12 月刊出，由丘畢特、培瑞茲 - 賈西亞和沃爾夫 (T. Cubitt, D. Perez-Garcia, & M. M. Wolf) 合作的論文〈譜隙的不可判定性〉 (Undecidability of the spectral gap)，在研究譜隙這項基本物理性質時，發現它存在著不可判定的問題，終於在物理與數理邏輯之間找到了聯繫。

譜隙指的是一個系統裡電子從基態跳到第一受激態所需要的能量，當譜隙消失時，即會發生量子相變。例如對於某些物質，降低溫度可造成譜隙關閉，物質就可變成超導體。因此譜隙問題對於半導體、超導體的研究非常重要。

丘畢特等人所問的問題是：對於任意的多體量子系統 (many-body quantum system)，是否有一個通用的算法可以判斷其是否有譜隙？因為要探討的是通則，而不是具體個例，這問題乍見很難著手，他們找到的切入點是塗林 (A. Turing) 的停機問題——哥德爾定理的計算版本。

就在不完備定理出現之後不久的 1936 年，塗林發表了

一篇劃時代的論文〈論可計算數及其在判定性問題上的應用〉 (On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem)。在論文中，他先提出了一個通用計算機器的架構 (日後稱為塗林機，當時電腦還未發明)，然後提出了停機問題 (halting problem，概略而言，是針對任意一個程式及輸入資料，判斷是否能在有限時間內算完後停止)，並用和哥德爾類似的證明策略，證明不存在有一個通用的程序可判定所有停機問題。藉此他也回答了希爾伯特綱領中的判定性問題無解。

丘畢特等人研究譜隙問題，則是先假設一個理想化的無窮延伸的二維原子晶格做為理論模型。經過詳細的推導 (完整版論文厚達 140 頁)，他們論證，無窮晶格的量子態形同是塗林機，而計算這個無窮晶格的譜隙則等價於通用塗林機的停機問題，因此在演算上是不可判定的。

這項結論的寓意不免會引起種種聯想，論文作者之一的沃爾夫便說：我們早已知問題有可能是不可判定的，「但是迄今為止，這僅限於像理論計算機科學和數理邏輯之類的非常抽象的角落。之前沒有人曾認真考慮它可能也存在於理論物理學的核心。但是我們的研究改變了全貌。從更哲學的角度來看，它們也挑戰了化約論者的觀點，因為這道無法跨越的難題正是落在要從微觀描述推导出巨觀性質的途徑上。」

在解決了譜隙問題後，丘畢特等人期望能以類似的概念和方法用於研究相關問題，其中最引人注意的是楊 / 米爾斯質量間隙問題 (Yang-Mills mass gap problem)，別忘了這是克累研究所 (Clay Institute) 的七道千禧年百萬名題之一。

解決了一般情形固然是很大的進展，但它既不表示在此範圍內便沒有值得研究的題目可做，也不表示解決其中的個例會容易許多。我們不妨回想一下希爾伯特第 10 問題：找出判定任意丟番圖方程是否有解的演算法。這個問題在 1970 年時解決，答案是否定的。但是一道最出名的丟番圖方程——費馬最後定理，卻要到 1995 年才由懷爾斯 (A. Wiles) 證明。(編輯室)



## 圖同構問題 30 年來的大突破

去年（2015）11 月，網路開始流傳芝加哥大學的數學家巴拜（L. Babai）將有重大成果要發表。在學界的高度期待下，他以兩場演講說明關於圖同構問題（graph isomorphism problem）的新演算法，隨後巴拜將論文〈準多項式時間內的圖同構〉（Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time）的預印本上傳到 arXiv，供大眾參閱。

圖同構問題是圖論以及計算複雜性理論（complexity theory）裡一項基本又應用廣泛的問題，而且這方面的研究已經停滯 30 多年沒有進展，所以巴拜的新成果立即被各界認為是歷史性的突破，如果正確的話，可以名列近年來最重要的成果。

