專題

從天體力學到混沌理論的形成

龐卡赫無價的美麗錯誤

作者：陳國璋

陳國璋為國立清華大學數學系教授，研究領域為動力系統與天體力學。

前言

本文目的不是介紹混沌理論或天體力學的基本概念，而是要說明混沌理論的基本概念，如何從天體力學的研究中誕生。我們會談「混沌」這個詞的意義，簡述天體力學在 17 世紀之後的發展，包括克卜勒（Johannes Kepler）、牛頓、歐拉（Leonhard Euler）、拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）、龐卡赫（Henri Poincaré，一譯龐加萊）等人的貢獻，尤其著重在龐卡赫得到瑞典國王獎的故事。

圖 1 是龐卡赫與他在 1888 年獲獎的文章首頁。這是一篇劃時代的巨著，引入許多嶄新的想法，後來發展成獨立的數學領域，稱為動力系統（dynamical system）。圖中並非文章真正發表的版本，而是最初有錯誤的版本，在修正錯誤的過程中，龐卡赫推引出混沌的概念。

底下節錄一段瑞典國王獎評審厄爾密特（Charles Hermite）寫給另一位評審米塔列夫勒（Gösta Mittag-Leffler）的話，以及數學史上的評語，由此可以看出龐卡赫的工作得到何等崇高的評價：

圖 1　左圖：約 1890 年時的龐卡赫（維基）。右圖：他獲得瑞典國王獎的論文封面。（取自 *Archives Henri Poincaré* http://henri-poincare.ahp-numerique.fr）

龐卡赫的這篇文章是如此罕見的深刻與高度創新，從數學分析與其天文應用來看，它必將開啟科學的新紀元。（厄爾密特，1888）

在這篇文章中，龐卡赫給出了第一個同宿點的描述，第一個混沌運動的數學描述，以及第一個利用不變積分（守恆律）的重要應用。（《MacTutor 數學史檔案》網站）

上面提到了三個數學的概念：同宿點（homoclinic point）、混沌、不變積分（invariant integral）。我們會陸續在後文中解釋，尤其是混沌概念的出現。

混沌的意涵

原始意涵

chaos 一般的解釋是：混亂、沒有秩序，後來變成數學的專有名詞。現在華人圈常將 chaos 翻譯成混沌，混沌也可寫作「渾沌」。

用混沌翻譯 chaos 極為恰當。首先，混沌和 chaos 都是很老的名詞，都源自古代的神話或寓言，具有類似的哲學意涵。比方在中國古代的《左傳》、《山海經》、《莊子》、《史記》中，都出現過混沌這個詞，較廣為人知的是〈莊子．應帝王〉篇所說的：

南海之帝為倏，北海之帝為忽，中央之帝為渾沌。倏與忽時相與遇於渾沌之地，渾沌待之甚善。倏與忽謀報渾沌之德，曰：「人皆有七竅，以視、聽、食、息，此獨無有，嘗試鑿之。」日鑿一竅，七日而渾沌死。

這個寓言帶有崇尚無為的思想，本意是說我們的大地最初處於混沌不明、清濁不分的狀態，在頃刻（倏忽）之間，因為刻意的開鑿而失去了原來的天然模樣。

西方 chaos 這個詞則是源自希臘的古老神話，在《神譜》（*Theogony*）中出現了名為 Chaos 的神，祂是第一個神，代表宇宙無秩序的原始狀態。祂是無中生有的，經過祂產生了大地，然後有了天空，乃至天地間的萬物。

混沌與 chaos 作為古代寓言有個共通點，就是認為大地最初是一個一個混亂不可預測的狀態，後來才出現了秩序。在這個意義上，把 chaos 翻譯為混沌是很準確的。

混沌這個用詞雖然古老，但現在已成為數學和科學的術語，它包含了一些重要的概念，與混沌的原始意涵相通。第一個概念是不可預測性。如果某個系統秩序井然，可以準確預測，我們不會稱它是混沌系統。第二個是回歸（recurrence）。如果知道一個系統不會回復或接近給定的初始狀態，在某種意義上就是可預測的。從不可預測性延伸出的回歸概念，意思是混沌系統可能會反覆靠近原始狀態，但一般而言無法知道何時會回歸。我們再提出一個問題，然後再進一步解釋這兩個概念。

天體運行是混沌的嗎？

一般人可能覺得天體運行不是混沌的，因為很多天體運行的規律，是幾千年前的老祖先就知道的。例如把地球自轉的週期定為一天，地球繞太陽一周（許多古人以為是太陽繞地球）的週期大約是 365 天，月球盈虧的週期大概是 29 天半。這些顯而易見的規律，各個古文明不約而同都觀察並記錄下來，形成各種曆法，流傳至今。比較不明顯的規律也很多，例如相對位置幾乎相同的日蝕和月蝕，大概每 6585.321 天會再出現一次，這叫沙羅週期（Saros cycle）。因為週期中的 0.321 天，使得一沙羅週期後，相同日月蝕不會出現在地球同一地點。如果希望出現在差不多相同的位置，需經過三個沙羅週期，也就是大約 54 年。這在平均壽命短而且不易遷徙的上古時代是不容易察覺的，但聰明的古巴比倫人發現了。

