專題

由考古發現看中國古代數學的演化（上）

從《數》、《筭數書》到《九章算術》

作者：**道本周 Joseph W. Dauben**　譯者：**林倉億**

道本周（Joseph W. Dauben）哈佛大學博士，曾訪問普林斯頓高等研究院、劍橋大學，現在是紐約市立大學勒曼學院的科學史傑出教授。研究興趣廣泛包括科學史、數學史、科學社會學、中國科學史。著有兩本知名數學家傳記：*Georg Cantor*（《康托》）與*Abraham Robinson*（《羅賓森》）。2012 年獲美國數學學會懷特曼數學史獎。

▶近期中國的考古發掘，獲得許多前所未見的數學文本，其中尤以《筭數書》和《數》為著。

▶由《數》的「圜材埋地」問題，連結到《九章算術》的「圓材埋壁」與「葭生池中」問題，並討論劉徽的論證。

▶同樣的開方問題，在《筭數書》只是近似值，但《九章算術》的劉徽注已提供開方術的算則。

過去幾十年的考古挖掘出許多引人注目的先秦及稍晚時代的文本，我們第一次可以仔細研究這些文本寫作當時的數學內容，大力促進了中國古代數學及其應用史的研究。透過細察這些收藏於北京清華大學、北京大學、長沙嶽麓書院、武漢湖北省博物館等地新出土的戰國、秦、漢時期的數學竹簡，或可對中國古代早期的數學思想與應用提出新的闡述。針對當時數學素材演進中極有意義的問題，本文也將討論針對這些問題發展出來的新方法與證明（justifications），最終在內容廣泛的《九章算術》中達到了高峰。

兵馬俑的考古發掘

1974 年春天，一群農民在陝西西安近郊的驪山北麓鑿井時，發現了兵馬俑的碎片，很快發展成 20 世紀最偉大的考古學發現。該地點被證實為秦始皇的陵墓。秦始皇卒於西元前 210 年，根據西漢史家司馬遷於一個世紀後的記載，該陵墓於西元前 246 年開始興建，動用了超過 70 萬的人力。該墓園估計超過 200 萬平方公尺，陵墓本身大概只佔了十分之一的面積，非常接近 485 公尺乘以 514 公尺的大小，全部約 220,000 平方公尺的陵墓至今仍未完全挖掘。時至今日，學者已經研究了三個墓坑的兵馬俑，大約是 20,000 平方公尺的面積，內有超過 8,000 個真人大小的兵馬俑。

據司馬遷的記載，除了設置軍隊與重要官員的位置外，陵墓中還包含廣大的宮觀、貴重的器皿與「奇異的物品」，據說墓室的天花板鑲嵌著珍珠和寶石來代表天穹群星與行星，至於墓室地面則呈現秦始皇領土的主要特徵，包括山岳和百條水銀灌注的河川。對墓地初步探測發現，汞含量的確比正常值高。

過去 75 年左右的考古發現有一些雖然不是那麼引人注目，但對科學史家卻極為重要，大幅拓展了我們對中國古代數學史的認識。

直到不久之前，數學史可供研究的材料仍然是以所謂的《算經十書》為主，其中包括《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》以及其他文本。這些算經被合成一套刻印，其中部分文本可以回溯至南宋的版本，根據的是唐代李淳風及其同事蒐集用以作為基本教材的古代十本書，後稱為「十經」，學生為了通過國家考試，必須精通其中的內容。

戰國時期楚國的《楚帛書》

《楚帛書》實際上是一份記錄在絲帛上的文本，大約是在二次世界大戰、中國對日抗戰、國共內戰等戰爭結束之前，被兩個盜墓者挖掘出來的，地點在湖南省長沙市東郊的子彈庫附近。後來考古學家找到帛書所屬的墓，因此斷定這份楚手稿的年代可以追溯到西元前 300 年左右。

1946 年，古董商蔡季襄將這份文件委託給出身耶魯大學的漢學家兼收藏家考克斯（John Hadley Cox）。考克斯將這件文本帶到了美國，並在紐約

圖 1 《楚帛書》的紅外線照片。（Freer Gallery, Washiton D.C.）

大都會博物館展出。雖然考克斯提供給博物館作為收藏，但管理委員會認為其合法取得的文件並不充分。1965 年，它被紐約的精神科醫師、慈善家兼收藏家賽克勒（Arthur M. Sackler）購得，並贈送給華盛頓特區的弗瑞爾美術館（Freer Gallery）。隔年它被修復並利用紅外線技術拍照大幅提高了文字的辨識度，使得它更易於閱讀。1967 年，哥倫比亞大學舉辦了國際學術研討會， 40 位傑出的漢學家、人類學家、考古學家、藝術專家共冶一堂，研究討論這份《楚帛書》（圖 1）。

這個文本的內容基本上涵蓋天文學、占星術、天體運行、季節變化，以及對吉、凶日的描述。它提到了傳說中的伏羲與女媧，以及代表 12 個月份的神祇。伏羲與女媧在中國古代被認為是創造數學的神話人物，整份楚手稿證實了數學在古代中國各種應用中的普遍重要性。例如以下的解釋文字，說明了數學在《楚帛書》中扮演的各種角色：

如果 [……] 而陰曆每月的長度變得太長或太短，那麼它們將無法合於常度，春、夏、秋、冬就會 [不] [……] 規律；日、月、行星將錯亂的踰越軌道。當（月）太長、太短，逆反、失序，草木 [的生長] 就無所依歸。這就 [稱為]「妖」。當天地產生災害，天棓星將製造（全面性）的毀壞，（災害）擴散及於四方，山陵傾落，水漫為患，這就稱為「違逆」。如果你違逆了年（與）月，那麼到了初七或初八的時候就會有霧霜雨土，你就無法依（天時）而作了。[李零 and Cook] [1]

