數學之美

從一個神經科學實驗講起

作者：**曼弗德 David Mumford**　譯者：**周樹靜**

曼弗德為美國代數幾何學家，長期任教於哈佛大學，
曾獲費爾茲獎（1974）、麥克阿瑟獎（1987）、沃爾夫獎（2008）。
他後來轉往應用數學，研究視覺與模式理論，現為哈佛與布朗大學退休教授。

針對數學的普遍特性，一般大眾對兩個問題相當感興趣，一是數學家很喜歡談的「美麗結果」，到底是什麼意思？其次是做數學研究時，是否有一些特定的大腦皮質會十分活躍？

最近，阿提雅（Michael Atiyah）和哲吉（Semir Zeki）兩位教授合作，以令人訝異的實驗研究將兩個問題合而為一，名為〈數學美感經驗與其神經關連〉（The experience of mathematical beauty and its neural correlates）。他們請 15 位數學家檢視 60 道公式，以醜、中性、美為這些公式評分（見 56 頁 BOX），同時以功能性核磁共振造影（fMRI）掃描他們的腦部。這項研究的主要結論是美感評價和內側眼窩額葉皮質（medial orbital frontal cortex; mOFC）有某種程度的關連（雖然 mOFC 活動相對於基準線減弱的現象有點奇怪）。

這篇文章的主旨，是要論證主觀性與參與者從事數學活動時的興奮感（包括美的知覺），會因數學家不同而有很大的差異，因此思考數學時很可能牽涉到相當不同的腦區。我的說法並沒有什麼科學根據，主要是來自我與數學同仁的互動交談，驚訝的發現大家「做數學」的方式真是南轅北轍。

容我先向讀者致歉，大部分我想說的，即使你不是數學家也能理解，但是為了言而有據，我不得不述及許多數學家與數學結果，這些部分可能只有我的數學家朋友比較熟悉。文中我為非數學家提供一些讓想法更明白的背景，但這種折衷並不容易。

我認為數學家可以分成幾個部落，區別在於促使他們進入神祕思考世界的不同強烈動因。我喜歡把這些部落稱為「探險家」（Explorer）、「煉金師」（Alchemist）、「角力士」（Wrestler）、「偵探」（Detective）。當然，有許多數學家往返於不同的部落，某些數學結果也很難明顯歸類於某一個部落的特性。

探險家喜歡追問有什麼東西具備怎樣怎樣的性質？以及如果有的話，總共有幾種。探險家覺得他們正在發現遙遠數學洲陸的風土，倚靠純粹思考的力量或靈光閃爍，傳回異國事物的訊息。對他們而言，最美麗的東西莫過於他們發現的全新物事（最近大家流行說的「亮閃亮閃的東西」❶），這種想法更被他們之中名為「尋寶家」（Gem Collector）的子部落奉為圭臬。探險家部落裡還有另一個子部落稱為「地圖測繪師」（Mapper），他們希望能提供描述新大陸的某種地圖，而不僅止於景點要覽（sehenswürdigkeiten）而已。

煉金師最興奮的事，是找出兩個原來毫不相干的數學領域彼此之間的連結，這就像是把一個燒瓶中的液體倒入另一個燒瓶，然後令人驚奇事情就發生了，好像爆炸一樣！

角力士把焦點放在不同物體的相對大小或強度，他們的蓬勃發展靠的不是數與數的等式，而是不等式──某個量能否用另一個量來估計或限制，漸近的估計成長的大小或速率。這個部落主要是由分析學家與擅於測量函數大小的「積分人」所構成，但是所有領域的人都受到他們的吸引。

最後，偵探則是固執的追索最困難深刻的問題，到處找尋線索，確定保有持續追查的路線，經常要花上數年或數十年的光景。這個部落有一個稱為「露天採礦者」（Strip Miner）的子部落，其中的數學家相信在可見的表層下方有一整個隱藏的礦層，因此必須先剝除表面的地層才能真正解決問


曼弗德（維基）

題。這個隱藏的礦層通常更抽象，就像語法語言學家所追求的「深層結構」（deep structure）一樣。另一個子部落稱為「施洗者」（Baptizer），他們為事物擇取嶄新的名稱，藉由形式的定義與命名，才讓原先隱藏的關鍵物件得以展露其重要意義。

