書評

無窮小掀起大劇變

評論《無限小：一個危險的數學理論如何形塑現代世界》

作者：**洪萬生**

臺灣師大數學系退休教授，臺灣 HPM 發起人。

（商周出版提供）

前言

1632 年，伽利略因支持哥白尼「日心說」被宗教法庭判決有罪，處以終身居家軟禁。然而同年由天主教最具有影響力的耶穌會總校訂裁決的「無窮小量」（infinitesimal）教學爭議，卻經常為科學史家忽略。這也難怪，因為前者是西方科學史重大事件，尤其可視為科學 vs. 宗教議題的最佳切入點。至於後者呢，相對之下好像比較像技術問題。更何況無窮小量在邏輯推論上無法自圓其說，還真是讓反對人士在駁斥時占盡便宜！

現在，這個有關無窮小量及其相關的不可分量（the indivisibles）爭議已引起較廣泛的注意。譬如說吧，科學史家賽格雷（Michael Segre）就在他的《伽利略之後》（*In the Wake of Galileo*），以第四章〈不可分量〉專章力陳無窮小量在義大利被「撲殺」後銷聲匿跡，見證了這個國家科學黃金時代的終結。

《無限小》也呼應了這個見解。義大利耶穌會對不可分量的「撲殺」完全看不出宗教的「力道」，反倒是伽利略弟子或後繼者無法自圓其說，導致有關無窮小量數學（infinitesimal mathematics）發言權全面讓位。因此，固然伽利略（支持哥白尼「日心說」）的宗教審判事件，是導致義大利在 17 世紀下半沒落的主因，然而思想方面如不可分量的爭議，也是不容忽視的因素。而這當然是本書主題之一。

本書的另一個主題，則是英國數學家霍布斯（Thomas Hobbes）與沃利斯（John Wallis，本書譯瓦理斯）有關無窮小量的爭議。不過，這個故事的結局與義大利迥異。在英國，無窮小量及相關的不可分量概念最終勝出，成為英國科學家推許的最有力工具之一。這個勝利的後續結果由牛頓發明微積分提供最佳見證，看來也多少促成科學典範從義大利轉移到英國。

有鑑於無窮小量對吾人甚至今日微積分學生理解極限概念（concept of limit）的重要性，我在本文第二節中，將先說明它對微積分發明──尤其是對牛頓貢獻的影響。這些稍晚於霍布斯與沃利斯爭議事件的數學史實，絕對有助於吾人理解前述爭議的歷史意義。此外，正如第二節的論述進路，本文第三節簡介本書內容時，也設法從其他科學史相關論述與本書內容交互引述，藉以突顯數學在 17 世紀近代科學所扮演的關鍵角色。

無窮小量與微積分的發明

在西方數學史上，無窮小量一直是令人相當困擾的概念。事實上，即使是今日大學生學習無窮小量，也多半充滿挫折。究其根柢，乃是它那「可以任意小」的特性使然。我們且試看法國數學家

《無限小：一個危險的數學理論如何形塑現代世界》
Infinitesimal: How a Dangerous Mathematic Theory Shaped the Modern World
作者：艾米爾．亞歷山大（Amir Alexander）
譯者：麥惠芬
出版社：商周出版（2016）

柏克萊主教肖像。畫家 John Smybert 繪於 1727 年左右。（維基）

費馬（Pierre de Fermat）如何說明 x^2 的導數等於 $2x$：

令無窮小量為 o，則 $(x+o)^2-x^2=2xo+o^2$，等號兩邊都除以 o（$o\neq 0$），右邊等於 $2x+o$，最後捨去 o（令 $o=0$），得 $2x$，即為所求。

事實上，上述這種算法，即相當於微積分課本中的導函數計算：

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

因此，如果連今天的微積分學生對上述計算都深感困惑與挫折，就無怪乎英國主教柏克萊（George Berkeley）會批判這種「消失量的亡魂」（the ghosts of departed quantities）。事實上，柏克萊的批判主要是針對牛頓微積分理論中的無窮小量。我們且看他在《分析學家》（*The Analyst*）如何引述牛頓的流數法（the method of fluxion），底下引文出自牛頓於 1693 年撰寫的《曲線求積術》（*Tractatus de quaratura curvarum*）：

設量 x 均勻地流動，欲求 x^n 的流數（fluxion）。與 x 通過流動變為 $x+o$ 的同時，冪 x^n 變為 $(x+o)^n$。也就是，使用無窮級數方法（the method of infinite series）有

$$x^n+nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}oox^{n-2}+\&c$$

而增量（augments）o 與

$$nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}oox^{n-2}+\&c$$

之比為

$$1:(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}+\&c)$$

現在，假設增量消失，它們的最終比（ultimate ratio）將是 $1:nx^{n-1}$

上述這個論證，相當於證明 x^n 的導函數等於 nx^{n-1}。緊接著，柏克萊主教批評說：

然而，這種推理看來既不合理也不能令人信服。因為如果讓增量消失，亦即讓增量變為零，或者說沒有變量，那麼原先關於增量存在的假設也就不能成立，而由這假設引出的結果，即借助增量得到的表達式，卻必須保留。根據前面的引理可知 [1]，這種推理站不住腳。因為如果我們假設增量消失，理所