相對於地球歷史，人類歷史只是短短的一瞬間。人類文明藉由經驗累積歸納出的規律，可以說都沒有經過長時間的考驗。如果把時間尺度加大，我們已知的星球運轉規律是不是仍然正確？或者，可以進一步問：太陽系是穩定的，還是混沌的？這是個非常古老而且重要的問題，涉及到人類永久住在地球的可能性。目前科學證據所支持的答案是：太陽系運行是混沌與秩序並存的，後面的討論會再回到這個主題。

不可預測性

與不可預測相對的是可預測。什麼樣的系統可預測呢？簡單的例子是單擺運動。考慮一個擺錘固定在一根沒有彈性的細桿上，假設沒有摩擦力，則總能量小的時候，擺錘會以固定週期規律的左右震盪；總能量大的時候，擺錘會以繞圈的方式週期運動。但這兩種型態之間有個臨界的能量，當時間趨於正負無窮時，擺錘會往最高點靠近但不越過。在以角度與角速度為變量的二維相空間（可用圓柱 $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ 表示）上，單擺系統最高點是

個不穩定的不動點。當時間趨於正負無窮時，會漸近於此不動點的是一條特別軌道，稱為同宿軌道（homoclinic orbit）。❶

如果把上述單擺的擺錘換為另一個單擺，成為雙擺，這個系統會變得不可預測。初始條件的細微改變往往會完全改變系統的運動，這種對初始條件的敏感依賴，就是所謂的蝴蝶效應。有個很有意思的定理可以說明雙擺運動現象之豐富：無論給定任何正整數列，都可以找到一個解（初始狀態），使得下方擺錘順時針、逆時針交錯旋轉時，其轉圈的次數依序完全符合給定的數列。

為何單擺可預測而雙擺不可預測呢？簡單的說，是因為單擺運動有角度和角速度兩個變量，但因為能量是守恆量 ❷，根據數學中的隱函數定理，解會被限制在一維曲線上，沒有其他自由度。相對的，雙擺則有兩個角度和兩個角速度共四個變量，能量雖然守恆，但只能將系統的自由度由四降到三，這是單擺和雙擺的關鍵差別。

天體力學的圖像遠比這個例子複雜，但具備了這個例子的基本特質，其中同宿點（同宿軌道在時間趨於正負無窮時逼近的點）的出現更是混沌現象的關鍵。

回歸

回歸就是回到初始狀態的附近。系統混沌意味著整個系統一定有些部分會回歸，無窮多次回歸，而且還是不可預測的無窮多次回歸。以撲克牌為例，一副撲克牌有52張，能排出來的順序有52階乘種，雖然數量很大但畢竟是有限的。如果你反覆洗牌無窮多次，那麼從機率的觀點來說，任何順序都會反