探險家

底下，我想針對每一部落，舉出他們認為優美的結果，以及部落中我所知道或交談過的數學家。

探險家部落最典型的發現是古希臘的五個柏拉圖物體，也就是僅有的凸正多面體（經由旋轉，可以將某頂點或面轉到另一頂點或面的多面體）。這項發現有人歸功於泰阿泰德（Theaetetus），柏拉圖曾經在他的對話錄〈蒂邁歐篇〉（Timaeus）中描述過，並由歐幾里得在《原本》中仔細構造出來。有件事很有趣，就我所知，不論是印度或中國的典籍，在 17 世紀與西方數學傳統交會之前，完全不曾出現 12 面體與 20 面體的記載。

將數學宇宙從三維擴張到高維的想法，啟動了一波探險家的淘金潮。19 世紀，瑞士數學家司拉弗里（Ludwig Schläfli）將正多面體的名單延伸到 n 維，四維有六種，更高維度則都只有三種。到了 20 世紀，探討所有可能的低維流形（無論是拓樸、分段線性或光滑的分類）一直是大家矚目的焦點。

我很熟識與我同一代的數學家瑟斯頓（William Thurston）。就我而言，他顯然是探險家部落的一員。瑟斯頓是絕妙的拓樸學家，更令我好奇的是他天生斜視，因此對三維世界的理解，被迫要更依賴大腦的頂葉區域（parietal area）與手眼協調，而非靠枕葉皮質（occipital cortex）以立體視覺來學習。我從沒碰過任何人具備與他類似的視覺化技能，或許寇司特（Harold S. M. Coxeter）是例外。

不過探險家型的數學家並不全是幾何學家，有限單群（finite simple group）的全面表列無疑是 20 世紀最優美與令人驚異的發現之一。亞丁（Michael Artin）雖然不是標準的探險家（他的後半職涯奉獻給偵探型的研究），但他發現了一片極為豐富的非交換環（non-commutative ring）世界，介於近乎交換與完全無限制的廣大領域中間 [2]。他踏入的是沒有人有概念可以發現什麼的大陸，這項探險仍在進行中。另外還有最奇特、近乎神學的「高階無窮」領域，這是集合論者所揭露的世界。

我自己的職涯集中在「地圖測繪師」這個子部落。我所繪製的地圖是解形的模空間（moduli

[1] bright shiny objects 用現在更通俗的說法，就是 bling bling 的東西。

[2] 所謂「環」是具備加法與乘法運算的集合，但容許乘法滿足 $x \cdot y \neq y \cdot x$。

阿提雅與哲吉的 60 道公式

下表列出阿提雅為這次實驗選的 60 道公式，本來的文件中還有各公式的簡短說明，但這裡因篇幅限制刪除。

1	$1+e^{i\pi}=0$	21	$\pi=\frac{c}{d}$	41	$n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(n))$
2	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	22	$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	42	$\chi_\Omega(\exp X)=\int_\Omega e^{i<F,X>+\sigma(F)}$
3	$V-E+F=2$	23	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$	43	$V_n(r)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^n$
4	$\int_M KdA+\int_{\partial M}\kappa_g ds=2\pi\chi(M)$	24	$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$	44	$S^2\cong\mathbb{C}P^1\cong SO(3)/SO(2)$
5	$e^{ix}=\cos x+\sin x$	25	$\lVert x+y\rVert\leq\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$	45	$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2\times}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\to 0$
6	$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$	26	$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$	46	$R^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta;\lambda]}=0$
7	$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},s\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(s)>1$	27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}$	47	$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$
8	$\exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$	28	$3^2+4^2=5^2$	48	$\{\gamma_i,\gamma_j\}=2\eta_{ij}$
9	$\mathcal{F}_x\left[e^{-ax^2}\right](k)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2k^2/a^2}$	29	$\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$	49	$1=\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)$
10	$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	30	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$	50	$A\cap A^C=\emptyset$
11	$2^{\lvert S\rvert}>\lvert S\rvert$	31	$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	51	$U^C=\emptyset$
12	$z_{n+1}=z_n^2+c$	32	$\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=\frac{a}{1-r},\lvert r\rvert<1$	52	$A=\int_{\sigma(A)}\lambda dE_\lambda$
13	$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(y)dy$	33	$\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f\circ T^k$	53	$\int\theta d\theta=1,\quad\int d\theta=0$
14	$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4396^{4k}}$	34	$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega$	54	$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
15	$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$	35	$\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{4}}$	55	$\Delta\varphi=0$
16	$a^2+b^2=c^2$	36	$<B,B>_t=t$	56	$x^2-ny^2=1$
17	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds=f(x)$	37	$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^k)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$	57	$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0$
18	$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}(f,a_k)$	38	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\geq\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}$	58	$a^n+b^n=c^n,\quad n>2$
19	$\frac{dx}{dt}=x(\alpha-\beta y),\quad\frac{dy}{dt}=-y(\gamma-\delta x)$	39	$\lvert\emptyset\rvert=0$	59	$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$
20	$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$	40	$T=de+\omega\wedge e,\ R=d\omega+\omega\wedge\omega$	60	$\nabla_\mu\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)$