這裡數學規範而且調和了天地間的運動與轉化，不禁讓人想起赫拉克利特（Heraclitus）提及的太陽的運動必須聽從天命的限制：「太陽不會踰越他的尺度，倘若他這麼做了，正義的僕人復仇女神厄里捏斯（Erinyes）會找上他的。」[2]

湖南長沙的馬王堆

從 1972 到 1974 年間，三個西漢早期的墓在湖南長沙附近的馬王堆出土，已經被確認是第一任軑侯與長沙國丞相利倉、利倉之妻辛追，及其早逝的兒子（猜測）之墓。

在 1 號墓發現了辛追保存十分完好的遺體，還有裝飾華麗的棺槨、超過 1,000 多件的文物，分布在約 6.8 平方公尺的區域內。2 號墓可追溯至西元前 186 年，即利倉去世那年，不過墓藏已經被盜光了。3 號墓出土了 40 餘件帛畫、帛書、竹簡、木牘，內容包含失傳的和不為人知的作品。此墓可追溯至

[1] 編註：由於《楚帛書》解讀不易，這裡只是翻譯的一家說法。

[2] 見普魯塔克《論流放》，羅馬紀年 604 年，引自 [Burnet] Fragment 94，亦見 [Kirk]。

圖 2 《筭數書》竹簡整理後的模樣，書名出現在圖中最右邊的竹簡頂端。

西元前 168 年，墓主被推定為侯爵的兒子，當年身亡時年約 30 餘歲。3 號墓中的資料，主題關於歷史、政治、經濟、軍事、體操運動、哲學、天文、地理、醫術、文學。

3 號墓中除了最早版本的《周易》外，還有著名的描繪長沙國與南越國的馬王堆地圖，以及醫書《五十二病方》，該書載有 52 種疾病的藥方與療法，包含了 254 種藥物、283 帖處方，以及砭、針，甚至手術過程的描述。

在天文史方面，墓中有一本重要的文本《天文氣象雜占》，內容包含了 250 幅關於雲、氣、星、彗的圖 ❸，圖下附有文字記錄其名稱與簡要的占卜意義。在約 29 幅彗星圖中，描繪並簡短描述每一類彗星，其占辭例如「是是竹彗，人主有死者。」「蒲彗，天下疾。」「苦彗星，兵起歲飢。」

另一本《五星占》的內容，有一部分就如同書名，內容和占星學有關，而另一個部分「五星行度」則是木、土、金三顆行星的運行記錄，記載了西元前 246 到 177 年間它們的位置，其中大部分的資料是非常準確的。對於想研究古代度量衡制度，或者數學應用如將比例應用到日常商業交易的數學史家來說，馬王堆出土的文件是非常有用的。利用這些材料的最新研究可見（[Hulswé]、[鄒大海 2007a]、[鄒大海 2007b]、[Dauben 2008]）。

睡虎地秦簡

1975 年 12 月，考古學家在湖北省雲夢縣的睡虎地發掘一位秦代行政官吏的墓。從第 11 號墓中復原的文件，主要是關於秦代律法與公文，內容涵蓋了政府、經濟、文化、法律、軍事等。這些材料對於數學史家的幫助不僅在於了解各種商品交換比率的計算，例如《九章算術》第二章〈粟米〉中的例子，也在於釐清關於精製米、粟的不同品質與等級的術語之意義，以及在不同書中出現的不一致換算情形，例如《筭數書》與《九章算術》。這些細節也請見上段各引書。最近出土作品的更進一步比較研究分析，將有助於重新認識下文中的材料。

張家山漢簡

1983 年 12 月至 1984 年 1 月間，考古學家在湖北省江陵縣附近的張家山發掘一座漢墓，墓主曾在秦代當過省級的行政官吏，墓中發現了大量的竹簡著作，特別是關於法律規定、軍事實務以及醫學方面。在這些竹簡之中，大約有 200 枚是一本不為人知的數學作品——《筭數書》（圖 2）。由其他出土的文本，特別是《二年律令》（呂后 2 年的律令），考古學家判定此墓的年代約為西元前 186 年，其中呂后主政的時期是西元前 188-180 年。《筭數書》是至今考古挖掘出最早且未嘗發現的中國古代數學文本，關於《筭數書》與《九章算術》的詳細比較，請參閱 [Cullen 2004]、[Dauben 2008]。本文將會仔細考察《筭數書》中的幾個問題。

圖 4　《數》的一部分，收藏於湖南大學嶽麓書院。

里耶古城秦簡

2004 年 4 月，湖南省龍山縣里耶鎮興建水力發電站時，再度求助於湖南省文物考古研究所，前往挖掘酉水河東岸一處約 20,000 平方公尺的遺址。該遺址中除了古城牆外，還有古井、古墓，其中保存了超過 30,000 枚竹簡和木牘。其中 1 號古井特別珍貴，從中取得的文件紀錄了從戰國時期到秦、漢兩朝的政治、軍事、文化、社會事件，特別是當中的秦朝年曆，提供了西元前 221-206 年非常完整的每日紀錄。

數學史學者特別感興趣的是在長 22 公分、寬 4.5 公分板子上秦朝的乘法表（圖 3），這可與《筭數書》開頭的乘法表做比較。詳細比較內容，請見 [彭浩 2000]、[彭浩 2001]、[Cullen2004]、[Dauben 2008]。