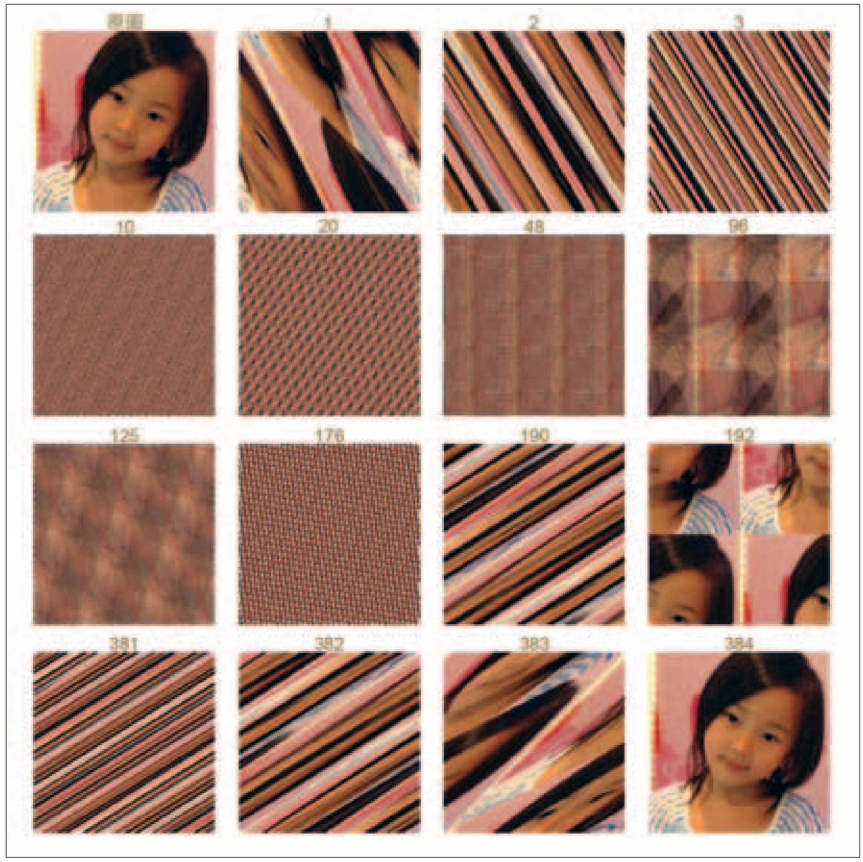
圖 2（陳國璋提供）

覆出現無窮多次。但因為是隨機洗牌，無法預測何時同樣的牌序會再次出現，這是一個充滿回歸現象但不可預測的系統。

再考慮另一個被稱為「貓映射」（cat map）的經典例子。比方給一張方形照片，貓映射是把它往某個方向拉長、某個方向壓縮，使得總面積不變。超出方塊之外的部分則模（modulo）去正方形邊長，重新平移映回原方塊。如果把照片想成單位邊長正方形$[0,1]^2$，然後把 (x,y) 映到 $(2x+y,x+y)\mathrm{mod}1$ ，便是標準的從 $[0,1]^2$ 映回自身的貓映射。阿諾德（Vladimir Arnold）是研究這類問題的先驅，他喜歡拿貓的圖形當例子，所以稱為貓映射。圖 3 則以筆者女兒子珊的照片為例，利用貓映射反覆迭代，每一小圖上方的數字表示迭代的次數。

這個貓映射有幾個很有意思的特性。第一是對初始條件非常敏感依賴，第二是裡面蘊藏非常混亂但又不斷回歸的現象。由於畫素有限（原始照片畫素為 256 × 256），經過足夠多次的迭代，必定會有重複，又因為貓映射可逆，原始照片一定會週期性出現。圖 3 第一列是原始照片與前三次迭代，迭代至 10 次以上已經非常紊亂（第二列左圖）。大多數的迭代都顯得很紊亂，不過經過某些特定的迭代次數，可看出回歸的現象。例如第二列最右邊的圖

圖 3（陳國璋提供）



是經過 96 次迭代，可以隱約見到四個臉型。第三列最右邊清晰的圖經過 192 次迭代，第四列最右方則是經過 384 次迭代後完全回歸，左邊三幅則是在此之前的三次迭代。

這種反覆恢復原來狀態的概念，最早可以追溯到古埃及和古印度文明裏輪迴的世界觀，稱為永恆回歸（eternal return），或譯作永劫回歸。這個輪迴的世界觀認為，人世間事物的狀態有限，可是時間無限，如果我們接受輪迴的世界觀，相信有無窮多的前世，而且記得所有的前世，則今生一切都會似曾相識。西方世界普遍不接受這個世界觀，因為它與基督教的創世說相違背，反基督的尼采（Friedrich Nietzsche）則是例外。我們可以說，輪迴世界觀隱含了混沌的回歸概念。

早期的天體力學

克卜勒與牛頓

克卜勒和牛頓奠定了近代天體力學的基礎。克卜勒最著名的貢獻是三大行星運動定律，牛頓則是發表《自然哲學的數學原理》（*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*），建立了牛頓力學，提出萬有引力定律，發明了微積分。萬有引力定律的一大成功之處，是將克卜勒的三大行星運動定律都變成它的推論。

克卜勒的前兩個行星運動定律發表於 1609 年，第三個發表於 1619 年。第一個定律又稱橢圓律，說太陽系裡行星的運動軌道一定是橢圓，可推廣為兩個星體的運動軌跡一定是圓錐曲線。第二定律稱作面積律，說行星在任一單位時間內，掃過的扇形區域面積是一個常數，這個定律等價於角動量守恆。第三定律稱作週期律或調和律，說各個行星公轉週期的平方，與它們橢圓軌道半長軸的立方成正比。克卜勒處在以地心說為主流的年代，能夠歸結出這三個定律，非常的不容易，且足以說明他相信日心說。

現在所謂的天體力學，一般是指微積分和牛頓力學發明之後，系統化建立的天體運行數學理論，其基本原理就是萬有引力定律。萬有引力定律包含兩部分：第一，兩個質點沿著它們連線的方向互相吸

❶ 編註：有興趣的讀者，看參看維基網頁的圖示與動畫：https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_（mathematics）

❷ 有時稱為不變積分或第一積分（first integral）。

圖 4 克卜勒。（維基）

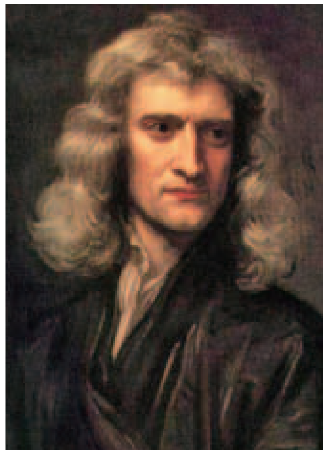


圖 5 牛頓。（維基）

引；第二，質點的引力大小與它們的質量乘積成正比，與其距離平方成反比。用方程寫下來，就是底下這個式子：

$$m_k \ddot{x}_k = \sum_{i \neq k} \frac{m_i m_k (x_i - x_k)}{|x_i - x_k|^3}, \quad k = 1, \ldots, N$$