#21 為圓周率等於圓周長除以直徑。

spaces of varieties，這是有限維的空間）與歐氏空間子流形的模空間（無窮維的空間）。不過，我們有證據相信最早的探險家部落成員，甚至最早的數學家，基本上是地圖測繪師。我所想的是以楔形文字書寫勘查泥板的故事，當時世界上最早的組織性國家，正面臨記錄田地所有權與從農民課稅的政務。很幸運的，人類擁有許多西元前 3000 年到約前 500 年的美索不達米亞泥板，其中許多泥板包含土地的簡圖，或因勘查業務而生的幾何建物的地圖。很顯然，應該就是這些泥板抄寫員接著發明了幾何代數、畢氏法則以及二次方程，這是基於實際的土地運用與會計難題而產生的。他們對於證明並不感興趣，只關心土地測量例如距離與面積的各種演算法，他們稱之為手持繩索與測量蘆葦的女神尼莎芭（Nisaba）的智慧。

阿提雅 / 哲吉的公式名單中只有很少的探險家結果，或許是因為他們的成就通常不以公式呈現，但是其中仍然包含了三顆寶石：#12 的曼德布洛特集（Mandelbrot set）；#15 是將一整數以兩種方式表成立方和，因為拉曼努真（Srinivasa Ramanujan）將這個表式告知里特伍德（John Littlewood）而聞名；#28 是 $(3, 4, 5)$ 可構成直角三角形。

順便一提，由費德曼（Bob Feldman）和洛克摩（Dan Rockmore）所啟動的 Concinnitas 計畫 [3]，邀請了十位數理科學家選出十個公式（見延伸閱讀）。其中包含了從有限單群選出的一顆寶石：芮（Rimhak Ree）所發現的群。另外，在我自己研究裡帶來無窮樂趣的事情之一，就是發現特別而無人知曉的幾何物體，例如我曾發現一個負曲率的代數曲面，但是它的同調群卻和正曲率的 $\mathbb{P}^2$ 一樣。

煉金師

對許多人來說，數學中最美妙的結果，莫過於面對兩個非常遙遠的主題，卻能揭露兩者之間的深刻關係，例如代數與幾何、代數與分析，或者幾何與分析之間的連結。這樣的連結暗示了某種隱藏的統一性，只是以前被我們的凡人之眼所忽略，唯有偶然窺見時才綻放炫目的光芒。

一個早期的範例是三等分角的幾何問題與解三次方程的代數方程之間的連結。前者是古希臘傳統的重要未解問題之一。而在文藝復興時期，義大利代數學者發現了一個神祕的三次方程的解公式，即使在根都是實數解的情況，他們的公式本身卻導引出複數以及其立方根解。大約 1593 年，法國數學家韋達（François Viète）成為建立其間連結的「煉金師」，他說明一旦可以三等分角就可以解相對應的三次方程，反之亦然。不過要一直等到 18 世紀，另一個法國數學家棣美弗（Abraham de Moivre）才能以他的公式

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathbf{i}\sin n\theta$$

真正解釋這個結果，這也是不折不扣的煉金術。不過我會將 18 世紀與 19 世紀初的大數學家──瑞士的歐拉與德國的高斯歸類為「露天採礦者」，他們揭示了隱藏於複數代數背後的二維幾何。棣美弗公式的歐拉形式出現在阿提雅 / 哲吉公式名單的 #1 與 #5。

