



高等數學能力從何而來

數學與語言有相同的演化根源嗎？

數學知識和數學能力從何而來，一直是一個迷人的話題。早在古希臘，柏拉圖便認為數學能力是與生俱來、人人皆有的，只等待被「喚醒」。然而，我們也都熟知克羅涅可（L. Kronecker）的名言：上帝創造整數，其餘一切都是人為的。

數千年以來，這類思考無非都近乎形上學的思辯，種種說法無從驗證，然而最近數十年認知科學領域的長足發展，開始能提供令人鼓舞的具體證據。

最近，認知神經科學亞瑪希（M. Amalric）及其指導老師德阿奈（S. Dehaene）在《美國國家科學院院刊》上發表了一篇〈高等數學的腦部網路的起源〉（"Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians", *PNAS*, 113 (18), May 3, 2016），即是一個顯著的例子。

他們在論文中指出，獲得抽象數學真理是人類特有的能力，至於這項能力的起源則仍屬未知。一種說法是認為它是源自舊石器時代晚期，伴隨著語言能力而來，例如杭士基（N. Chomsky）就曾提到「數學能力源自於語言運作抽象化」的假說。然而另一方面，我們又有愛因斯坦的證詞：「字詞或語言，不論是文字或口述的，似乎都與我的思考過程毫不相關。」

相對於此，近來認知神經科學的研究則顯示，數學是源自於人類對時間、空間和數字的非語言直覺，這可以稱為「核心知識」假說。

先前所做的認知神經科學研究，大多集中在最基本的數學能力，尤其是算術。但基本算術和高等數學畢竟有很大的差距，在算術上得到的結論不見得可以類推。因此本文作者設計了新的實驗，以專業數學家為對象，檢驗他們思考數學概念時的腦部運作。

他們找了 15 位職業數學家，以及 15 位學術能力相當的非數學家（對照組），請他們判斷數學和非數學敘述的對錯，並檢視他們答題時腦部的功能性核磁共振造影（fMRI）。

每一題以口頭唸出，受測者在聽完後有 4 秒的思考時間，然後回答該敘述是對、錯或者無意義。高等數學的題目包括分析、代數、幾何、拓樸四大類，另有一類非數學的題目則屬於一般文史範圍，語句的長度與複雜度與數學題相當。

兩位作者發現，當數學家思考數學時，不論題目屬於何種領域，一律會激發他們腦部的雙側頂內溝（IPS）、下顳葉（IT）、前額葉皮質（PFC）等區域，而這些被激發的區域與基本算術是相同的。為了避免這個結果有可能是因為測試題目源自數字和算術而造成干擾，他們在題目設計上仔細地排除了數字。至於和語言相關的區域，則只在聆聽題目時短暫用到。

他們原先猜測，像代數之類的領域，常需要層層相連的推理，或許思考模式會與語言類似，但 fMRI 造影顯示並非如此，數學家思考代數，和思考其他數學並沒有差別。

儘管如此，兩位作者也指出，我們不能武斷宣稱已經找到腦部的數學特區，因為先前已有多項研究辨識出這些區域與多種解題（problem-solving）任務相關，而與語言活動無涉。

假如你曾讀過德阿奈的 *The Number Sense* 一書，當會對他以一系列原創性的實驗得到許多驚人結果印象深刻（例如證明有些哺乳動物也有簡單的數字感）。在本研究中，他們則是在高等數學與基本算術、一般的抽象推理解題能力之間找到了聯繫。經過科學家的各種剖析，數學的面貌變得更豐富，也更引人入勝。（編輯室）

實驗用問題舉例

數學（幾何）

- 任何偶數維球面上的向量場必有等於零向量的點。（對）
- 黎曼面上的全純函數必為常數。（錯）
- 任何全純緊緻纖維叢是一特殊球面。（無意義）

非數學

- 在古希臘，無法償債的公民將淪為奴隸。（對）
- 巴黎地鐵系統的興建早於伊斯坦堡地鐵。（錯）
- 馬鈴薯旗在脫利騰大公會議後被送上斷頭台。（無意義）