

## 拓樸相變和拓樸物質

2016 諾貝爾物理學獎簡介

2016 年 10 月 4 日，諾貝爾物理獎頒給美國華盛頓大學的紹里斯 (David Thouless)、普林斯頓大學的赫爾丹 (Duncan Haldane) 和布朗大學的科斯特利茨 (J. Michael Kosterlitz)，三位得獎人均為英國出身。得獎的理由是「拓樸相變和拓樸物質的理論研究發現。」

拓樸性質起源於數學的研究，也就是在幾何學之外，研究物體被連續變化 (比如說延展或彎曲)，在不撕開、黏合或挖洞的狀況下，如何從一種幾何形狀變成另外一種幾何形狀的研究。舉例來說，一顆球和一個四方體拓樸性質一樣，可以想像球體不斷變化之後，就可以變成四方體；而中間有一個洞的甜甜圈，拓樸性質和咖啡杯拓樸性質一樣，因為經過連續變化，甜甜圈可以變成有一個洞把手的咖啡杯。

本來拓樸學和物理學關連並不大，直到紹里斯和科斯特利茨開始研究二維古典系統的二階相變，事情才開始變化。在他們的研究之前，一般人對二階相變的了解，都是來自於金茲堡 / 藍道定理 (Ginzburg-Landau Theorem)。我們可以考慮一個磁性系統，鐵磁的產生是要所有小磁鐵磁場指向同一個方向，而順磁性的相態來自於小磁鐵磁場的方向都不一樣，平均起來磁性就為零，我們稱這種小磁鐵磁場都指向同一方向為對稱性破缺 (symmetry breaking)。金茲堡 / 藍道定理完全奠基於對稱性破缺。而二維古典系統，基本上在有溫度的情形下，因為熱漲落 (thermal fluctuation) 非常強大，所以沒法形成對稱性破缺，因此一般認定是不會有相變的存在。

這樣的情形也可以由物理量的相關性

(correlation) 來理解。同樣考慮磁性系統，我們可以考慮距離很遠的小磁鐵 (也稱為自旋) 彼此間的相關性，相關性可以理解為當我改變一個自旋，另一個 (遠距離) 自旋跟著改變的量。我們發現三維鐵磁性 (也就是有對稱性破缺) 的相態中，兩個距離相當遠的自旋量相關性是一個常數。但在二維磁性系統裡，遠距離自旋相關性會慢慢接近零。然而接近零至少有兩種接近方式，一種是以多項式速度接近零，一種是以指數速度接近零。多項式接近零的速度比起指數接近要慢上許多，因此這裡面暗藏著玄機。

紹里斯和科斯特利茨發現在非常低溫時，遠距離鐵磁的相關性是多項式的接近零。然後慢慢增高溫度，系統會產生渦旋 (vortex)，而且不是一個一個產生，每次產生都成對，而且方向相反。我們稱為正渦旋或反渦旋 (圖 1)。正反渦旋會成對出現，剛開始出現不會影響鐵磁的相關性，但溫度越高，渦旋越來越多，溫度高到一定程度，渦旋不再成對出現，而是單獨出現，且渦旋改變遠距離鐵磁的相關性，從多項式接近零變成指數接近零。這樣的相變，並不會有對稱性破缺，而是相關性的改變，我們稱為「KT 相變」，圖 1 顯示的就是這樣的相變圖。

渦旋其實就是一種拓樸態。渦旋就像颱風一樣，有一個很像颱風眼的構造，中間有一個洞，稱為奇點 (見圖 1 中的放大區域)。紹里斯和科斯特利茨是首次利用拓

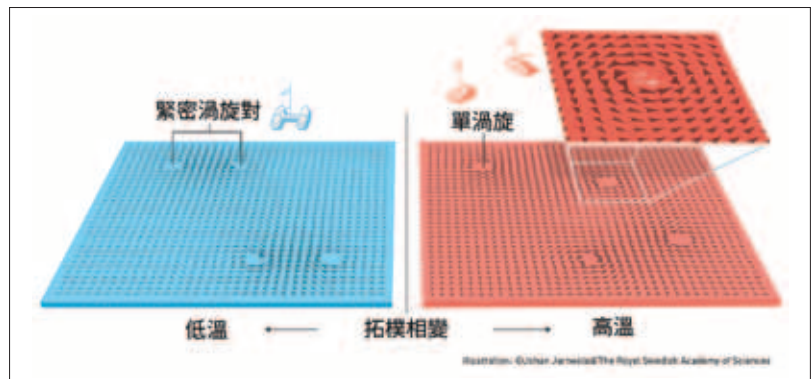


圖 1 拓樸相變圖。(https://www.nobelprize.org/)