圖 3　2002 年 4 月出土的秦朝乘法表，長 22 公分、寬 4.5 公分。

岳麓書院藏秦簡

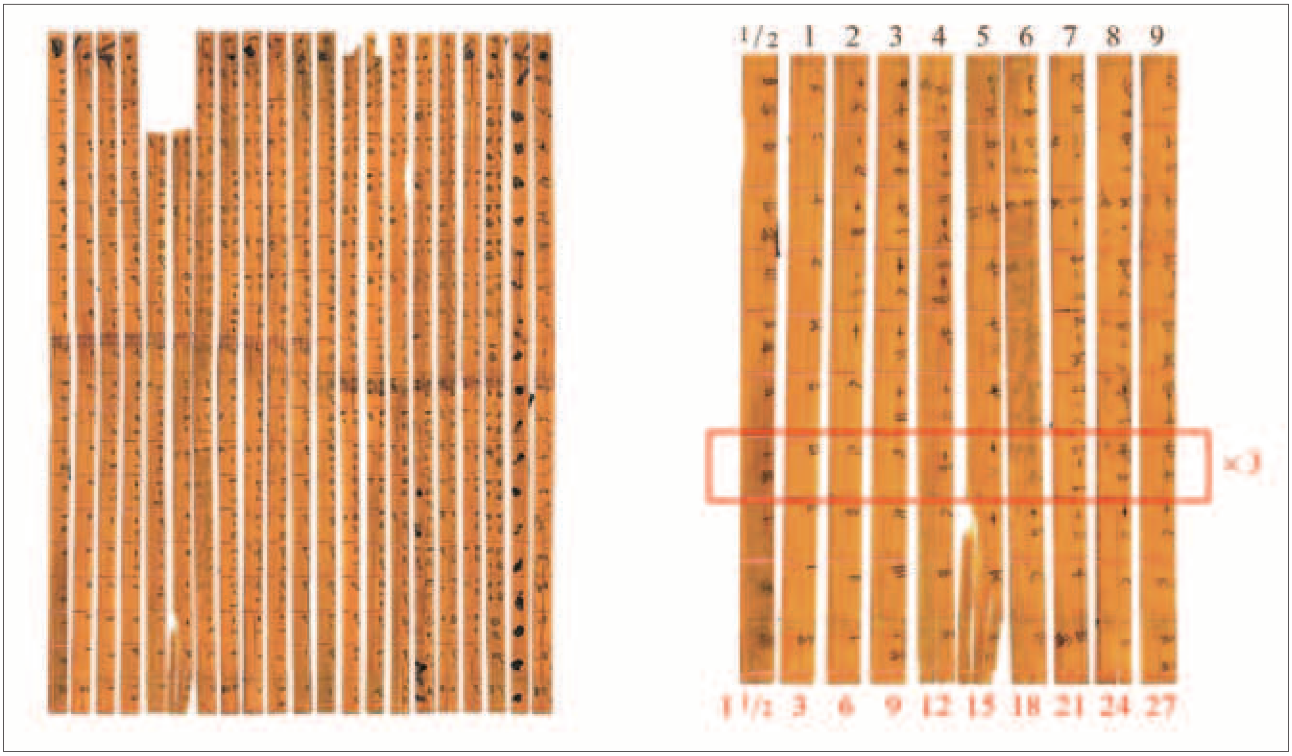
湖南大學的嶽麓書院在 2007 年 12 月從香港古董商購入一批為數超過 1,300 枚的秦簡，其中大部分是竹簡，有部分是木簡，初步研究顯示，總共包含了至少六部不同的作品。其中在編號第 0956 號竹簡的背後有個「數」字，就以此命名這當中與數學有關的部分為《數》（圖 4），共有 231 枚完整的竹簡以及部分殘片。最近的研究指出，《數》包含了 73 個計算問題以及 60 個解法（見 [蕭燦]），其中有一個問題將特別在下文中進一步討論。

北京清華大學藏竹簡

2008 年北京清華大學獲得一批戰國時期或稍晚的竹簡，計有 2,388 枚，其中有不少是殘簡，根據放射性碳分析，年代可精確判定為西元前 305 年前後 30 年內。這批竹簡全數購自一名香港古董商，而且還有一個據稱和這批竹簡一起被發現的箱子，形式與裝飾都與其年代相符。這批竹簡嚴重受到水與發霉的破壞，於是清華大學出土文獻研究與保護中心的李學勤教授領導的專家小組立即做了保存措施。該中心成立於 2009 年 4 月，就在這批竹簡捐贈給清華大學不久之後。據稱這批竹簡出自湖北省或湖南省某墓址，隨即落入香港古董商手中，捐贈者再購自該古董商。

就數學史而言，這批清華大學竹簡中，最重要的就是 21 枚從 1/2 乘以 1/2 到 9 乘以 9，再繼續到整

❸ 編註：氣指與日、月有關的蜃氣、暈珥、虹霓。



十乘以整十的 90 乘以 90 的乘法表（圖 5）。在中國其他地方也曾發現乘法表，例如前述的里耶古城秦簡發現的乘法表，另外還有 1987-2004 年間，於湖南省張家界古人堤發現的長 22 公分的乘法表木簡，該木簡的乘法表從 9 乘以 9 到 1 乘以 1。《筭數書》也有好幾枚竹簡與乘法有關，主要包括小至 1/9 的分數，以及大至 10^7 的 10 的次方。見 [馮立昇與徐義保]、[Berlin]、[邱瑾]。

《數》與《九章算術》的比較

在考察這些新增的考古證據後，我們要問的問題是，這些與中國古代數學有關的出土資料可以對其中的數學文本，以及從先秦到東漢這段時期數學的發展與轉變，提出怎麼樣的說明？有許多例子值得考量，其中後文所引嶽麓書院《數》中關於圓的問題，在《筭數書》中找不到對應的問題，不過它反映了從《數》到《九章算術》間，數學概念化的重要發展。

值得注意的是，《數》簡的內容是關於秦帝國統治的時期，大約是西元前 212 年，湖南大學的蕭燦已經對其中的內容做了仔細的研究，特別是她在論文中的目錄，將《數》的內容分為以下十類（[蕭燦]）：

1. 租稅類算題
2. 面積類算題
3. 穀、物換算
4. 衰分類算題
5. 盈不足類算題
6. 少廣類算題
7. 體積類算題
8. 句股類算題
9. 營軍之數
10. 衡制