[3] Concinnitas 是文藝復興時期的傑出全才學者亞伯提（Battista Alberti）提出的美學概念，意味凌駕於數、形、位置之上的整體和諧法則。

另一位典型的煉金師是我的博士論文指導老師查利斯基（Oscar Zariski），他最深刻的工作，是揭示了由純代數學家所發展的交換代數工具，擁有重要的幾何意涵，能夠用來解決某些代數幾何義大利學派所引出的混亂議題，尤其查利斯基主定理（Main Theorem）以及解消奇點的研究，更說明了整閉包（integral closure）與賦值環（valuation ring）概念與幾何的關係。他經常說最好的研究不是證明新定理，而是創造可以一用再用的新技術。

黎曼 / 洛可定理（Riemann-Roch theorem）是煉金師知名的寶貴資源。剛開始，這個定理連結了複分析與代數曲線的幾何理論，然後藉由純代數擴張到特徵數 p 的情況，然後又被賀茨布魯赫（Fritz Hirzebruch）用當紅的代數拓樸工具推廣到高維。接著阿提雅和辛格（Isadore Singer）將它連結到一般橢圓偏微分方程組，一舉將分析、拓樸、幾何連結起來。阿提雅很謙虛的沒將這個公式放到名單中，不過他倒是手書其中的特殊情況——賀茨布魯赫示標公式（Hirzebruch signature formula），收在費德曼 / 洛克摩的 Concinnitas 計畫中，以細點蝕刻（aquatint）製成版畫呈現。

在這一系列公式版畫裡，還囊括了戴森 / 麥克唐納（Dyson-MacDonald）的 $\tau(n)$ 組合公式，這些是複分析的數值，是顯然的煉金師傑作。最後，還有一道十分怪異的 $1/\pi$ 公式，是阿提雅 / 哲吉的 #14 公式。我懷疑作者收錄這道公式，是因為他們猜測許多人會認為這是個醜公式。這道公式的來源我毫無概念，不過發現它的人隸屬於「巴洛克煉金師」子部落 4。它和 π 更簡明但無疑是煉金公式的 #30 正好形成對比。

角力士

與數的角力可以回溯到阿基米德，他喜歡估計 π 值，玩賞巨大的數。至大和至小對角力士充滿了吸引力。微積分出自牛頓與萊布尼茲的研究，就萊布尼茲的微積分思路，我們必須區分無窮小（infinitesimal）與無窮小的平方，相較之下，後者比前者是更無窮的小。對無窮大和無窮小採取放任的心態，主導了 18 世紀數學家的思考，更導致荒腔走板的煉金研究，像是以下頗為奇怪的公式就來自歐拉：

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$$

當然，歐拉知道這些算式只有從很特別的角度來觀看才有意義，他自己並沒發瘋。事實上，也許有很多人會認為上述式子是很美的公式。在那個世紀，更值得注意且能讓人理解的角力士成就，是逼近 $n!$ 的史特靈公式（Stirling's formula，#41）。

角力士部落的現代之父應該是 19 世紀的法國數學家柯西（Augustin-Louis Cauchy），正是他最後將微積分嚴格化了。以他為名的柯西不等式，也就是，兩向量內積的絕對值小於或等於兩向量長度的乘積：

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|$$

仍然是數學中僅有最重要的不等式。阿提雅 / 哲吉將與它相關的三角不等式放在 #25。

我所受的訓練不是角力士，不過後來因為應用數學的研究而學到一些。我真心愛上俄國分析學家索柏列夫（Sergei Sobolev）美妙的不等式，其中最簡單的情形足以描述許多近世角力士所處理的問

題：設 $f(x)$ 是光滑實函數，對任何兩個實數 a、b ，有以下柯西不等式的簡單推論：

$$(f(b)-f(a))^2 \leq |b-a| \cdot \int_a^b (\frac{df}{dx})^2\, dx$$

於是數學家會說導數的平方積分上界「控制」了逐點的函數值。

當我在哈佛大學教代數幾何時，我們習慣將紐約大學庫朗學院的分析學家想成場上的壯碩漢子，全部都是角力士。相反的，我也聽說他們用「法國酥餅」這種字眼，描述穿越大西洋從巴黎傳到哈佛的抽象數學方法。