這裡 m_k 表示第 k 個質點的質量，x_k 是它的位置。等號左邊是第 k 個質點的受力，上方的兩點表示對時間的二階導數，等號右邊是其他質點對它施力的總和。對這個方程組的研究，在 18 世紀發展成一個獨立的學門，稱為古典天體力學。這項方程稱作多體問題或 N 體問題，其中 N 表示星球的個數。

多體問題十分複雜。以三個星球如太陽、地球、月球為例，共有三個方程，如果是在我們的三維空間，每個方程都可寫成三個一維的二階方程，合計有九個方程，若寫成一階方程，就變成 18 個方程，這是一個相當巨大的動力系統，裡面有許多至今未解的難題。

歐拉、拉格朗日與三體問題

在 18 世紀，歐拉與拉格朗日奠定了三體問題研究的基礎。考慮三個星球如太陽、地球、月球運動所形成的系統，前文解釋它可轉化成 18 個方程。由於太陽、地球、月球差不多共平面，我們可以考慮簡化的平面三體問題，這時每個星球的位置與速度變成兩維，三個星球合計共有 12 個方程，仍然相當複雜，因此可以先考慮更簡單的情況。

比較天真的簡化如下：因為太陽比地球、月球重得多，姑且把太陽和地球看作一個二體問題，這樣可以用克卜勒定律來刻劃地球軌道。然後由於月球比地球小很多，月球質量大約是地球的 1.2%，因此可以把月亮和地球看成另一個二體運動，再用克卜勒定律來描述月球軌道。

這個想法的結果並不理想，誤差太大，原因是忽略了太陽對月球的引力。雖然相對於地球，太陽離月球很遠，但是太陽比地球重很多。事實上太陽對月球的引力與地球對月球的引力屬於同一個量級。

另一個比較符合實際的模型稱為歐拉三體問題，又稱作兩中心問題（two center problem）。歐拉考量月球繞地球的週期大概只有地球繞太陽週期的 1/12，所以在較小的時間尺度下，假設太陽和地球的位置固定，月球在這兩個星球的引力場下運動，這個模型就是歐拉三體問題。歐拉三體問題中，太陽和地球沒有自由度，於是月球與太陽、地球共平面的運動，只剩下四個變數。歐拉證明這是一個可

圖 6 歐拉。（維基）

圖 7 拉格朗日（維基）

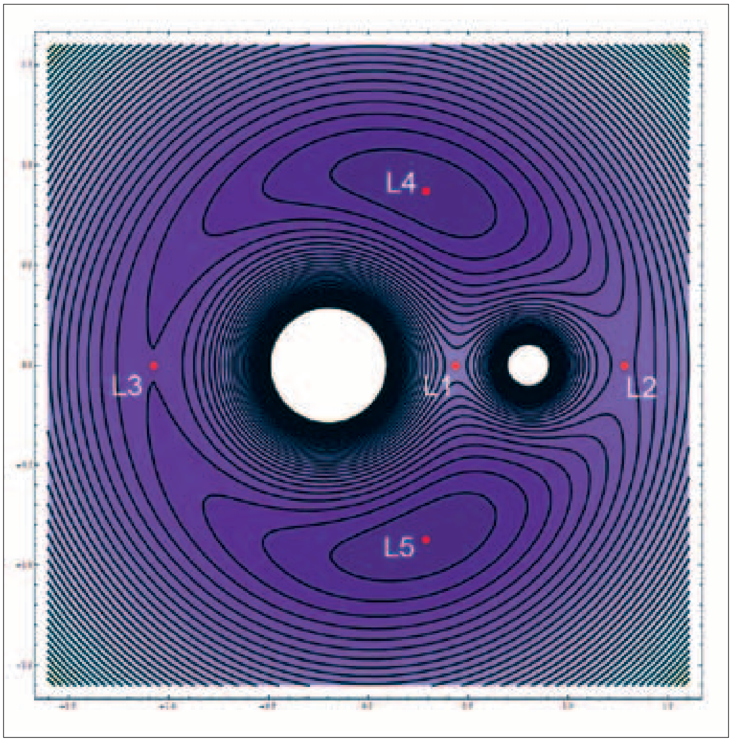


圖 8　限制三體問題函數 V 的等高線圖，其中有五個拉格朗日點 L1 到 L5。（陳國璋製）

積系統，也就是說存在夠多的守恆量，使得解可以完全刻劃出來。然而這個例子仍然不夠貼近實際，因為地球的運動被忽略了。

第三個簡化模型則是忽略月球對地球與太陽的引力，稱為限制三體問題（restricted three-body problem）。如果把月球換作太空船，那就非常符合實際。這個模型相當於假設一個質點為零質量。針對這個限制三體問題和一般的三體問題（所有質量都為正），歐拉發現一些特別的如剛體運動的週期解。