《數》的「圓材埋壁」問題

上述第 8 類只有一題，該題是否該歸為句股類算題仍無定論，因為問題敘述中並未出現「句」或「股」，但將它歸於句股類的理由也很明顯，就是它的解法的確與《九章算術》第九章的句股算題有關。《數》中該題寫在編號 0304 和 0457 這兩枚竹簡上，引述如下：

圖 5　北京清華大學藏的 21 枚乘法表竹簡（《算表》）全貌，最右方由下而上、最上方由左而右依序都是：1/2、1、2、3、……、9、10、20、……、80、90。右圖是前述乘法表左下四分之一的放大圖。最下一列是 1/2 的倍數，因此下方倒數第四列就是 3 的倍數，由左而右依序是 1 1/2、3、6、9、……、27。

☐有圓材薶（埋）地，不智（知）小大，斲之，入材一寸而得平一尺，問材周大幾可（何）。即曰：半平得五寸，令相乘也，以深 [0304]
一寸為法，如法得一寸，有（又）以深益之，即材徑也。[0457]

這問題可簡化成，已知一圓內的弦長及矢 [4]，求圓的周長（雖然答案實際上給的是圓的直徑）。該題給的算法只敘述算出答案的步驟（其中 1 尺＝10 寸）：將弦長的一半（5 寸）平方，即 25 平方寸，除以入材的 1 寸（即矢），得 25 寸，再加上入材的 1 寸，得 26 寸。

沒有任何的說明解釋為何要採這些步驟，也沒有任何的論證證明答案是正確的。然而注意到，問題呈現時是用「即曰」兩個字來引入解題方法，稍後我們將回到這個慣用語的意義上。後來楊輝在《詳解九章算法》（1261）（收錄在 [郭書春 1993] 第 1 冊）中畫圖說明相同的問題（圖 6）。

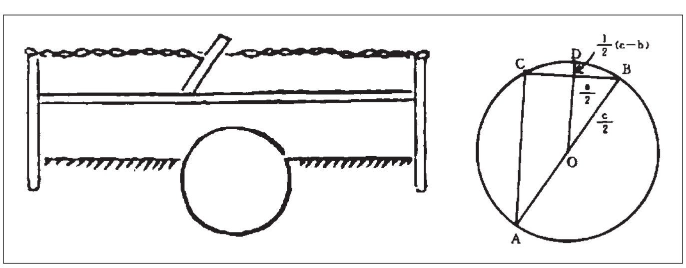


圖 6　圓材埋地圖解。左圖出自楊輝《詳解九章算法》。

《九章算術》的「圓材埋牆」問題

在《數》之後將近 500 年，劉徽在注《九章算術》時，其中一題幾乎就是《數》中「圓材埋地」問題的翻版。《九章算術》第九章處理的是與句股有關的問題，其中第九題如下：

今有圓材埋在壁中，不知大小。以鋸鋸之，伸一寸，鋸道長一尺。問徑幾何？
答曰：材徑二尺六寸。
術曰：半鋸道自乘，此術以鋸道一尺為句，材徑為弦，鋸深一寸為股弦差之一半，鋸道長是半也。
如深寸而一，以深寸增之，即材徑。[5]

這裡要注意到的第一個不同是，在《九章算術》的圓材問題中，用明確說明「算法如下」的「術曰」取代意義含糊的「即曰」。這兩個問題中的數據是一樣的，透過其算法所得到的圓直徑也完全相同為 26 寸，只不過在《九章算術》中，問題所求和答案是一致的。然而，無論是在《數》還是《九章算術》的本文中，都沒有解釋算法所依據的算理為何，除非讀者明白這算題所依據的概念架構，不然其算法看來既武斷又難以理解。

讀到《九章算術》第九章的這個問題時，就會發現兩者主要的重大差異就是《九章算術》包含了劉徽的注解：

此術以鋸道一尺為句，材徑為弦，鋸深一寸為股弦差之一半，鋸道長是半也。

乍讀之下，這些話似乎對揭示此問題所依據的概念架構並沒有幫助，但至少它提供了關於當時數學家如何思考這個問題的方法線索，也就是這是一題處理直角三角形邊長關係的問題，實際上就是句長

[4] 譯註：圓中弓形，從弧上半徑端點作垂直於弦的線段，其長即為「矢」。

[5] 編註：明體字為劉徽注。

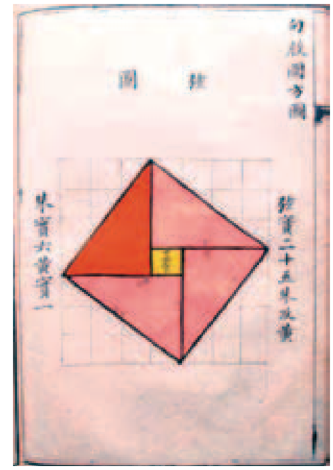


圖 8 〈弦圖〉，出自《周髀算經》，藏於哥倫比亞大學亞洲研究圖書館。

為 a、弦長為 c，以及股長 b 與弦長 c 的差 $c-b$。可是，為什麼劉徽會說「鋸深一寸為股弦差之一半」呢？

葭生池中

當參閱《九章算術》中另一個更有名的問題後，即第九章第六題「葭生池中」（圖 7），這一切就變得非常清楚了，因為「葭生池中」的解法與「圓材埋地 / 牆」實際上是一樣的。以下是這一題在《九章算術》中的敘述：

今有池方一丈，葭升其中央，出水一尺。引葭赴岸，適與岸齊。問：水深、葭長各幾何？

答曰：水深一丈二尺，葭長一丈三尺。

劉徽注：此以池方半之，得五尺為句，水深為股，葭長為弦。以句、弦見股，故令句自乘，先見矩冪也。[6]