[1] 這個引理中，柏克萊指出：$(A+a)(B+b)-AB=Ab+aB+ab$，其中 a、b 分別是 A、B 的增量。而根據「偉大的學者」牛頓所言：「在數學中最微小的誤差也不可忽略。」（in rebus mathematics errores quam minimi non sunt contemnendi）。

當然也就必須假設它們的比、它們的表達式，以及由於假設其存在導出的一切，都將隨之消失。

最後，柏克萊不客氣地指出：

不論你通過有限的元素和比例得到什麼結果，它們都應歸功於流數。那麼什麼是流數呢？消逝增量的速度。這些消逝的增量又是什麼呢？它們既不是有限量，也不是無限小，又不是零，難道我們不能稱它們為消逝量的亡魂嗎？

在此，柏克萊指出這種無窮小量的特性「既不是有限量，也不是無限小，又不是零」，因此，吾人為何不能稱之為「消逝量的亡魂」？針對這樣的批評，牛頓在他的物理學革命經典《自然哲學的數學原理》（*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*，常簡稱為 *Principia*, 1687）（中文簡稱為《原理》）中，試著回應如下：

也許人們會反對說，消逝的量不存在最終比，因為這些量消逝之前的比不是最終的，而當它們消逝，也就沒有了。但用同樣的論證可以斷定，一個到達某一位置並停在那裡的物體沒有最終速度，因為在物體到達該位置之前的速度不是最終速度，而當它到達之後，速度就不存在。但答案很簡單。因為最終速度是指物體藉以移動的速度，這樣的速度既不是在它到達最終位置運動停止之前發生，也不是在那以後發生，而是在到達的瞬間發生……。以同樣的方式來說，消逝的量的最終比，要理解成既不是這些量消逝前的比，也不是消逝後的比，而是它們藉以消逝的比……

緊接著，牛頓似乎覺察到他自己使用「極限」計算流數時湧出的想法：

運動結束時可以達到但不能超過的極限是存在的，這就是最終速度。對所有開始產生或結束的量和比，也有類似的極限……這些量藉以消逝的最終比不是真正最終量（亦即沒有不可分量時）的比，而是這些無窮減少量的比始終收斂趨向的極限，它們比任何給定的差都更靠近這極限，但永遠不會超過這極限，而且在這些量無窮變小時也不能達到這極限。

如令 $s(t)$ 為位移，$v(t)$為速度，其中 t 為時間，Δt 為瞬間（變化量），則瞬時速度為

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=v(t)$$

這是現代的定義。根據牛頓的論證，這個最終比（上述極限式中的左式）並不是最終量 $s(t+0)-s(t)$ 與 $\Delta t(=0)$ 的比，亦即，瞬時速度（牛頓在此所謂的「消逝的最終比」）並不等於下列這個「真正的最終量的比」：

$$\frac{s(t+0)-s(t)}{0}=\frac{0}{0}$$

牛頓當然無法「理直氣壯地」回應柏克萊乃至今日讀者的疑惑。畢竟人類要等待近兩百年，亦即

到 1870 年代，柏林學派大師懷爾斯查司（Karl Weierstrass）建立極限的 $\epsilon - \delta$ 定義之後，所有有關無窮小量的邏輯困境才完全迎刃而解。

在上述引文中，儘管牛頓否認「不可分量」的存在，然而，他與萊布尼茲卻都是因為使用無窮小量這個無法進行嚴密邏輯論證的概念，才得以發明微積分。數學史家對他們兩人如何分享微積分發明者的頭銜早有定見，下引評論出自史家卡茲（Victor Katz）：

> 大家公認牛頓和萊布尼茲是微積分的發明人，而不是費馬、巴羅（Isaac Barrow）或其他人，原因是他們完成了四項任務：針對微積分的兩個基本問題，亦即極值和面積，他們都提出了相關的基本概念—對牛頓是流數和流量（fluent），對萊布尼茲是微分和積分。他們都發展了使人便於使用這些概念的符號和算法。此外，他們理解並運用這兩個基本概念間的逆關係。最後，他們使用這兩個概念，解決許多從前不能解決的困難問題。但他們都做不到的，是利用古典希臘幾何的嚴密性為他們的方法奠定邏輯基礎，因為他們都使用了無窮小量。

《無限小》內容簡介

本書除前言與後記外，共有九章。前五章納入第一部分，後四章納入第二部分。全書目錄如下：

前言　出國的大臣

第一部分　對抗失序的戰爭：耶穌會與無限小的對立

一、聖羅耀拉的弟子

二、數學秩序

三、數學失序

四、你死或我亡：「無限小」的戰爭

五、數學家的戰役

第二部分　《巨靈論》與無限小

六、《巨靈論》的出現

七、幾何學家湯瑪斯．霍布斯

八、約翰．沃利斯是何方神聖？

九、新世界的數學

後記　兩個現代

本書第一部分故事背景在義大利，尤其圍繞在反宗教改革運動（counter reformation）主角耶穌會，及無窮小量陣營數學家周圍。這條故事線的結尾，則是遭耶穌會清除無窮小量的義大利儘管成為「井然有序之地」，然而，在伽利略建立的科學典範終結之後，「義大利只剩下未來數百年的倒退與不振」。