歐拉三體問題之於限制三體問題，就像單擺之於雙擺，前者是可積系統，而後者只有一個守恆量，稱為雅可比常數（Jacobi constant），是遠比歐拉三體問題複雜的系統。後來龐卡赫獲頒瑞典國王獎的研究重點正是限制三體問題，並從中引出了混沌的概念。

針對限制三體問題，如果把剛才根據萬有引力定律所得的方程組寫下，就得到底下的方程：

$$\ddot{q} = \frac{m_1(x_1 - q)}{|x_1 - q|^3} + \frac{m_2(x_2 - q)}{|x_2 - q|^3}$$

這裡我們只管零質量的質點位置 q，用 x_1 與 x_2 分別表示太陽和地球的位置，m_1 與 m_2 則是太陽和地球的質量，因為太陽和地球的軌道已經固定，只剩下一個方程。地球的軌道差不多是圓的，其離心率大概是 0.0167，很接近 0，所以為了簡單起見，可假設地球繞著太陽的軌道是圓形，那麼在適當的旋轉座標下，太陽和地球變成是不動的，用這個旋轉的座標來表示，上面的方程可化成底下的形式：

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

重點是這個方程變成兩個二階方程，等號右邊則是某函數 V 對 x 或 y 的變化率，這個 V 是類似位能的函數。但是由於還有雅可比常數，因此這實際上是一個三維的動態系統。

函數 V 為常數的「等高線」，會隨系統的能量和動量變化（圖 8）。這些等高線在五個特別的點產生拓樸結構的分歧，稱為拉格朗日點（Lagrange point 或 libration point），在天文學裡用 L1-L5 表示。它們對應自似（self-similar 或 homographic）的週期解。1764 年，歐拉發現拉格朗日點中共線的三點。另外兩點落在以太陽地球連線為一邊的正三角形頂點處，由拉格朗日在 1772 年發現。

歐拉在發現共線的自似週期解時，寫下一段有趣的話，他說如果把月球與地球的距離放大四倍，月球就可以永遠保持滿月。當然，這實際上是不會發生的，原因是這個如剛體般運動的解非常不穩定。

圖 9 瑞典國王奧斯卡二世。（維基）

圖 10 米塔列夫勒（維基）

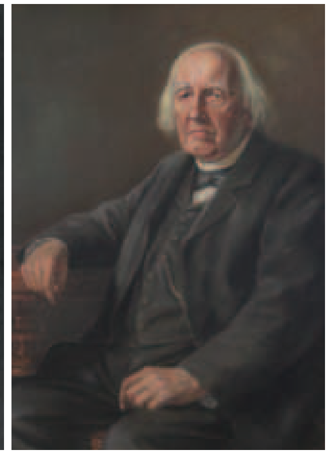


圖 11 懷爾斯查司。（維基）

圖 12 厄爾密特。（維基）

但是正三角形頂點的這兩個拉格朗日點，在具有單一大恆星的星系中是穩定的，我們的太陽系中，就有幾個小行星群落在這種位置。

龐卡赫與瑞典國王獎

瑞典國王獎

龐卡赫出生於 1854 年，1888 年發表關於三體問題的劃時代巨著時年僅 34 歲。當時他因為這項工作獲頒瑞典國王獎，也因此躍升為國際數學界的領袖人物，儘管在此之前他已是法國數學界的名人。

瑞典國王奧斯卡二世（King Oscar II）也是挪威國王，後來（1905 年）挪威和瑞典在他任內一分為二。與大多數君王不同，奧斯卡二世熱愛數學和科學，據說學生時期他的數學和科學成績就很好。當上國王後，他一直資助科學家和數學家，例如俄國著名女數學家柯瓦列夫斯卡婭（Sofia Kovalevskaya）。奧斯卡二世非常器重一位瑞典數學家米塔列夫勒。米氏早年到法國留學時，師事厄爾密特。厄爾密特對米塔列夫勒說的第一句話是他犯了錯，說他應該去聽懷爾斯查司（Karl Weierstrass）的課，因為厄爾密特認為懷爾斯查司才是當時全世界最了不起的數學家，此事讓米塔列夫勒印象深刻。

米塔列夫勒回到瑞典後，為了慶祝奧斯卡二世的 60 歲壽辰（1889 年），他得到國王的同意，提早五年籌備一項大獎，當時是全球數學界的大新聞。米塔列夫勒本來希望找全世界最頂尖的數學家擔任評審，但與柯瓦列夫斯卡婭溝通後，知道某些頂尖數學家之間關係不睦，不可能全部同時共事，最後決定的人選是德國的懷爾斯查司和法國的厄爾密特。這兩位都是數學界的領導人物，加上米塔列夫勒自己，三人共同擔任瑞典國王獎的評審。

三位評審在 1884 年至 1885 年經過多次書信往返，最後確定了徵獎公告，並於 1885 年公佈在瑞典數學期刊《數學學報》（*Acta Mathematica*）上（圖 13），又翻譯成多種語言，向全球數學界廣發英雄帖。