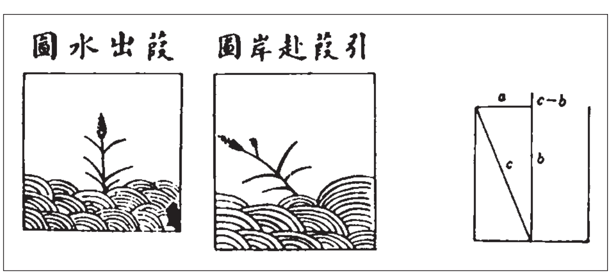


圖 7 葭生池中圖解。左邊兩圖出自楊輝《詳解九章算法》。（[郭書春 1993]）

此處要注意的是題中給的數據：池子的邊長 1 丈與葭在水面上的高度 1 尺，除以 10 後就是「圓材埋地 / 牆」中的數據——鋸道 1 尺、鋸深 1 寸。其中 1 丈 = 10 尺、1 尺 = 10 寸，不管單位的話，那數字是完全相同的。

劉徽還給了關於「葭生池中」與「圓材埋地 / 牆」解法的線索。要解「葭生池中」，劉徽說將句自乘就能得到「矩」（gnomon）的面積。什麼是矩 [7]？這就必須要探究中國古代數學中不斷應用在解決句股問題的基本方法，這是與證明句股關係（畢氏定理）有關的方法，其中句為 a，股為 b，弦為 c，$a^2+b^2=c^2$（圖 8）。

中國古代的出入相補原理

出入相補原理是中國古代數學中基礎且重要的方法。考慮圖 9 中的圖形：在什麼條件下，兩個明顯不同的區域，即左邊的朱色 X 與右邊的青色 Y，面積是相等的？

一個簡單直接論證朱色與青色區域面積相等的方法是，當長方形對角線通過兩區域共同的頂點（見圖 10）。

現在可以直接利用幾個邏輯原理，也就是歐幾里得《原本》中的公理來證明這是對的，但中國古代中並沒有類似等量減法公理的明確陳述。在圖 10 中，對角線將長方形平分成兩個全等的直角三角形，即朱色三角形與青色三角形，兩者面積相等。

在這兩個直角三角形中，另外還有兩組相等的直角三角形，平行於長方形兩邊的水平線與鉛直線將原來長方形分割成四個長方形。而這兩組直角三角

[6] 編註：作者這裡省略「術曰」與其他劉徽注，見 17 頁 BOX。

[7] 譯註：「矩」並非長方形（矩形），而是彎折的長方形組合（磬折形）。見後文說明。

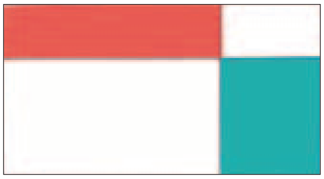


圖 9

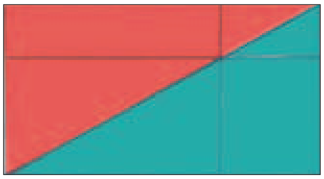


圖 10

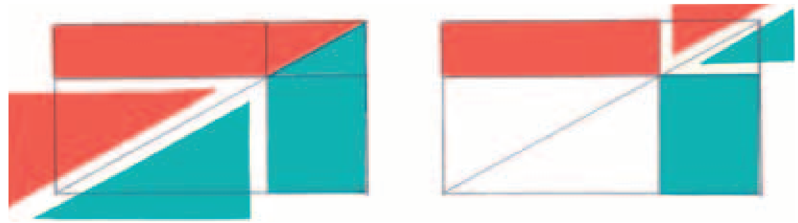


圖 11

形，就位於左下與右上的長方形中。將這兩組小直角三角形從大直角三角形中移走（見圖 11），馬上就可以證得原來的性質，即剩下的朱色 X 與青色 Y 的面積相等（即回到圖 9）。

「出入相補」與畢氏定理

現在可以應用相同的原理來證明中國版的畢氏定理。第一個與直角三角形有關的論證，出現在中國古代的數學經典著作《周髀算經》之中。原書中的附圖已經失傳，之後有數個重繪版本，其中一個就是前文圖 8 的〈弦圖〉，以下的論證就是建立在該圖上。

注意該圖的中間有一個黃色的正方形，這是劉徽在注解句股關係的證明時沒有提及的。雖然如此，我們在以下的說明中，這個圖仍然是有用的。首先，考慮圖 12 左下方長方形對角線所分割出來的直角三角形，短邊為句，將所形成的正方形塗成朱色；長邊為股，將所形成的正方形塗成青色。

注意到朱色、青色正方形與長方形對角線所形成的正方形有所重疊，長方形對角線所形成的正方形，也就是直角三角形的弦所形成的正方形。若將著色的句、股所成正方形，與弦所成正方形重疊的部分當作「入」，在弦所成正方形之外的紅、青色部分當作「出」，如圖 13。

就出入相補原理的精神而言，這些「出」的部分可以搬移到弦正方形的內部，就如同劉徽常說的「以盈補虛」。重組之後，原本各以直角三角形的句、股為邊長的兩個正方形，就可以轉變成以弦為邊長的正方形。劉徽對 $a^2+b^2=c^2$ 證明的解釋，就是藉由減去「出」，再補上等面積的「入」以組成斜邊上的正方形面積（圖 14）。