至於清除無窮小量的方式，則是由五位耶穌會教職員組成的「總校訂」開會裁決。在本書第一章，作者就敘述在1632年8月10日，有五位穿著黑袍的總校訂進入羅馬學院，開會裁決一位不具名的「哲學教授」提案，其主題是「連續統（continuum）是由不可分量構成」。如以直線及其上的點為例，則此主張相當於「一條直線是由非常大量獨立且絕不可分的點所構成，而這些點像串起來的小珠子般並列。」這當然導出古希臘數學家熟知的矛盾：如果每個不可分的點有大小（part）[2]，那麼，這條直線的長度就會變得非常長；但如果每個不可分的點沒有大小（只有位置），那麼，這條直

克拉維。 Francisco Villamena 繪（1606），Jean Leclerc 雕版。（原書轉載，感謝商周提供。）

線就沒有長度。因此，他們最後裁定：「這個提案不只有悖亞里斯多德的一般教理，理論本身也不可信，而且……我們耶穌會不予認可，決定禁止。」

何以耶穌會如此仇視無窮小量或不可分量呢？除了無法與亞里斯多德哲學相容之外，我們也必須從羅耀拉創立耶穌會的背景（見本書第一章）[3]，及克拉維（Christopher Clavius）建立的數學教團（mathematical order）談起。

在第一章，作者說明羅耀拉在反宗教改革的浪潮中，如何利用「高等教育訓練及為教會與教宗狂熱獻身的精神，讓耶穌會成為一支歐洲前所未有的宗教軍隊。」而在耶穌會教學課程中，數學如何成為學習核心內容，就是本書第二章的主題。中譯本將此一主題譯為「數學秩序」，顯然是為了對照第三章主題「數學失序」（mathematical disorder）。其實 order 一語雙關，如指涉宗教團體，則更能突顯克拉維在耶穌會教育中，將數學（尤其歐幾里得幾何學）放在核心位置的煞費苦心。正如作者所指，這是因為在宗教改革風暴中，他很清楚「歐幾里得的方法成功做到的結果，正是耶穌會辛苦努力希望能達成的目標，也就是將真理的、永恆的、不變的秩序，強行加諸一個看起來混亂的現實之上」，因此，「縝密、有秩序且令人無法抗拒的數學對克拉維而言，就是耶穌會綱領的具體呈現。數學的邏輯必然性可以強行讓人接受真理並擊潰謬誤，建立起取代混亂和困惑的穩固秩序與確定性。」

為了幾何教學，1574 年，克拉維出版他編輯的歐幾里得《幾何原本》15 卷本（*Euclidis elementorum libri XV*），這正是他的學生利瑪竇（Matteo Ricci）與中國明末學者徐光啟中譯前六卷的母本。如果將這個版本對照希臘數學史家希斯（Thomas Heath）勘訂的《歐基里德幾何原本》（*Thirteen Books of Euclid's Elements*）[4]，那麼，我們一定可以看出克拉維在改編時表現的洞識與苦心。

不過，克拉維後來主持新曆──格里高里曆（Gregorian calendar）的制訂，成為 16 世紀歐洲最有名望的數學家，儘管他早年懷才不遇，還為了提升數學教學的重要，和耶穌會神學家劇烈衝突與對立。以上所有內容，我們都可以經由本書第二章，體會到克拉維強調的「歐幾里得在耶穌會教育中的關鍵地位」：

自始至終，即使在自己最先進的研究中，耶穌會也從未悖離他們對歐幾里得幾何學的承諾。這是他們數學實踐的教育核心與根本。歐幾里得幾何學並非時髦的選擇，而是深深堅持的思維理念，那就是學

利瑪竇與徐光啟。耶穌會教士 Athanasius Kircher 繪。（維基；Falvey Memorial Library of Villanova University）

習與教授數學的重點，完全在於數學展現了耶穌會普世真理如何理性、階級性地與絕對必要地加諸在這個世界之上。

而這是因為對他們來說，

耶穌會相信宗教真理會如幾何原則般強行加諸在世界之上，沒有任何新教或其他異端邪說可以閃避或否定的空間，而這些真理也將帶來教會必然的勝利。所有的耶穌會會員都必須依照歐幾里得的原則與步驟學習數學，否則就不應該學這門學科。

因此，

任何與這種實踐方式有所衝突的數學，不僅對耶穌會的目的毫無用處，還會對耶穌會真理永存的這份不變信仰形成挑戰，這可是天主教會依照階級傳遞下來的普世真理。

到了 16 世紀後期，以歐幾里得馬首是瞻的數學，已成為羅馬學院及其他耶穌會教育中最有威望的學科。在邏輯上無法避免自我矛盾的無窮小量（或不可分量）新數學，卻也在義大利逐漸萌芽，最終在伽利略及其弟子卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri）與托里切利（Evangelista Torricelli）手中，發展得相當成熟。這正是本書第三章的主題——數學失序。

事實上，第三章的主題是伽利略及其弟子。其中有關伽利略為何受審乃至最終居家軟禁，當然是大家熟悉的故事。不過，基於本書撰寫的目標，無窮小量（或不可分量）成為本章主要內容。譬如說吧，在本章我們可以看到作者相當詳盡地介紹卡瓦列里與托里切利如何利用不可分量的概念，來作為發現新幾何知識的工具，儘管他們兩人對這概念的認知不同。正如書中所說：「其間關鍵差異在於托里切利的方式確實結合所有不可分量線，將它們構成一個平面，而所有不可分量平面事實上也造就了一個立體的體積。」至於卡瓦列里則在他的證明中直接從「所有線條」進入「面

