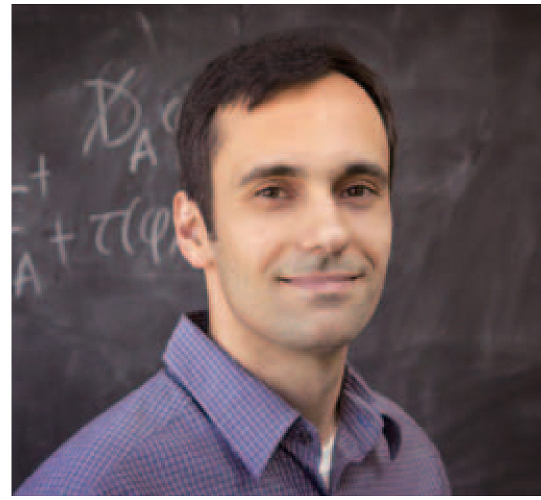
三角剖分猜想錯了

有些高維空間無法被分割

作者：哈奈特 Kevin Hartnett　譯者：尹恩

哈奈特是知名的科普作者，在《波士頓地球報》有專欄，
文章散見於各雜誌與報紙，並曾被收錄在《最佳數學寫作選集》中。



馬諾列斯庫發現他學生時代的研究，可以解決一個拓樸學的百年難題。（Reed Hutchinson/UCLA）

這個問題看似簡單：給定一個幾何空間如一個球面，或是一個甜甜圈狀的環面，是否可能將其分割成更小的元素？在球的二維表面的情況，答案顯然是肯定的。任何人都可以用三角形拼貼出任何二維曲面。同樣地，任何三維空間可以切割成任意數量的金字塔組合。

但更高維度的空間又如何呢？數學家長期以來感興趣的問題就是探討抽象空間或稱為流形（manifolds）的性質。流形每一個維度都有，那麼每個四維流形都能被切成更小的單位嗎？五維流形或具有任意多維度的流形呢？

這種切割空間的方法稱為三角剖分（triangulation），是拓樸學家用來取得流形性質的基本工具。「三角剖分猜想」指出所有流形都可以被三角化，這是拓樸學最著名的問題之一。

齊普里安．馬諾列斯庫（Ciprian Manolescu）記得第一次聽到三角剖分猜想，是 21 世紀初自己還在哈佛大學當研究生的時期。雖然馬諾列斯庫在剛進入哈佛讀大學時就被視為傑出學生（他的與眾不同是因為他是有史以來唯一一位連續三年在國際數學奧林匹亞競賽奪得滿分的選手），但是試圖證明世紀猜想仍然不是明智的博士生該選擇的那種論文計畫，於是馬諾列斯庫另外探討了弗洛爾同調理論（Floer homology）的主題，寫了一篇廣受推崇的博士論文。他的職業生涯中的第一個十年投入大量時間研究這個主題，並沒有花太多心思在三角剖分猜想上。他在最近的一封電子郵件中提到：「這聽起來是個難以著手的問題，所以我也沒有太注意它。」

其他數學家依舊在思考這個問題，但只能抓著仍然遙不可及的解決方案。目前在加州大學洛杉磯分校任教授的馬諾列斯庫，在 2012 年底有了意料之外的發現，他八年前在論文中建立的理論，正好能用來清除阻擋先前對此猜想種種嘗試的最終障礙。

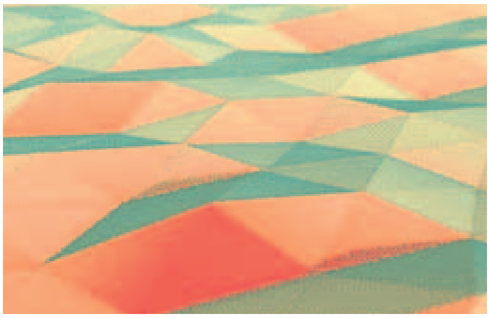
以這樣的領悟為基礎，馬諾列斯庫很快就證明並非所有流形都可以三角化。在這樣的過程中，他不僅將自己提升到他的研究領域的巔峰，同時也創造出具有巨大潛力的工具，能夠用來回答拓樸學中其他存在已久的問題。