在訂定徵獎題目時，三位評審認為一定要提出特別重要的數學問題，即圖 13 中由懷爾斯查司提出的第一題。不過數學界有許多難題動輒懸宕百年以上，很難期望重要的問題在三年內能得出解答。為了避免無人能回答的窘境，懷爾斯查司與厄爾密特又另外列出三道題。他們認為第一題最重要，寫在公告第二頁，前面明列獎項規定、截稿日期等。公告同時以德文和法文併排發表。

第一個問題源自狄利克雷（Lejeune Dirichlet）的一段話。狄利克雷在偏微分方程、電磁學等領域有傑出貢獻，在 1850 年代曾經向友人克羅涅可（Leopold Kronecker）提到，他發現有個方法可解決力學系統問題，只要按部就班迭代就可得出解。如果真能做到，那麼像太陽系這樣的力學系

圖 13　瑞典國王獎徵獎公告第二頁，左欄為德文，右欄為法文。（取自 *Acta Mathematica* 檔案）

統，用迭代法就能將解寫成收斂級數，藉以研究其穩定性，將會是非常了不起的工作。可惜狄利克雷沒有寫下具體作法，不久之後就過世了。

由於狄利克雷是個十分嚴謹的數學家，所以懷爾斯查司對此事非常認真看待。但他苦思不得其解，不知狄利克雷的方法為何，於是提出這個問題，期望有人能得出狄利克雷的想法。具體而言，第一個問題是這麼問的：

> 給定一組質點，考慮它們在萬有引力下的運動，假設這些點不碰撞，請試著找出一組座標，還有以時間為變數的已知函數作為它的變量，使每一點的位置可以展開表示成一致收斂的級數。

換個淺白一點的說法，就是希望參賽者回答類似太陽系這類力學系統的穩定性問題。以太陽、地球、月球為例，如果我們能將地球與月球的位置用以時間為變量的一致收斂級數表示，便可以估計長時間，比方說一億年之後，地球與月球的位置。

當然，徵獎公告另外三個題目的水準也很高，可能三年內也沒人能做出重大貢獻，但國王生日還是得慶祝，那該怎麼辦？所以他們決定參賽者可以自由選題。不過讀者都明白，前述星系穩定性問題被排在第一位，明確表示獎項將優先頒給能解決這個問題的人。

徵獎截止日期是 1888 年 6 月 1 日，獎金是 2,500 克朗（crown），這是相當大的金額。當時米塔列夫勒的年薪大約 7,000 克朗，獎金接近他半年的薪資。以他身為國王器重的頂尖數學家來估計，獎金相當於現在的 100 多萬新臺幣。

最後，總共有 12 篇文章投稿角逐，有一說是 13 篇，但第 13 篇遲到，而且不合規定的直接寄給國王。據說那篇文章的水準顯然不足，所以沒被列入考慮。正式認可的 12 篇稿件中，龐卡赫的文章明顯勝過絕大多數稿件。只有一篇關於解析函數論的稿件也頗受肯定，作者是阿培爾（Paul É. Appell），與龐卡赫的文章刊登在同一期《數學學報》。

為了瑞典國王獎的公正性，避免被認為偏袒某個國家或學派，所有投稿都是匿名的。參賽者需在一封密封信函中附上暗語，待得獎文章確定後，作為確認作者身份的依據。這些印證的信函評審階段不能拆封，所以理論上沒人知道文章的作者。但實際上評審已經猜到寫得最好的文章出自龐卡赫之手。怎麼知道的？因為龐卡赫是厄爾密特的得意門生，在此之前能力已經備受肯定。他曾經向厄爾密特表達投稿的意願，但沒有說要選哪個題目，厄爾密特希望他去做第四題。

龐卡赫投稿的文章長達 156 頁，內容之創新與深

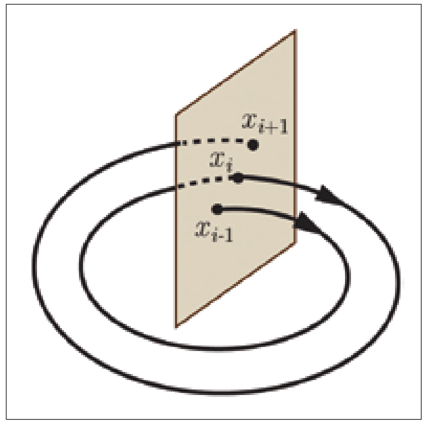


圖 14 龐卡赫映射示意圖。

刻，雖然沒有完全回答公告的第一題，但其貢獻已經不亞於完整回答這個問題。

在確定得獎人為龐卡赫之後，米塔列夫勒請一位年輕瑞典數學家弗拉格曼（Lars E. Phragmén）做出版前的細部檢查。弗拉格曼指出龐卡赫文章中有幾處比較含糊的地方，其中大多數米塔列夫勒都覺得無可厚非，不難說清楚，唯獨有一處米塔列夫勒也覺得不明白。若用龐卡赫原來的語言，這是一個關於漸近曲面重合的證明。