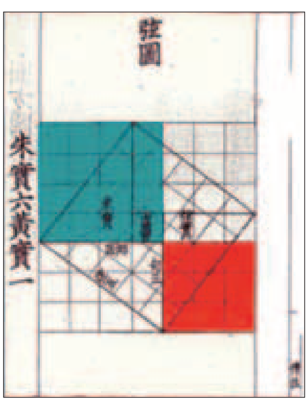


圖 12

圖 13

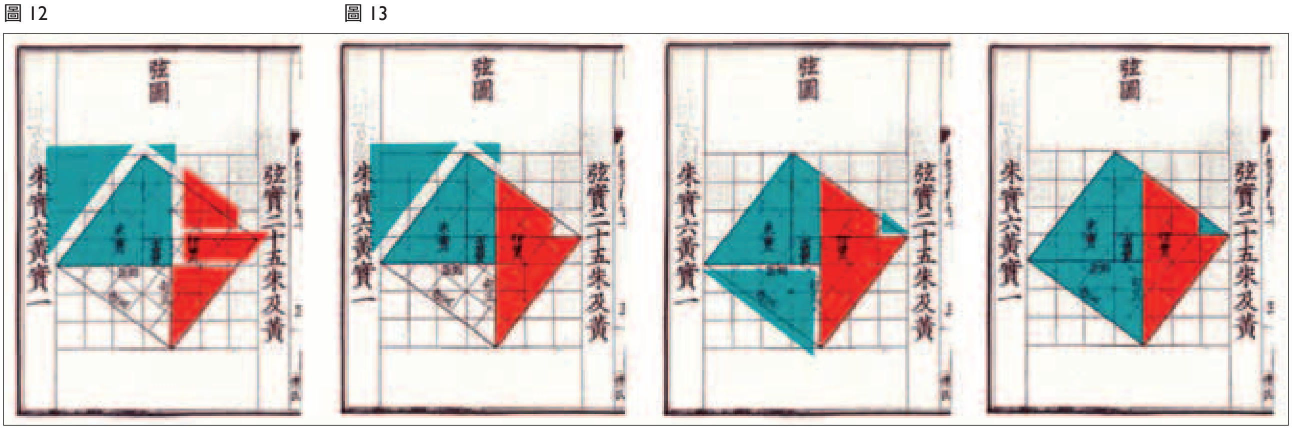


圖 14

圖 15　埃及墓畫上的土地測量師，底比斯門納（Menna）陵墓。（紐約大都會博物館館藏）

中國對句股定理（畢式定理）的證明在許多方面都與歐幾里得《原本》的理路不同。歐幾里得在第一冊第 47 個命題的證明顯然十分獨特，雖然也用到了面積的相等，但不需要將它們重組。中國與畢氏學派的成果都源自土地測量的實用經驗，兩者具備如同埃及土地測量師利用繩結來測量大片土地的傳統（圖 15）。謹記這一點，那麼希臘字以 $\tau\varepsilon\nu o\upsilon\sigma\alpha$（tenousa，一條從兩端拉緊的繩子或琴弦）表示斜邊，和中國字以琴弦的「弦」來表示斜邊，兩者想法如此相近絕非巧合。

劉徽對「葭生池中」的句股解釋

但是前節的說明如何幫助我們理解「圓材埋地/牆」和「葭生池中」的解法呢？劉徽的解釋是兩者都可以用句股方法解決。我們從「葭生池中」開始，將問題中各個部分用圖形表示，如圖 16 右圖中著色的正方形。

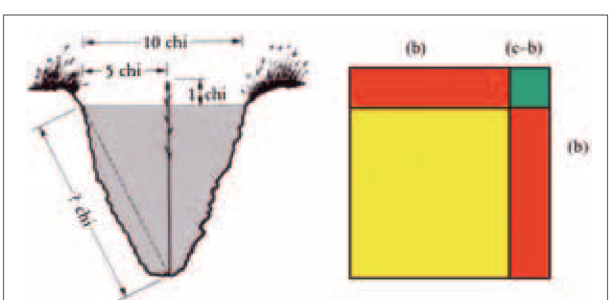


圖 16

這裡我們要把圖 16 左圖問題中的數據轉化成右圖的著色圖。直角三角形的短邊就是池寬之半，即 5 寸長的句 a；斜邊就是當葭被拉至岸邊的長度，也就是葭的長 c；股，即直角三角形的長邊 b，就是葭從底部到水面的長度；高出水面的 1 寸就是葭的全長，也就是斜邊 c 與直角三角形的股 b 的差，即 $(c-b)$。

圖 16 右圖中的大正方形邊長代表斜邊，即葭的長 $c=b+(c-b)$；黃色正方形的邊長，就是葭從底部到水面的長度 b；高出水面的 1 寸就是差 $(c-b)$。

這裡整個論證的關鍵在於葭在水面下的長度 b 滿足 $c^2-b^2=a^2$，因此面積 a^2 就等於黃色正方形周圍矩的面積，即兩個朱色長方形與青色正方形之和，此關係可寫作 $5^2=2(c-b)b+(c-b)^2$。又此處的 $c-b=1$，得 $25-(c-b)^2=25-1=24$（平方寸），這就解釋了為何這個問題的解法要先求池寬之半的平方 [8]，即 5^2，然後減去高出水面長度的平方。將所得結果再除以 $2(c-b)=2$，得到葭從底部到水面的長度 $b=12$，而$b+1=13$ 就是葭的全長。

現在就很清楚為何劉徽在他的注中說先求矩的面積，它會等於句的平方。用此題給的條件以及上述的符號表示，就是 $a^2=2(c-b)b+(c-b)^2$。

也請讀者注意到，儘管原文中的方法以及劉徽的注用了數字來敘述與呈現，但它們全然是一般性的。在原文中用 1 來稱除數以及超出水面的部分，

《九章算術》原文與劉徽注比較

《九章算術》原文	劉徽注
術曰：半池方自乘，	此以池方半之，得五尺為句，水深為股，葭長為弦。 以句、弦見股，故令句自乘，先見矩冪也。
以出水一尺自乘，減之。	出水者，股弦差。減此差冪於矩冪則除之。
餘，倍出水除之，即得水深。	差為矩冪之廣，水深是股。令此冪得出水一尺為長，故為矩而得葭長也。
加出水數，得葭長。	