完美的切割

19 世紀見識廣博的法國學者龐卡赫（Henri Poincaré）是第一位將流形想成由簡單元素黏貼而成的數學家。舉例而言，二維球面（亦即實心球的表面）可用二維三角形近似黏貼而成，而三維球體則可由三維四面體近似黏貼而成。三角形和四面體是所謂單體（simplex）的特例，這是在任何維度都可以定義的形體。

流形的三角剖分有許多用處。三角剖分提供一種具體方法，將難以看見的空間視覺化。它還為研究

Quanta 是西蒙斯基金會（Simons Foundation）出版但編輯獨立之網路科普雜誌（http://www.quantamagazine.org/），希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：https://www.quantamagazine.org/20150113-a-proof-that-some-spaces-cant-be-cut/
本刊感謝 QUANTA 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。



所有二維曲面都能用三角形鑲嵌拼貼而成，但更高維度的空間並不全然能夠如此「三角化」。（Glen Faught 繪）

人員提供了一個起點，得以計算一種重要的數學工具，稱為不變量（invariant）。

數學家用不變量來判斷兩個空間是否基本上等價。如果計算兩個流形的不變量並得到不同的結果，你就能知道這兩個流形在拓樸上是相異的。（反之不真，兩個相異的流形可能擁有一樣的不變量。）

理解這個想法的簡單例子，是計算一種稱為歐拉示性數（Euler characteristic）的不變量。要找出二維曲面的歐拉示性數，首先必須把它分割成多邊形的組合 ❶，然後計數頂點數，減去邊數，再加上面數。無論你用多少個多邊形將流形三角化，最後得到的整數都會一樣。球面的歐拉示性數是 2，環面是 0。在二維時，任兩個具有相同歐拉示性數且賦向性相同的流形在拓樸上都是相等的。

高維度的流形也具有歐拉示性數，但事情遠遠沒有這麼單純。舉例而言在三維時，有無窮多個相異的流形擁有相同的歐拉示性數。即便如此，三角剖分仍然是有用的工具，這自然引出一個問題：是否任意維度的流形都能三角化？

這個問題最先出現在 20 世紀初，對此問題的肯定回答後來稱為**三角剖分猜想**。起初，數學家假設三角剖分猜想必定是正確的，並在 1950 年代左右，證明了此猜想對一維、二維和三維流形皆成立。但隨著 20 世紀時間的推移，數學家發現高維空間缺乏許多低維流形所擁有的美好性質。這導致數學家開始懷疑三角剖分猜想在高維度可能是錯的，但卻沒有人能夠提出一個說法來否證。

存在不能被分割成較小單位的空間，這種想法似乎怪異而違反直覺。在此提供一個想法，想像在二維球面上鋪置三角形，直到整個球面被覆蓋。即使在這個簡單的例子，如何銜接最後的三角形與原有的三角形就不是容易的問題，關鍵是要仔細規劃如何鋪排。若將更多維度加入此情境，銜接第一個單體和最後一個單體的問題將會變得更加複雜。

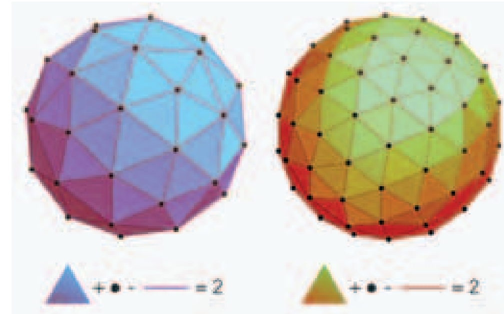
1982 年，當時任職於加州大學聖地牙哥分校的弗利德曼（Michael Freedman）構造出無法套用自然三角剖分的四維流形，這個成果幫助他獲得費爾茲獎。幾年後，耶魯大學的凱森（Andrew Casson）證明這些特殊的流形完全不能被三角化。但是弗里德曼和凱森都沒有說明三角剖分是否適用於五維或更高維的所有流形。這個問題的答案必須再等三十年，直到馬諾列斯庫接手這個難題。