---

2 畢達哥拉斯將這種點稱之為「單子」（monad）。

3 羅耀拉本名是依納爵（Ignatius of Loyola），出生於西班牙巴斯克地區阿斯佩蒂亞（Azpeitia）的羅耀拉城堡（castle of Loyola）。

4 本書英文版中譯本《歐基里德幾何原本》由九章出版社出版。這個版本公認為是貼近真實的版本，只有 13 冊。克拉維的 15 冊版的最後兩冊，通常都認為是後人補寫。1850 年，清代中國數學家李善蘭與偉烈亞力（Alexander Wylie）合作，根據一本《原本》英文版翻譯了後九冊。最後，在 1860 年代，由曾國藩贊助，李善蘭將這兩份中譯本合併為《幾何原本》15 卷。又中譯本稱克拉維為丁先生，因為在拉丁文中 Clavius 是釘子的意思。

積本身」，從「所有平面」進入「體積本身」。試看現代高中數學或微積分教科書的卡瓦列里原理版本，我們或許比較容易體會他的用心良苦：

給定兩個一般高的立體形體。若它們在等高處的（平行）截面面積相等，則這兩個形體的體積相等。[5]

在這個版本中，卡瓦列里不需要交代這些（無窮多個）截面是否構成其各自形體，也因此，我們可以利用現代的定積分來嚴格證明此一原理。

第三章內容還包括托里切利（Evangelista Torricelli）的數學研究說明。過去我對這位科學家的印象僅止於他做的真空管實驗，乃至他發明人類歷史上第一個氣壓計。直到最近，經由勒西（Andrew Leahy）的研究論文[6]，我才認識他在數學方面的貢獻。事實上，在本書中，作者特別指出托里切利在一篇名為〈拋物線面積〉（1644）的論文裡，提出了 22 種針對「拋物線面積是同底等高之三角形面積的三分之四」的證明。前 11 種證明「遵照歐幾里得高標準的嚴格規範。為了計算一條拋物線包圍的面積，這 11 種證明利用了傳統的『窮盡法』（method of exhaustion）所發明的方式。」至於後十種證明呢，則揚棄傳統的窮盡法模式，改用不可分量法。「這些方法，一如托里切利指出，直接且具直觀性，不僅證明了這些結果為真，也證明了**為什麼**為真。因為這些驗證方式都是直接出自題目中的幾何圖形形狀與構成物。」總之，對他來說，「不可分量法是用『簡短、直接且明確的證明』驗證無數定理的一種『嶄新而值得讚賞的方式』。這種方式是『穿越數學叢林的皇家大道』，與之相比，古人的幾何學『惹人同情』。」

可惜，對於無窮小量（或不可分量）這種具有發現功能的概念，耶穌會數學家並不領情。在本書第四章中，作者敘述了耶穌會如何因教宗烏爾班八世繼位失勢，又在國際政治局勢丕變後重掌權力。而這種「失而復得」，甚至讓一向溫和自持的耶穌會數學家塔凱（Andre Tacquet）在他的《圓柱與環面四輯》（1651）中，也對不可分量下戰帖，表示：「不是你死就是我活」：

我認為不可分量的證明方式既不正當也不符合幾何……許多幾何學家都同意，一個點移動就會產生一條線，一條線移動就形成一個面、一個面移動就會造成一個立體。但一個不可分量經過移動而形成一個數量這樣的說法，與許多不可分量構成一個數量的說法大不相同。前者的真理經過了完全確認，後者卻會引發幾何戰爭，且其規模將達到不是你死就是我活的程度。

其實，耶穌會在伽利略接受審判那一年，亦即 1632 年，就已經對不可分量採取積極的禁絕措施。到了 1651 年，耶穌會為了維持「理論的強化與統一」，終於制訂「高等研究規定」65 則查禁清單，其中第 30 則為「無限的巨大數量都可以被圈限在兩個物體或兩點之間」。這是這份清單中最明顯具有數學論點的一則，顯然與卡瓦列里與托里切利有直接關係。至於禁絕的概念，則是「在測度上（數量值有限）的線條或圖形，可以分割為無窮多的不可分量。」因此，「1651 年這道禁令是耶穌會抵制無限小戰事中的轉捩點」。此後，耶穌會數學家對抗擁護無窮小量的數學家之戰，在

義大利可說是勝負已定。

在本書第五章中，作者論述了這場「數學家的戰役」。其中，耶穌會由顧爾丁（Paul Guldin）、貝蒂尼（Mario Bettini）及塔凱代表出擊。至於無窮小量陣營這一邊，則包括卡瓦列里、托里切利、聖文生（Gregory St. Vincent）、孟哥里（Pietro Mengoli）、納迪（Antonio Nardi）、安傑里（Stefano degli Angeli）等數學家。耶穌會全面勝利後，儘管義大利終究贏得了「井然有序之地」，然而西歐數學創新的主導權，卻出現決定性的移轉，從義大利走出阿爾卑斯山脈，遷到德國、法國、英國與瑞士。「卡瓦列里與托里切利的『不可分量方法』是在這些北部的國家裡，才能先發展出「微積分」，再以眾所皆知的『分析法』，進入廣義的數學領域中。」因此，出生於義大利的拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange；其義大利姓名為 Giuseppe Luigi Lagrangia），最後卻在普魯士和法國大展長才，成為 18 世紀的大數學家，充分見證這個數學史上的重大事件。