「圖」（graph）指的是由頂點與邊構成的網絡，同構指的是兩個圖具有相同的結構。圖同構問題，用通俗的話來說，就是如果有兩個（看起來不一樣的）圖，我們要判斷它們其實是不是同樣的圖。例如圖 1 中的兩個圖，雖然外觀差異很大，但其實是同構的，同色的點一一對應，邊也一一對應。

想判斷圖是否同構，最直接的辦法是將兩個圖依所有可能的配對方式做逐點比對。對於  $n$  個頂點的圖，將有  $n!$  種配對要檢查。隨著  $n$  增加， $n!$  會迅速膨脹成天文數字，讓計算檢查幾近不可能。因此計算機學家或數學家發明各種演算法想加快計算速度，之前最佳的演算法是由勒克斯（E. Luks）和巴拜等人在 1983 年提出的，對於  $n$  頂點的圖，需耗費  $\exp(\sqrt{n \log n})$  的時間，巴拜的新方法則大幅降低到近乎多項式時間的  $\exp(\text{polylog } n)$ 。

要知道兩者的差別有多大，可以借用麻省理工學院的艾隆森（S. Aaronson）的說法，他說：「舊算法明顯落在指數時間的大都會圈內，不過它大致在下界附近；新算法則明顯落在多項式時間（polynomial time）大都會圈內，不過它大致在上界附近。」

圖同構在資訊科學的複雜性理論裡，具有重要意義。複雜

性理論研究電腦問題的複雜度，探討需要花多少時間才能把問題計算完，並加以分類。最容易處理的是多項式時間內能計算完的問題，稱為 P 類；如果答案可以在多項式時間內檢查完畢，則是 NP 類。NP 是否就是 P 問題是一個根本的問題，列名克累數學所的千禧年數學百萬名題。這個問題之所以困難，是因為 NP 問題中有一類稱為 NP 完備（NP-complete）的問題（例如知名的推銷員路線問題），非常難以計算。

兩圖是否同構可以在多項式時間內檢查完畢，因此是 NP 問題。但它是 P 或 NP 完備則未有定論。許多證據顯示它應該不是 NP 完備，但已知演算法耗時又遠大於多項式時間。這種介於 P 與 NP 完備之間的問題有時稱為中級 NP（NP-Intermediate）。這是一個成員稀少的類別。巴拜的新成果雖然把圖同構的計算難度大幅降低，但專家卻相信它可能最終無法減少到多項式時間，永遠會落在 P 與 NP 完備之間。

與這項研究沒有直接關係，但不免會引起聯想的是另一個同樣屬於中級 NP 問題——大整數的質因數分解。既然巴拜能在大家以為已經研究「殆盡」的圖同構上締建新猷，是否別的中級 NP 問題也仍大有可為？我們都知道，現代加密技術是建立在質因數分解的困難度之上，如果將來也有一個演算法突然可以把質因數分解降低到準多項式時間，其影響性就不只是純學術的探討而已了。（編輯部）

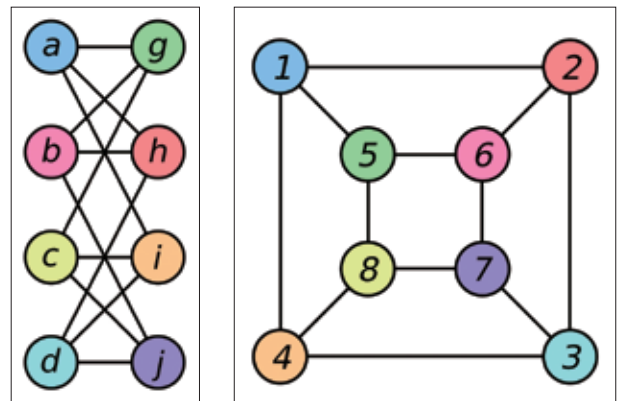


圖 1 兩個看起來不同但事實上同構的圖。