米塔列夫勒去函請龐卡赫解釋，龐卡赫拖了很久才回覆。顯然龐卡赫一時無法修正或釐清，最後他寫信給米塔列夫勒表達沮喪與歉疚，說自己必須大幅修改文章。只是，龐卡赫的回覆拖了好幾個月，不僅獲獎結果已經公告，連得獎文章都已付梓，而且印刷好的《數學學報》已經寄給不少人。米塔列夫勒特別擔心此事會激怒國王，便祕密將所有寄出的期刊追回，並將該期《數學學報》全部重印。

從兩個方面來看，這是一個代價不斐的錯誤。首先，米塔列夫勒要求龐卡赫賠償重印的費用，龐卡赫為此支付了 3,500 克朗。其次，從這個錯誤發現了混沌的現象。從數學史的進展來看，這是個美麗的錯誤，價值遠超過 3,500 克朗。

龐卡赫論文的關鍵思想

龐卡赫得獎論文包含很多高度原創且影響力深遠的思想，以下列舉幾項。

首先是龐卡赫回歸定理。這是前述混沌理論中關於「回歸」概念的第一個定理。大致上，這個定理說的是，考慮某一保持測度（面積）的映射，例如前面所提的貓映射或撲克牌洗牌操作（需適當定義測度），如果反覆迭代這個映射，則任何點在無窮的未來中一定會任意接近原來的位置。這是個相當重要的定理。

另一個是後來被稱為龐卡赫映射（Poincaré map）的重要概念。比方說考慮一條系統的軌道（姑且想像是太陽、地球、月球整個系統的軌道），若軌道在某最短時間會回到相同的幾何位置與速度，我們就說這是一條週期軌道（週期解），最短時間就是週期。實際系統的解大多都不是週期的，但仍存在許多週期解。前面所提的沙羅週期，表示這條軌道很接近週期 18 年的週期解，如果在相空中取這條軌道的適當截面，上面的點幾乎 18 年後都會映回此截面。這個從截面映回截面的映射稱為龐卡赫映射（見圖 14）。適當選取截面，可以使龐卡赫映射成為保面積的映射。重點是，截面上龐卡赫映射的不動點與週期點，都對應到原系統的週期解。

此外，還有後人所稱的林德施泰特 / 龐卡赫方法（Lindstedt-Poincaré method），可以用冪級數展開來表示週期解，判斷其斂散性，後來成為常微分方程研究週期解的重要工具。文中還有不變積分的研究，除了質心、能量、動量、角動量守恆之外，布倫（Heinrich Bruns）在 1887 年證明三體運動沒有其他的守恆量，龐卡赫得獎之後，在 1892 年的後續工作中得到更廣的證明。換句話說，如果考慮三體問題，比方前面提到共平面的太陽、地球、月球運動，三個點各有四個自由度。假設質心位於原點，則少了兩個位置的自由度，再扣除底下的守恆量：一個能量、一個角動量、兩個動量，總共可以

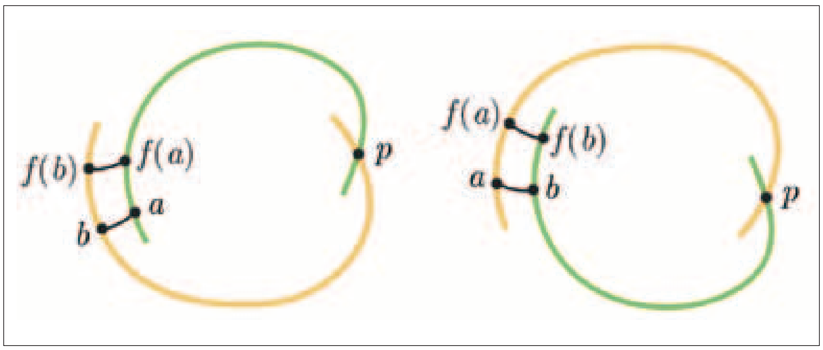


圖 15　在平面上，對重合穩定曲線和不穩定曲線做擾動，如果不再重合，將會違反保面積的條件。

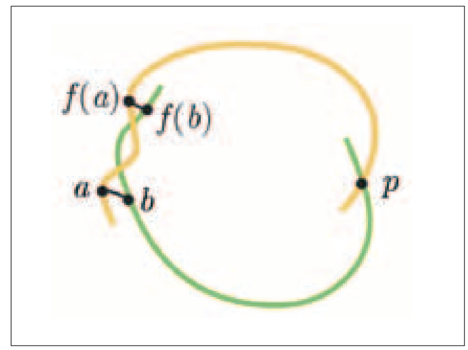


圖 16　實際的三體問題中，多出來的維度容許第三種情況發生，保面積條件得以保持。

消除六個自由度，但無法再往下降了，因為沒有其他的守恆量。

還有一個新想法，龐卡赫稱之為漸近曲面，或稱穩定曲面與不穩定曲面。現在通用的稱呼是穩定流形（stable manifold）與不穩定流形。所謂漸近曲面，意思是指當時間往未來或往過去趨近於無窮時，曲面上的軌道會漸漸趨近於某不動點或週期解。現在通稱時間往未來趨近的為穩定流形，往過去的為不穩定流形。龐卡赫發現，某些限制三體問題的週期解是龐卡赫映射的同宿點，其對應的穩定流形和不穩定流形重合。他原本試圖證明把零質量擾動成小質量時，這兩個流形仍然會重合。