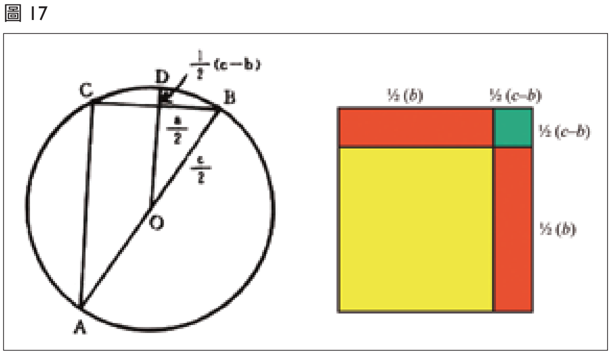
那是因為 $(c-b)$ 正好就是 1，但原文中指的是一般性的情況，才會用「以出水⋯⋯自乘」表達，也就是 $(c-b)^2$，對此，劉徽就沒有用數字來敘述，而是寫作「[弦與股 $c-b$ 的] 差為矩冪之廣」（參見 BOX 引文）。

回到「圓材埋地 / 牆」

接下來要將中國古代數學家對「圓材埋地 / 牆」的想法，用我們可以理解的方式表達出來。與「葭生池中」唯一的差別，就是在此題中我們要處理的直角三角形之邊長都變成一半。既然說這是唯一的差別，就代表這個題目所給的初步數據與解決方法，和「葭生池中」是相同的。

欲求得圓的直徑 c（參閱圖 17），解法和之前的一樣，先將句平方，句就是鋸道長之半，即 $a/2$，矩的面積 $(a/2)^2$ 可表示為：

圖 17



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}=2\cdot\frac{1}{4}(c-b)b+\frac{1}{4}(c-b)^2$$

下一步就是同除以鋸深 $(c-b)/4$，化簡後得

$$\frac{a^2}{2(c-b)}=b+\frac{1}{2}(c-b)$$

求出圓直徑的最後步驟，就如術文所指示的，加上鋸深：

$$\frac{a^2}{2(c-b)}+\frac{1}{2}(c-b)=b+\frac{1}{2}(c-b)+\frac{1}{2}(c-b)=c$$

如此一來，加上鋸深後既求得了圓的直徑，也完成了一般性的解法，這一般性就是將題目中的數據代之以句與弦股差來指稱。

《筭數書》與《九章算術》的開方法

《筭數書》中的數學又是如何？這部作品的成書可追溯至西元前 186 年，當中包含了許多關於田畝面積的計算問題。第 53 個問題是求給定正方形田地面積的邊長，這是需要開平方根的問題，然而解法卻出人意料，竟然是用盈不足術來求平方根的近

8 譯註：《九章算術》中的解法及劉徽的注，請看 BOX 中引文。原文略去劉徽的某些注文，此處將其完整呈現。

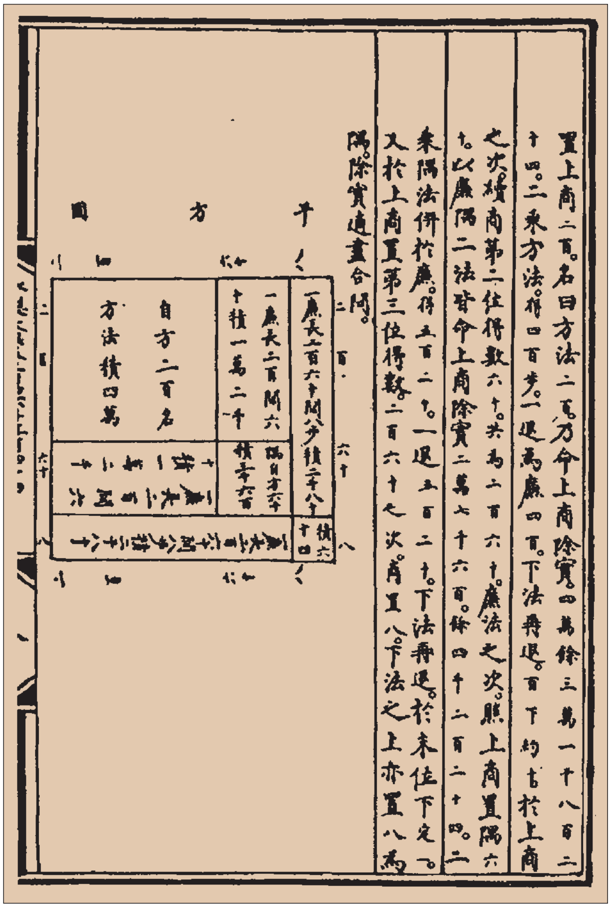

置上商二百。名曰方法二萬。乃命上商除實四萬餘三萬一千八百二十四。二乘方法。得四百步。一退為廉四百。下法再退。百下約之於上商之次。續商第二位得數六十。共為二百六十。廉法之次。照上商置隅六十。以廉隅二法皆命上商除實二萬七千六百。餘四千二百二十四。二乘隅法併於廉。得五百二十。一退五百二十。下法再退。於末位下定。又於上商置第三位得數二百六十之次。商置八。下法之上亦置八為隅。除實適盡合問。

圖 18　在《九章算術》中，求平方根的方法已經高度發展成為一個算則，且擁有自屬的專有名稱「開方術」（[錢寶琮 1963] 第一冊）。這個後來的方法藉由不斷地逼近正方形面積來求得平方根逐次的近似值。本圖出自 [藍麗蓉 & 洪天賜]。

似值：如果邊長為 15，那正方形的面積就太小；如果邊長為 16，面積又太大；因此，平方根一定介於兩者之間。

《九章算術》中有相同的問題，但解法完全不同。劉徽在求平方根時給出一個明確的算則，而非只是近似值。藉由這種算法，任何數的平方根都可以（任意逼近的）求得。此法概念上的關鍵反映在圖 18 之中，該圖是清朝數學家戴震為明朝的百科全書《永樂大典》（1403-1408）所重繪的。