∞

現在，我們簡介本書第二部分內容。它的故事場景是英國，主角是霍布斯及沃利斯。作者首先藉由霍布斯的政治哲學經典《巨靈論》（*Leviathan*），介紹 17 世紀後期英國的政治、社會及文化背景。事實上，在 1640-1660 年清教徒革命期間，英國社會面臨了史家希爾（Christopher Hill）所說的「天翻地覆」[7]。至於貴族、皇家學會創始人、科學贊助者兼傑出化學家波以耳（Robert Boyle）對倫敦街頭巷議的評論「只要將你的頭伸出倫敦街頭的窗子，就可以聽到至少兩百種異端邪說」，更是令人感同身受。

《巨靈論》出版於 1651 年，這一年耶穌會總校訂剛好公布了「高等研究規定」65 則。霍布斯儘管鄙視耶穌會，卻與耶穌會有一個共通性，就是他也害怕社會崩解，並堅信強大的中央威權是唯一的答案。不過，「鮮少有人記得他與耶穌會的另一個共通點，那就是他和耶穌會一樣，都認定了自己哲學體系中絕不可缺少的要素，是數學。」

霍布斯出身平民階級。儘管他的父親曾擔任伊麗莎白女王時期神職人員，是半文盲的可能性卻不小。霍布斯在牛津大學畢業後，幸運獲聘為德文郡伯爵卡文迪許（William Cavendish）之子的家庭教師 [8]。後來，英國內戰爆發，他追隨卡文迪許家族流亡巴黎，在那兒成為威爾斯王子（日後繼位為查理二世）的家教。因此，我們不難想像他所謂的「巨靈」，就是「將國家成員完全體現集

---

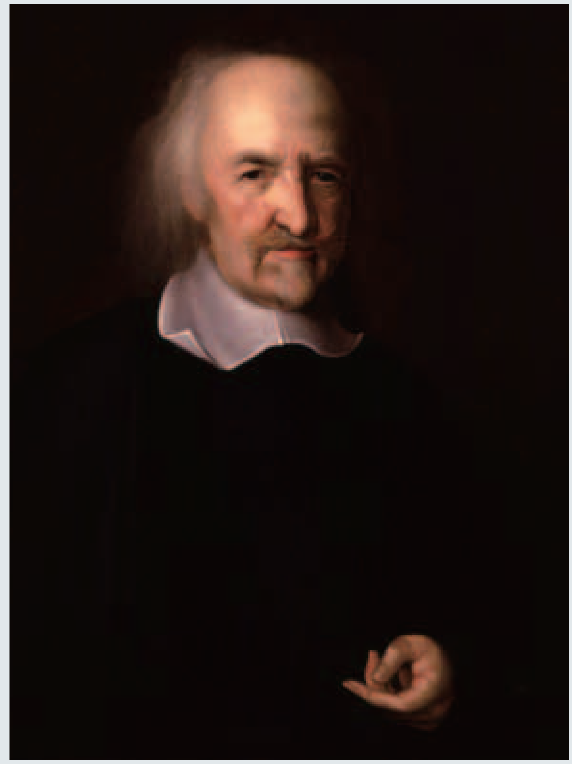
[5] 在這個命題中，若截面積改為定比（值）亦可。如此，則其平面形式可以描述如下：給定 A，B 為兩個平面區域，若其等高處的截線長之比 $L(A):L(B)$ 恆為常數（或定值）對所有截線都成立，則 $A:B=L(A):L(B)$。

[6] Leahy, Andrew , "Evangelista Torricelli and the 'Common Bond of Truth' in Greek Mathematics", *Mathematics Magazine* 87（2014）: 174-184.

[7] 希爾有一部名著，書名即為 *The World Turned Upside Down*。

[8] 這個家族是英國著名的科學贊助家，劍橋大學的卡文迪許實驗室即是他們家族所捐助。有關這個家族的故事，可以參看電影《浮華一世情》（*The Duchess*）。

霍布斯 。John Wright 繪。（維基）



中在一個人身上，而這個人就是君主」，而且「在巨靈體制下，內戰不會發生，因為巨靈體現了他自己子民的意志，而沒有一個人的意志會是想展開內戰。」

如此說來，為什麼幾何學在他論述政治哲學的《巨靈論》中，扮演不可或缺的角色呢？這就是本書第七章的主題。

霍布斯在牛津大學讀書時，從未上過數學課。直到 40 歲，他在一位紳士的書房偶然看到《幾何原本》第一冊命題 47（即畢氏定理）的證明，才讓他愛上幾何學，終身不渝。他認為幾何學這種論證嚴謹的知識體系，簡直是「迄今唯一讓上帝滿意，並因而賜予人類的科學。」因此，我們不難想像他不僅在自己的作品中，完全遵循幾何範例，他的哲學（含政治 / 自然等面向）也「始於他自己的《物體論》（*De Corpore*）中的簡單定義，一如歐幾里得《幾何原本》始於定義與設準」。然後，他從簡單、不證自明到複雜且令人驚奇的命題，論述有關物體、人性以及公民等主題。他相信從初始定義開始細心而系統化地論證，就可以保證他關於國家恰當組織所獲得的結論絕對確定。「事實上，正如歐幾里得的畢氏定理一樣確定。」