四維的障壁

馬諾列斯庫專研低維拓樸，這表示他研究的是三維和四維流形的問題。五維以及更高維度的流形是否能三角化的問題似乎不在他的專業領域之中。但在 1970 年代，有三位數學家證明解決高維三角剖分猜想，等價於回答一個不一樣的低維問題。這種從一個問題轉換到另一個問題的情況在數學研究中很常見，而且往往可以為一個看似棘手的問題提供另一個嶄新的觀點。

1994 年，懷爾斯（Andrew Wiles）證明了費馬最後定理，但他實際上是解決了一個不同的問題，也就是谷山 / 志村 / 威伊猜想（Taniyama-Shimura-Weil conjecture）的半穩定（semistable）情況，更早之前，數學家已經證明這個情況可推導出費馬最後定理。

同樣的，在 1970 年代，兩位在普林斯頓高等研



「不變量」是數學家用來比較空間（或流形）的工具。本圖展示的是著名的歐拉示性數。給定任何二維流形，首先將流形以多邊形分割（這裡用的是三角形）；接著，將面數加上頂點數再減去邊數即得。每一個球面的歐拉示性數都是 2，不管流形如何分割都一樣。（Olena Shmahalo/Quanta）

究院的數學家斯特恩（Ronald Stern）和格婁斯基（David Galewski），以及獨立研究的第三位數學家松本堯生（Takao Matumoto）把三角剖分猜想從高維「化約」成低維的問題。

想從概念層次來理解這個方法，首先想像一個二維球面和一些二維三角形，這些三角形要黏合在一起，才能對球面作三角剖分。黏合三角形的一種方式是從其邊界的最高維部分（也就是一維的邊）開始，然後再換到下一維度的部分，也就是零維的頂點。

現在考慮譬如七維流形。你需要嘗試用七維單體來將它三角化。剛開始你可能會用和前述三角形一樣的策略，先將單體邊界的最高維部分（也就是六維的「邊」）黏合，再以此類推。

格婁斯基、斯特恩和松本的研究顯示，這個黏合過程剛開始可以順利進行，但在四維和三維之間的邊界可能會遇到阻礙。這個障礙大致可以歸結到一個稱為「同調 3 維球」（homology 3-sphere）的拓樸空間問題，障礙就發生在這些維度的邊界上。想要解決這個問題需要一種新的不變量，馬諾列斯庫最後在他的弗洛爾同調群的研究中找到這個不變量。

馬諾列斯庫的大突破

弗洛爾同調群是弗洛爾（Andreas Floer）在 1980 年代發展的數學工具，弗洛爾是一位聰穎的德國數學家，卻在 1991 年 34 歲時英年早逝。弗洛爾同調群已成為探討流形時非常成功的工具，現在與其說它是某種特定的操作，還不如說它已經是拓樸學的子領域。自從弗洛爾首次提出這個理論研究三維流形以來，其他數學家已經發明了幾十種弗洛爾同調群的不同型式，分別適用於解決不同種類的問題。1990 年代，馬諾列斯庫的哈佛博士論文指導教授克農海默（Peter Kronheimer），以及麻省理工學院的拓樸學家摩洛卡（Tomasz Mrowka），結合起源於量子物理的方程式與弗洛爾同調群，構建出威力強大的三維流形不變量，而馬諾列斯庫則在博士論文中提出他們理論的簡化版。摩洛卡說：「齊普里安 [發明] 了一個簡單且比較不技術性的方法來定義弗洛爾同調群，而且正因為它比較不技術性，因此更可以讓你展現創意，因為你不需要隨身攜帶一箱大工具就能完成工作。」馬諾列斯庫的論文把弗洛爾同調群變成更輕盈、更靈活的工具，但無論是他還是別人都無法立刻知道該怎麼運用它。所以這個令人印象深刻的傑作就靜置在那裡，沒有明確的應用。

同一時刻，凱森和挪威數學家弗爾雪夫（Kim Frøyshov）分別得到能部分解決三角剖分猜想的不變量，但這兩項進展都不足以解決這個問題。馬諾列斯庫說：「你的不變量必須具備兩個性質，凱森得到一個，而弗爾雪夫擁有另外一個。」