圖 18 對應的是《九章算術》第四章第 12 題：

今有積五萬五千二百二十五步。問為方幾何？
答曰：二百三十五步。

考慮55225 的平方根，這問題就是要找出正方形的邊長。開方術從觀察平方根必定介於200到300之間開始，因為

$$200^2 = 40000 < 55225 < 300^2 = 90000$$

第一步就是求得平方根 abc 的最前面百位數字a，這個例子中的a 顯然為2。將200作為平方根的第一次近似值，然後從 55225 中減去$200^2 = 40000$，剩下 15225。用圖形來表示的話（圖 19），就相當於從大正方形（55225 ）中減去黃色部分的面積甲（40000）。

剩下的矩是兩個朱色的長方形以及介於其中轉角的黃色小正方形乙，然後是兩個青色的長方形和介於其中轉角的黃色小正方形丙（圖 20），這兩個矩代表圍繞在大黃色正方形外的面積，也就是 $55225 - 40000 = 15225$。

接下來要求出近似值的第二位數字。兩個朱色長方形的長就是黃色大正方形甲的邊長，接下來就是估計平方根 abc 的第二個數字 b，以滿足

$$2 \cdot 10b \cdot 200 + (10b)^2 \leq 15225$$

但因為

$$2 \cdot 40 \cdot 200 + 40^2 = 17600 > 15225$$

$$2 \cdot 30 \cdot 200 + 30^2 = 12900 < 15225$$

故平方根的第二個數字是 3，然後再從 15225中減去12900，剩下2325，這就是最外圍由兩個青色長方形和轉角黃色小正方形丙所組成的矩之面積。

最後一個步驟就是求出平方根 abc 的最後一個數字 c。再一次，青色長方形的長就是黃色正方形甲的邊長（朱色長方形的長）加上黃色正方形乙的邊長，也就是 230。因此這問題就成為找出平方根 abc 的最後一個數字 c，使得

$$2 \cdot 230 \cdot c + c^2 \leq 2325$$

結果當 $c = 5$時，兩個青色長方形的面積是

$$2 \cdot 230 \cdot 5 = 2300$$

還有 $c^2 = 25$，合起來就是 2325，這表示了

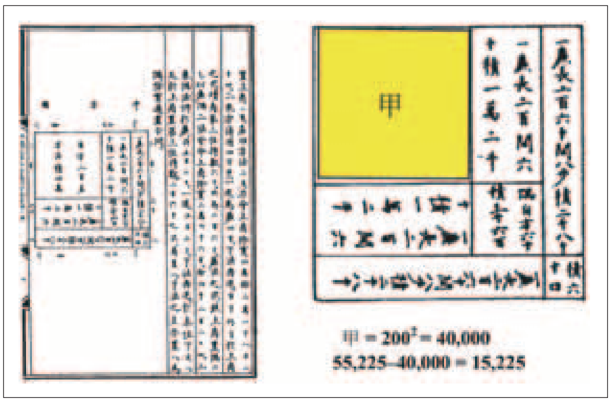


圖 19

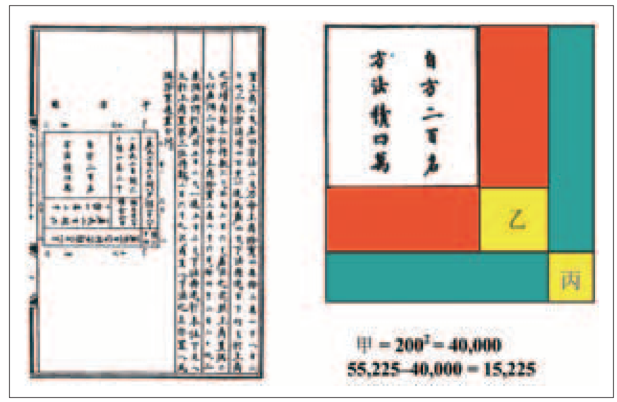


圖 20

55225 的平方根就是 235 。

這個算則所給的求平方根方法，完全是一般性的方法，而且可以精確到任意想要的位數，明顯優於《筭數書》中的盈不足術。從最佳估計的架構來看，《九章算術》的確如其「開方」的字面意思，將平方（根）打開了，而且還透過分析開方術背後的原理，利用理論的層次認識到該算則的威力，可以一步一步求得平方根的精確值，想要多接近都可以。（本文將於下期刊完）

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉

http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

2012 年，作者為交通大學人文與社會科學研究中心的訪問學者，作者將該年在清華大學演講的材料整理後，於同年 9 月 20 日在哈佛大學費正清中國研究中心受邀作下列演講：“The Evolution of Mathematics in Ancient China: From the Newly Discovered 數 *Shu* and 算數書 *Suan shu shu* Bamboo Texts to 九章算術 *the Nine Chapters on the Art of Mathematics*.“，並發表於 *Notices of the ICCM* 2（2014）no.2。作者感謝交大的邀訪與當時郭書春、洪萬生、徐光台、琅元（Alexei Volkov）、鄒大海的寶貴意見。

譯者簡介

林倉億畢業於師大數學所，現為台南一中教師、清華歷史所博士班學生，著有《數之起源》（合著），譯有《爺爺的證明題》（合譯）與《溫柔數學史》（合譯），曾任《HPM 通訊》副主編。

延伸閱讀

▶洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》（2006），臺灣商務印書館。

▶郭書春《九章算術新校》（2014），中國科技大學出版社。這是郭書春匯校《九章算術》的第三版（之前為 1900 與 2004）。

▶ Rowe, David E., Horng, Wann-Sheng（Eds.）*A Delicate Balance: Global Perspectives on Innovation and Tradition in the History of Mathematics: A Festschrift in Honor of Joseph W. Dauben*（2015）, Spinger。這是慶祝道本周 70 歲的論文集。