除了庫朗學院的一干數學家，丘成桐是我曾經接觸最令人讚嘆的角力士。有一次，他展示如何很快的推導出一堆我竭思耗神想要處理的不等式，他告訴我掌握這項技巧是他研究生學習過程的一大步。

重要的是我們必須認識到，在純數學的世界之外，不等式對經濟學、計算機科學、統計學、對局論、作業研究等領域來說，都是核心工具。或許唯有純數學才是脫離常軌執著於等式，而大部分的現實世界則是以不等式來運作。

阿提雅 / 哲吉名單上的角力士公式，還有 #11 的康托不等式、#26 的質數定理、 #38 的對數凸性。

偵探

針對費馬的宣稱，當 $n \geq 3$ 時，$x^n + y^n = z^n$ 沒有正整數解，懷爾斯（Andrew Wiles）說他曾經著魔般的鑽研了八年。在美國公共電視網（PBS）的訪談裡，懷爾斯這麼描述這段經過 [5]：

我習慣每天進書房，試著找出模式。我嘗試做些計算來解釋一小部分的數學疑問，嘗試將它與某些數學已知的廣闊架構整併，進而釐清我正在思考的特定數學問題。有時我會去查書，看看別人怎麼處理，有時我得試試更改想法，再多做點計算，有時我會發現這些以前根本沒人研究過，甭談如何運用。這時我就得發展全新的想法，該如何解決還是一個謎。這個問題基本上一直盤旋在我腦海。一早醒來想到它，鎮日思考不懈，一直到就寢也不放過。如果沒有他事分心，這個問題就會這樣無時無刻占據我的心神。唯一能令我放鬆的只有跟小孩相處的時光，年幼的他們根本對費馬毫無興趣，他們只想聽故事，而且絕對不讓你沾別的事情。

雖然懷爾斯的情況比較極端，但這樣的追索過程所有數學家都能心領神會。英國數學物理學家潘洛斯（Roger Penrose）也曾經類似的描述他的研究方法：「我自己的思考方式是長期的琢磨，我希望能深刻而長遠的理解問題……從來不曾放棄這些問題。」

基本上，這就是大眾對數學家的標準看法──尋找線索，追蹤足跡，時而踏入死巷，其目的只在於追求大定理的證明。不過我認為更正確的說法是，這是做數學的一種方法，一種風格。許多這樣的數學家擔心會被某個他們永遠無法完成的陷阱所困。普林斯頓高等研究院的沙納克（Peter Sarnak）曾經用一句話描述數學家的感受：「數學家固有的心境就是處處受阻。」

---

[4] 其實這個公式來自拉曼努真，在數值計算 e 時很有用，後來也有更「華麗」的推廣。

[5] 見 PBS NOVA 網頁：http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/andrew-wiles-fermat.html

克累（Landon Clay）贊助選出七個數學最深刻而困難的問題，並給予每道難題獎金百萬美元，但這對數學的功過難論。為數學證明賦予金錢價值是件很怪的事，而目前唯一夠資格的得獎者帕瑞爾曼（Grigori Perelman）更回絕了這筆獎金。不論如何，我相信數學家通常都很嫻熟於某個範圍的相關問題，即使不見得會積極的研究其中任何一個問題，但是這些問題從不會遠離他們的意識。偶而，有些線索會顯現，或許是某種連結的暗示，然後很多擱置的想法突然又出現，幸運的話，這些問題中的一個或許能有所進展。

在這些想解決大問題的數學家當中，有一小群人能夠針對問題，思考無他人能及、更深層、更抽象的意義。他們這樣的偵探認定答案深深埋藏，必須剝除情境中所有偶然的，因此與正確理解毫不相干的特性，只有在底層才能發現真正的機轉、啟動一切的根源。邏輯上似乎只能稱這些人為有點不雅的「露天採礦者」，但我並無貶意。20 世紀中，能實踐此哲學最偉大的近代數學家是格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）。在我遇過的所有數學家中，他是我可以毫無保留稱之為「天才」的人，當然在他之前還有別人。