然而，歐幾里得幾何學固然美麗強大，卻非完美無瑕。譬如說吧，三個尺規作圖難題，當時都仍然在抗拒解決之道。這對霍布斯來說，「只要古典幾何學問題持續未解，他整個哲學的架構就會一直不穩，巨靈的國家也會成為一棟沙地上的政治之屋。」因此，「為了確保自己政治理論的根基穩健，霍布斯著手試圖解決這三道始終未解的古典幾何題。」

這種企圖心卻因為專業不足，及時代條件尚未成熟等因素，導致霍布斯注定以失敗收場。事實上，他那貧乏的數學洞察力，也見證了他看起來有限的數學資質與才識。比如說吧，他基於尺規作圖原則，批判阿基米德只證明圓面積公式──圓面積等於兩股分別為圓周及半徑的直角三角形之面積，卻無法按尺規作圖的方法，建構一個直角三角形其面積等於給定圓形的面積。因為要是做得到，那麼，三大問題之一的「化圓為方」就可以解決。可惜，面對眾人批評自己提出的證明無效，儘管霍布斯起初願意接受現實，且一而再、再而三提出修訂版，最後仍無功而返。然而，或許基於主要敵手沃利斯致命批判的刺激，霍布斯終其一生「不但堅信自己完成了化圓為方的課題，也從未改變過這個不可動搖的堅定認知。」去世前幾年，他在詳列畢生學術成就清單時，不僅把數學排名第一，而且他最自豪的「成就」，竟然就是「化圓為方」！

霍布斯如此輕易就博得幾何學家盛名 [9]，除可能與其知名贊助者大力加持有關，還可能與當時英國數學的學術位階（epistemological status）息息相關。在本書第八章中，作者引述了沃利斯的

瓦里斯。Godfrey_Kneller 繪。（維基）

觀察——這位出身劍橋大學的數學家，發現數學「幾乎沒有人會視為學術（*Accademical*）研究，只覺得是項技術手藝（*Mechanical*），就像貿易商、商人、水手、木匠、土地測量員等等所做的事。」換言之，沒有人認為數學應該是年輕紳士教育的一部分，因此，數學當然不可能納入各級學校正規課程。事實上，沃利斯的數學是他的弟弟教的，至於教學內容，則是弟弟從他老闆那兒學來的算術與會計。由於這是沃利斯唯一上過的數學課，因此他後來成為一代數學家，完全是自修得來的成就。

1649 年，沃利斯被任命為牛津大學薩維爾幾何教授（Savilian Professor of Geometry）[10]。大家都認為這項任命相當「泛政治化」，當然也呼應了當時英國極端複雜的政治與宗教環境。作者在本書第八章以「約翰．沃利斯是何方神聖？」為題，敘述沒有顯赫家世庇佑的沃利斯如何在英國內戰期間，以支持議會黨的身分，在各種政治與宗教勢力之間長袖善舞，力爭上游。一直到最後他進入數學界，成就了傑出的學術事業。作者也指出，沃利斯擔任教職之後，即開始有系統地自修伽利略、卡瓦列里、笛卡兒以及羅貝瓦（Gilles Personne de Roberval）等人的研究成果。因此，沃利斯在任職教授六年後，就發表了兩篇傑出的數學論文，也就是〈圓錐曲線〉（Treatise on the Conic Sections）及〈無窮算術〉（Arithmetica Infinitorum）。這兩篇論文不但內容的原創性令人印象深刻，在歐洲數學界也引起廣泛迴響，從義大利、法國到荷蘭等地，都吸引了許多讀者。

此外，本書第七章還敘述隱形學院（Invisible College）以及延續（其非體制性格）的皇家學會（Royal Society）的形成背景與過程——原來它們都是因政治與宗教爭議永無休止，讓一些紳士想找個沒有你死我活紛爭的避風港，可以風雅地閒聊一些所謂的自然哲學（natural philosophy），才應運而生的場所。誠如皇家學會官方史家史伯瑞（Thomas Sprat）的見證：「共同努力，一起思考、互相商議，彼此幫助對方的發明。」因此，皇家學會力推的公開實驗（大多由波以耳贊助），都背負政治任務，「若要會員凝聚共同意見，就必須讓大家親眼看到實驗進行。因此一定得要在無可挑剔的見證者面前進行實驗，這些見證者通常是皇家學會的其他成員。接著這些證人自然會討論親眼所見的情況，並就發生的狀況達成共識。」至於復辟的國王查理二世頒布的特許狀，更成

---

9 他的頭銜是幾何學家（geometer），而非目前使用的數學家（mathematician），後者這個英文用詞當時非常罕見。

10 這個講座今天還存在，物理學家霍金（Stephen Hawking）剛從該講座職位卸任。

為這項宗旨最強而有力的背書。

這種實驗主義的紅利，根據倡導者培根（Francis Bacon）的論述 [11]，是可以為庶民創造福祉，同時讓他們保持忙碌，就沒有時間處處唱反調。因此，「實用」顯然是推展實驗哲學的皇家學會會員（含沃利斯這位早期創建者）主要關懷所在。如此一來，如果霍布斯的「幾何國家」罔顧實用，並鞏固政治獨裁專斷，當然不可能受皇家學會歡迎，更何況沃利斯是皇家學會創始會員中唯一的數學家。