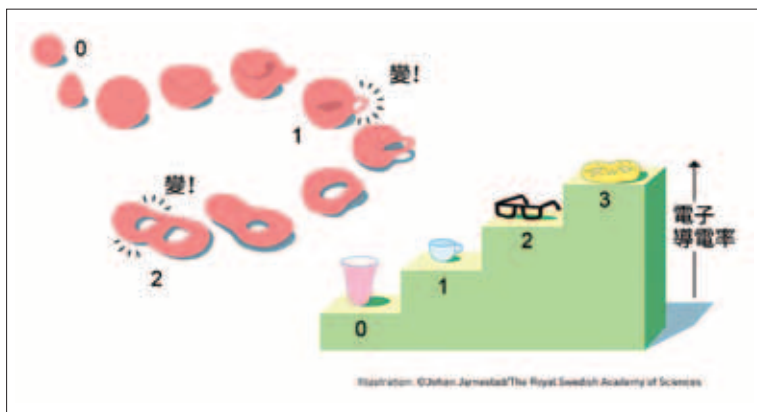


圖 2 拓樸態的變化。(https://www.nobelprize.org/)

樸性質來解釋相變的研究。後來發現不管在一維或二維系統，比如說超流體相變，KT 相變都非常重要，也解釋很多低維度系統相變的產生，改變人們對相變的了解。

拓樸物質其實不容易發現，整數和分數量子霍爾效應（quantum Hall effect）在 1980 年代陸續發現，而且研究獲頒諾貝爾物理獎。紹里斯也持續對拓樸態有進一步的了解，尤其是量子霍爾效應的解釋。紹里斯藉由對於拓樸學的了解，將量子霍爾效應跟所謂的陳省身數（Chern number）連結起來。陳省身數可以類比為幾何體有多少個洞，而電子的導電率正比於陳省身數，也就是洞的數目（見圖 2）。紹里斯由此增進對拓樸物理學的深層了解，因此獲頒此次諾貝爾物理獎一半的獎金。

量子整數和分數霍爾效應這兩種物質都需要磁場形成藍道層。赫爾丹在 1980 年代提出一個問題：就是能不能不用均勻磁場，保持移動對稱性來形成霍爾效應？他提出一個簡單的模型，就是在六角蜂巢模型中技巧加入次近鄰的作用力，破壞時間反轉對稱性（time reversal symmetry），就可以不用加均勻磁場產生陳省身數等於一或負一的霍耳效應。

赫爾丹另一個重要的貢獻，是發現一維系統的磁性拓樸系統。低維度系統，尤其是低維度的量子系統，量子效應比三維系統來得大。赫爾丹首先意識到，一維的磁

性系統，由於量子漲落（quantum fluctuation）或是量子纏結（quantum entanglement）非常大，因此產生奇特的現象。於是他開始提出自旋量為一的一維磁性系統，發現這個系統具有拓樸性質，稱為赫爾丹相態。這是第一個用理論提出的拓樸材質，而且馬上被實驗驗證。這種拓樸材質非常穩定，具有某些對稱性，也就是說一些雜訊只要不破壞這種對稱性，並不會改變拓樸性質，因此我們稱這樣的相態是「對稱性保護的拓樸相態」。這就是拓樸相態的重要性。

量子電腦需要用到量子訊息，可惜的是，量子訊息常常因為雜訊一下子就不見，因此我們如果要用到很多量子位元，保持量子訊息很重要。然而拓樸態像是有洞的物質，這些洞可以拿來作為量子位元。舉例來說，有一個麵糰做的甜甜圈，我們可以用手改變甜甜圈的形狀，但只要不把洞黏起來，或是打另一個洞，不管怎麼捏，一個洞還是永遠保持。可以想像雜訊就像手在亂捏，會改變甜甜圈的樣子，但洞永遠存在，也就是拓樸性質永遠不變，這樣的拓樸材質非常適合作為量子電腦的量子位元。

近十餘年，在這三位物理學家的研究基礎上，大量的拓樸物質經實驗而被製造與發現，比如說拓樸絕緣體（topological insulator），拓樸超導體（topological superconductor），和魏爾半導體（Weyl semimetal）。這些新的奇異拓樸物質的發現，大大延展人類可能的科技發展，增加量子電腦的可能性，因此獲頒諾貝爾物理學獎的殊榮。（張明強，中興大學物理系）

◎本文轉載自中華民國物理學會《物理雙月刊》38 卷 6 期 12 月號，本刊感謝作者與《物理雙月刊》同意轉載。原文網址：  
http://psroc.org.tw/Bimonth/article\_detail.php?classify=c1&cid=149)

《數理人文》第 10 期第 6 頁，韓國數學家「金民衡」誤植為「金明迴」，在此致歉。