我認為歐多克索斯以及他精神上的繼承者阿基米德都是「露天採礦者」，他們所到達的層次基本上就是實數的嚴格理論，以此他們可以計算許多特別的積分。歐幾里得《原本》的第五章與阿基米德的《力學定理的方法》（*The Method of Mechanical Theorems*）[6] 足以見證他們挖掘的深度。幾個世紀之後，印度的阿耶波多（Aryabhata）也十分獨立的深掘到近似的層次，他基本上發現了導數，並將它引入特定的微分方程。不過我們不可能以文獻完整證明這些數學家的成就，因為他們的研究目前只剩斷簡殘篇，我們也無法充分重建他們工作時代的數學世界，也就是他們的發現脈絡。

不過格羅騰迪克不論是概念，還是他研究時之前與之後的數學世界，都有非常清楚的文獻紀錄。他認為解決數學問題的實質工作，就是找到合宜的層級（le niveau juste），讓我們得以用妥適的普遍性層次，為問題找到正確的敘述方式。事實上，他基進的抽象概念如概形（scheme）、K 群等等，因為解決大量的老問題並轉換整個代數幾何的風貌，充分證明了這些概念的價值。亞丁、泰特（John Tate）和我在為他寫的悼文中記錄了四項他最偉大的成就，這篇文章將刊登在今年初的《美國數學學會會訊》（*Notices*）上。這真是無上美味的法國酥餅。

對我來說，阿提雅 / 哲吉名單上有許多公式出自「施洗者」子部落。#10 是 e 的定義；#13 是δ函數的定義；#21 是 π；#24 是固有向量（eigenvector）；#47 是莫比烏斯映射（Möbius map）；#48 則是克里弗德代數（Clifford algebra）。

他們的名單中有很多公式我還沒提，其中許多似乎是理論尚在發展的暫時結果，是進行偉大研究的偵探所發現的。我很難評斷那一條公式比較美。它們之所以吸引人，是因為召喚了它們置身其中的優美理論。例如 #36 的$< B, B >_t = t$，布朗運動的變異數十分重要也很美，不過我認為這是更基本原理的自然結果，也就是將兩個獨立的隨機變數 X 和 Y 相加，其和的標準差是畢式定理的隨機性版本：

$$\text{St.Dev.}(X+Y) = \sqrt{(\text{St.Dev.}(X))^2 + (\text{St.Dev.}(Y))^2}$$

腦區如何對應不同形式的美感

很顯然不同部落的人，對於特定數學公式或定理的相對之美會有不同的評斷。我想依序討論各個部落，討論他們的大腦可能會發生哪種皮質活動。

許多探險家顯然能從《自然系統》（Systema Naturae）[7] 感受到巨大的悸動——那些他們探險家同僚所找到的奇草、異獸、輿圖、地誌。詭奇的生物例如四維空間的非標準微分結構，持續驚撼與抗拒常人的視覺化。不過我懷疑幾何學家有種心靈技巧，讓他們能以三維技能為基礎，支撐其高維幾何構造的感受。於是幾何構造像是手術操作（surgery）與雙錐操作（suspension），可以從最簡單情況的視覺化開始，然後心靈基於此建立一種技能，讓更普遍的情況都能以類比來掌握。我記得查利斯基上課偶而掛黑板時，會在角落畫一條代數平面曲線（具有二重交點的三次曲線）藉以重啟他的直觀。

柯斯林（Steve Kosslyn）等人曾經用 fMRI 研究受實驗者形成某物體視覺心象時的皮質活動 [8]，發現腦部似乎有模式複雜而範圍廣泛的活動，包括額葉、頂葉、顳葉，同時在我猜測很接近哲吉的 mOFC 區的活動則受到抑制（參看前引文章 231 頁圖首列的藍色區域）。不過非幾何學家在他們的研究裡可能永遠用不到視覺化。有一則關於代數學家卡普朗斯基（Irving Kaplansky）但真實性存疑的故事，說他被問到思及「環」時腦裡看到什麼，卡普朗斯基回答說：「我看到字母 R。」

最為大家共推的「美麗」公式是煉金師的傑作，也就是知名的

$$e^{\mathbf{i}\pi} = -1$$

這道公式結合了指數增長和圓的幾何。當一道公式將兩個彼此絕對無關的概念連結起來，你會感到背後一陣涼意，感覺彷彿宇宙並無必要如此運行，於是無法不問上帝「祢為什麼讓這一切發生？」也就是說，那種緊纏不放的神祕感很難驅散。當我們無法理解為什麼會發生某種事，感受到某種神祕事件時，哪一個腦區會活躍呢？想設計 fMRI 實驗尋找「神祕中樞」應該不太容易，不過我相信煉金師在這種神祕裡感受到無比之美。