平心而論，皇家學會對於數學的態度難免矛盾與掙扎。在（新）自然哲學浪潮中，哈維（William Harvey）發現血液循環，以及吉爾伯特（William Gilbert）研究磁學本質，都是劃時代的科學貢獻。然而，當代最偉大的科學成就，則非天文學莫屬，而這些都不能歸功於沃利斯初次邂逅的工匠數學（Mechanical）。因此，「皇家學會該如何接納數學科學的重要貢獻，卻同時避免數學在方法、哲學以及政治意涵上的危險暗示？」這個兩難一直困擾皇家學會，其中尤以沃利斯感受到的衝突最為激烈。

沃利斯的因應之道，就是本書第九章敘述的「新世界的數學」。在本章中，作者引述了沃利斯的〈無窮算術〉，說明他如何運用無窮小量作為一種發現工具，歸納導出如下三個極限式：

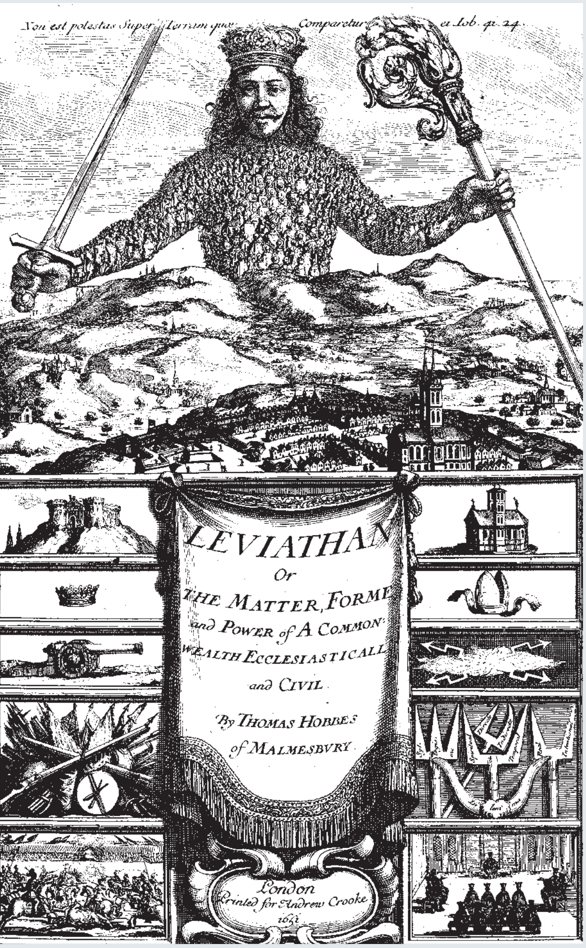
$$\lim_{n\to\infty}\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{4}$$

沃利斯的「歸納」方法對打算在高中開授微積分特色課程的老師來說，非常具有啟發性，尤其是無窮小量如何在無法說服費馬的情況下，還能受到皇家學會青睞，真是讓我們現代數學人大開眼界。儘管如此，作者卻清楚指出：「不論從哪個觀點來看，沃利斯的數學都是他那些皇家學會伙伴的實驗方法翻版」，「他的數學仰賴歸納而非推論，這種數學永遠不會主張取得了最後的真理，而真理的最終仲裁者，是人類的共識。」而這種數學，「既可海納百川，本身的訴求又虛懷若谷」，正是皇家學會期待創始會員中唯一的數學家所貢獻的事，因為「數學再也不是實驗方法的危險對手，而是與實驗方式攜手共同推動科學與適切政治秩序的學科。」所以，沃利斯被他的皇家學會同僚讚揚，因為他「拯救」了數學這個被霍布斯鼓吹為政治獨斷論的工具。

1655 年，沃利斯出版《駁斥霍布斯幾何》（*Elenchus Geometriae Hobbianae*），向霍布斯宣戰。此一戰役延續 23 年之久，雙方你來我往。沃利斯共發表十份書籍和論文批判霍布斯，後者則至少發表 13 篇論文回應。一開始雙方還會針對政治、宗教立場，及數學方法論，互相批駁對方主張。但交火沒多久，就演變為私人恩怨的叫囂與謾罵 [12]。這項爭戰的結局，是缺乏皇家學會



霍布斯《巨靈論》的卷首插畫。Abraham Bosse 雕版。（原書轉載，感謝商周提供。）

奧援的霍布斯被逐出數學圈，沃利斯大獲全勝。連帶地，無窮小量終於有了「制度化」的正當性（institutionalized legitimacy），而牛頓微積分的現身，也終於水到渠成。事實上，當〈無窮算術〉在 1655 年出版時，時年 23 歲的牛頓深受啟發，在十年後發明了微積分。因此，如果說微積分及後來的（數學）分析學（Mathematical Analysis）塑造了近代科技世界，那麼，從沃利斯到牛頓的無窮小量數學傳承，絕對是最不容忽視的數學史篇章。