馬諾列斯庫開始思考凱森和弗爾雪夫在 2012 年年底的失敗嘗試，他很快的連續得到兩個重要的洞識。首先，他意識到弗爾雪夫不變量的主要限制在於它沒有運用某種 Pin（2）對稱性的優勢。接著，他發現自己八年前弗洛爾同調理論的研究，正好完美將此對稱性融入證明。

馬諾列斯庫說：「一切就只需要兩個 [失落的]

❶ 編註：依照原意應該用三角形來分割，不過即使用多邊形，這裡所討論的結果仍然正確。

想法。回頭來看，這些似乎很直接，但不知為何就是沒人看到。」

一旦馬諾列斯庫了解他的論文和三角剖分猜想之間的關連，便迅速著手解決問題。他說：「我很興奮，希望能盡快把它寫下來，我是那種日以繼夜的工作狂。」他花了一個月的時間寫下他對三角剖分猜想的完整否證。他發明一種新不變量，命名為 β，並用它來完成反證。

作法大致如下：如前述，三角剖分猜想相當於探討是否存在一種擁有某一特性的同調三維球。其中一個特性是其羅赫林不變量（Rokhlin invariant）必須等於 1。馬諾列斯庫證明一個同調三維球的羅赫林不變量如果等於 1，則 β 的值必須是奇數。但是與此同時，這些同調三維球的其他必要特性又要求 β 為偶數。因為 β 不能同時是偶數與奇數，因此這種特殊的同調三維球不可能存在。所以，三角剖分猜想是錯誤的。

弗洛爾同調群的新工具

2013 年 3 月 10 日，馬諾列斯庫在線上論文網站 arXiv.org 張貼了他文章的預印版，這篇論文目前正在接受《美國數學學會期刊》（*Journal of the AMS*）的審查 [2]。斯特恩稱馬諾列斯庫的證明為四維拓樸中「近幾年來最好的成就」。這項研究使眾人猜測馬諾列斯庫可能將贏得韋布倫獎（Veblen Prize），這是每三年頒發給幾何學或拓樸學中傑出研究的獎項。凱森、弗利德曼、克農海默和摩洛卡都曾獲這個獎項。

斯特恩說：「沒有人曾經想到用這個版本的弗洛爾同調群來解決這個問題，至少絕不是我，其絕妙之處在於馬諾列斯庫所採用的方法。」斯特恩補充說，他有一張非正式的「生前清單」，上面都是他想解決的問題，三角剖分猜想正是其中之一。他說：「我若不能解決它，至少也要知道答案，而現在我知道了。」

但馬諾列斯庫的證明還有一個更重要的影響，它提升了他自己的弗洛爾同調群版本的地位。摩洛卡說：「不論出於什麼原因，對於這項工具，人們還沒有深入了解到他們該了解的深度。」現在，隨著三角剖分猜想被否證，數學家正爭先恐後的學習使用馬諾列斯庫提出的有力工具。

目前，加州理工學院和德州大學奧斯汀分校的拓樸學家正在舉行馬諾列斯庫博士論文的研討會。摩洛卡也有兩個研究生正在重證馬諾列斯庫的結果，並改進他的方法以用於其他問題。馬諾列斯庫的技巧有助於解決四維拓樸以及其他重要拓樸子領域的問題，但沒有人確切知道它最後會被用在何處。

摩洛卡說：「我們似乎很難相信一個這樣美妙的新不變量，會對於相關領域的現存問題毫無應用。但是到底會是什麼應用，誰知道呢？這不就是研究的目的嗎！」∞

本文出處

Quanta, January 13, 2015.

譯者簡介

尹恩為臺灣科普譯者。

延伸閱讀

▶ Manolescu, Ciprian: “Lectures on the triangulation conjecture”（2015）.（在 Manolescu 的網頁還有其他介紹。）http://www.math.ucla.edu/~cm/Gokova.pdf

[2] 文章已經刊出，*Journal of the AMS* 29（2016）, 147-176.