角力士的心中感受又是什麼呢？我的猜測是估計數學物事的大小和相對強度，和我們的社交行為也就是與達爾文式的最適者天擇有關。動物的一生所關注的是要夠強壯以獲取所需。很多物種生存在社會階層架構中，個體必須儘快的學習應該順從誰，可以控制誰。鄧巴（Robin Dunbar）發現生物有效社交群的大小隨著腦子的大小呈指數成長，因此人類的大腦應該有大範圍的皮質區域，貢獻於深刻理解大群體的互動，平均來說，他估計一個人的朋友數量大概是 150 人，所謂朋友是那種「你偶然在酒

---

[6] 譯註：*The Method of Mechanical Theorems* 一般簡稱為 *The Method*。原先以為亡佚，但 1906 年因發現阿基米德羊皮書而重見天日，其精彩過程，讀者可參看《阿基米德寶典：失落的羊皮書》（2007），天下文化。

[7] 譯註：《自然系統》是瑞典生物學家植物學家、動物學家林奈（Carolus Linnaeus）的鉅著，知名的林奈分類法即出自此書。

[8] Giorgio Ganis, William L Thompsona, Stephen Kosslyn, “Brain areas underlying visual mental imagery and visual perception: an fMRI study”, *Cognitive Brain Research* 20（2004）issue. 2

吧遇到，可以毫不尷尬加入一起喝酒的人。」

雖然我還沒看過以此為研究焦點的腦部實驗，我覺得大腦必然會有塊皮質區域專責於學習社交結構與其中包含的雙人關係複雜網絡（也許是前扣帶迴皮質（anterior cingulate cortex））。由於這些活動在我們的大腦和生活中都如此重要，因此我覺得在賦予數學物件（尤其是函數）各種大小結構（如成長率、光滑程度等）時，我們會運用到這些內建的、創造社層階序的機轉。我的意思並非將數學的大小結構擬人化，我只是認為基於演化，我們早已具備製作類似偏序圖（partially ordered graph）結構的能力。

解決謎團是偵探部落的基本動機，也是賦予他們最大快樂的目標。在這種情況，並不需要美麗的公式來概括他們的解答，光是證明本身就夠奇妙而優美（懺悔：我個人發現像數獨這種愚蠢的謎題還真令人愛不釋手），這顯然是前額葉活動的主要面向——計畫你的活動，就像在世上要找到一條受制於各類條件卻能走到預定目標的路線。不過數學和真實世界有點不同，你也得預作準備可能會顛倒路線，證明相反的敘述。或許在虛軸之外，黎曼 ζ 函數真的有實部不是 1/2 的零點[9]。

總之，我以為將異土的抽象世界視覺化、尋找新神祕、創建閎大的階序、解決最困難的謎題，是數學家認為最優美的四個面向，每一種都具備了獨有的美感形式，連結到很不一樣的心靈生活。我們該期待每種美感的面向，都能固定對應到不同的大腦區域嗎？

想想 19 世紀顱相學那些局部對應的大部分特質，長久以來早已不再被當作特定皮質區域的標籤。數學美感的感知可能終究也會是更高層的衍生現象，以廣布於大腦各處的活動模式來刻畫。∞

本文出處

本文譯自 “Math & Beauty & Brain Areas” , Mumford Blog, 10/11/2015。感謝 Mumford 教授同意本刊翻譯。

譯者簡介

周樹靜為臺灣數學科普譯者。

延伸閱讀

▶ Mumford, David, Blog. 此部落格中有許多數學相關文章。

http://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog.html

▶ Zeki, Semir; Romaya, John; Benincasa, Dionigi & Atiyah, Michael "The experience of mathematical beauty and its neural correlates ", *Front. Hum. Neurosci.* （2014）.

http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fnhum.2014.00068/abstract

▶ The Concinnitas Project 網站，網站中有文中提到的十大公式版畫。這是由藝術書商 Bob Feldman 與數學家 Dan Rockmore 促成的合作計畫。近日《科學人》也將有相關介紹。

http://www.concinnitasproject.org

[9] 譯註：作者指的是黎曼假說：黎曼 ζ 函數除了無聊零點之外，其他零點的實部必定等於 1/2。