在本章中，作者按下列各節標題敘事：「無限多條線」、「實驗數學」、「沃利斯拯救數學」、「巨人與暗箭」，以及「哪種數學」，並在敘述中一再特別引述霍布斯針沃利斯無窮小量批判的合理性。只可惜，霍布斯在「化圓為方」作圖題上非但實在錯得過於離譜，而且還死不認錯！儘管這是非戰之罪──直到 1882 年，德國數學家林德曼（Ferdinand von Lindemann）證明 π 是超越數之後，才知道此一作圖問題根本不可能，不過，經歷清教徒革命的皇家學會成員早已定調，要以沃利斯的實驗數學取代霍布斯的幾何獨斷，時不我與的霍布斯至此終於被逐出數學舞臺。相形之下，沃利斯的確貢獻卓著。畢竟他將無窮小量發展為十分有力的發現工具（tool of discovery），為 17 世紀下半葉以後的數學，帶來極深遠的影響。

評論

多年前，我曾聽一位天主教神父兼大學教授提起，將《幾何原本》傳入明代中國的利瑪竇等耶穌會神父之所以精通數學，是因為遠赴全世界各地傳教的耶穌會傳教士必須按月向總會匯報財務，這種會計需求導致耶穌會重視數學教育。然而，本書卻告訴我們完全不同的故事。數學對耶穌會來說，由於利瑪竇的老師克拉維的奮鬥，有了更高尚的使命。

還有，相對於托里切利因真空管實驗與發明氣壓計，被一般讀者認定或熟悉的科學家身分，本書對他的數學貢獻也有令人驚艷的補充。書中內容讓我們認識到歷史上像托里切利這樣的數學家 / 科學家，也有相當豐富多元卻鮮為人知的一面。

⓫ 平心而論，培根非但數學素養不高明，甚至貶抑數學在自然研究中的重要性。不過，他力主面向大自然求新知識，在 17 世紀的科學革命風潮中居功厥偉，這個主張當然與皇家學會宗旨合拍。反諷的是，霍布斯晚年時，竟成為培根的私人祕書。

⓬ 本書〈大事記〉（頁 323-327）有雙方一來一往的大事記，值得參閱。

此外，一般人提及霍布斯，通常都馬上聯想到其政治哲學經典《巨靈論》，絲毫沒有提及他的「數學貢獻」。為臺灣 STS（科技與社會）學者熟悉、由謝平（Steven Shapin）與夏佛（Simon Schaffer）所著《利維坦與空氣泵浦》（*Liviathan and the Air Pump*），就是最好例證。現代人通常只知霍布斯曾是傑出政治哲學家，卻可能不知道他也曾是主張機械唯物論的自然哲學家。霍布斯在物理學及數學上欠缺實質貢獻，或許是現代人過濾他「歷史身分」的結果。正如在《大英百科全書》目前的版本中，Thomas Hobbes 這則條目的專家標籤只剩下政治哲學家，原先的自然哲學家乃至幾何學家等等頭銜，都在他的傳記消失無蹤。

儘管法國外交官索必耶（Samuel Sorbiére）讚譽霍布斯是世界最偉大的數學家之一，但他自己堅信已解決「化圓為方」這個古希臘尺規作圖難題，根本無法取信於同時代數學家。因此，作者在本書第七章對霍布斯的敘述，就顯得彌足珍貴，因為一般數學通史著述根本不可能提供足夠篇幅，來說明霍布斯所謂「幾何國家」（the geometrical state）的意義。事實上，當沃利斯在 1655 年出版的《駁斥霍布斯幾何》中，暴露了「霍布斯從自信滿滿地宣布（尺規作圖）成功，以及後來困窘地一再撤回與修改論證」的真相後，霍布斯頂尖數學家的名聲至此已一蹶不振。儘管如此，當牛頓在 1687 年出版其物理學經典《原理》之後，蘇格蘭的大學還是繼續採用霍布斯的《物體論》（其第 20 章納入「化圓為方」主題），作為自然哲學的教學用書。由此可見，在科學（教育）史上，自然哲學的流行似乎有比較寬容的空間，不像數學知識對錯分明，學者同儕的盲目吹捧，有時反成當事人最終遭到更澈底屈辱的根源！

本書是近年來數學普及書籍中罕見的精采有趣之作。作者艾米爾．亞歷山大是數學史家出身，本書雛形出自於他就讀史丹佛大學研究所的一篇報告。他在報告中，「力陳無窮小量在 17 世紀的歐洲具顛覆政治的影響」。20 多年後，他終於回過頭來，完成這本適合普及閱讀的數學史傑作。

從數學史專業來看，本書主題是數學爭議（controversy）。戰場有兩個，其中之一在義大利，正反兩造分別是耶穌會及伽利略門徒，另一個則在英國，主要涉入者是霍布斯及沃利斯。不過，這兩項爭議未納入幾年前賀爾曼（Hal Hellman）所著的《數學恩仇錄：數學史上的十大爭端》（*Great Feuds in Science: Ten of the Liveliest Disputes Ever*，2009）。儘管該書主題也與數學爭議有關，卻因內容涵蓋（至少）十組數學家「捉對廝殺」，情節張力鋪陳不足，敘事令人意猶未盡，無法充分傳達在地的數學（mathematics in context）之深刻歷史意義。這種對比或許也解釋了科普作家（賀爾曼）vs. 數學史家（亞歷山大）的專業差異吧。總之，要將數學史上的爭議故事說得不那麼煽情卻又引人入勝，的確需要不凡的敘事功力。數學史家亞歷山大為我們提供了最忠實的例證。∞

本文尚有對譯書之編輯與譯文修改意見，將與參考資料一併置於〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php