這是一個很不顯然的陳述。我們可以用圖 15 解釋龐卡赫的想法。理由如下：點 p 本來是一個同宿點，也就是說它的穩定曲線和不穩定曲線是完全重合的。但經過小擾動後有兩種情況，分別成為小圖中不重合的兩條曲線，假設黃色弧線為穩定曲線，綠色弧線為不穩定曲線。在圖中 $a-b$ 曲線段被映射至 $f(a)-f(b)$ 曲線段，$p-b-a-p$ 所包的區域被映射至 $p-f(b)-f(a)-p$ 所包的區域。但這兩區域的面積不同，與保面積的假設矛盾，所以證得擾動後兩曲線仍然必須重合。

上面的論證沒有錯誤，如果考慮的是平面上保持面積的流（flow）經過一定時間的變化，上面的論證就完全正確，但是在考慮三體問題的時候就有麻煩了。針對三體問題，龐卡赫考慮的是某個截面上的龐卡赫映射，上面所對應的 p 不只是一個點，而是一個特別的週期解，趨近或遠離這個週期解的那些解在空間中各形成一個二維曲面。所以雖然仍然從二維截面來觀察，映射的迭代卻必須考慮另一種狀況（圖 16）。這第三個情況仍然把 $a-b$ 曲線段映射至 $f(a)-f(b)$ 曲線段，但中間容許有「糾纏」，使得面積得以保持。因此再往前或往後迭代將會產生無窮多的糾纏，都不違背保面積的條件。這看起來可能很奇怪，但卻是小擾動後會真實發生的情況。這也表示龐卡赫的論證無法成立。

這種隱藏了無窮多糾纏的龐卡赫映射，不容易憑空想像截面上的點在不斷迭代下會出現什麼圖像，但可以想像穩定與不穩定曲線交會處同時有拉長與壓縮的兩股力量，造成鄰近區域對初始位置的敏感

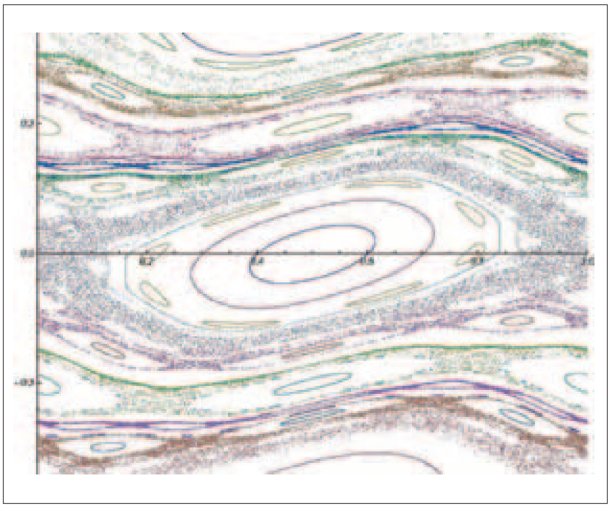


圖 17（陳國璋提供）

依賴，迭代這些鄰域中的點，便形成了一個混沌的區域。這種龐卡赫映射類似經過扭曲但仍然保面積的貓映射，圖 16 顯示許多點在這類映射的多次迭代後出現的圖像。在圖 16 中，除了混沌的區域外，穩定與不穩定流形相交產生的小圈圈裡還有很多小圈圈，它們形成結構上穩定（不會出現混沌）的區域，稱為橢圓島（elliptic island）。圖 17 顯示此類映射迭代下的不變集（invariant set）。當今這個年代與龐卡赫時代有一個很大的差別，我們擁有很多計算軟體可協助執行這類迭代，因此可以輕易觀察到混沌與秩序共存的現象。

龐卡赫在徵獎論文中忽略了第三種狀況，他思考許久，發現論文必須大幅修改。他在寫給米塔列夫勒的信中問到：考量這篇文章前面的貢獻，是不是還夠格獲得這個大獎？這篇文章的貢獻的確非常巨大，拿下這個獎項也毫無疑問，只是龐卡赫得要支付比獎金還高額的期刊重印費用就是了。

後續發展與結語

上述混亂與穩定區域交錯的現象，後來發展成一套理論，稱為 KAM 理論，由科莫哥洛夫（Andrey N. Kolmogorov）、阿諾德和莫澤（Jürgen Moser）所建立。1954 年，科莫哥洛夫在荷蘭阿姆斯特丹的世界數學家大會（ICM）上，給出這項理論最初的陳述，但沒有寫下證明，莫澤與阿諾德後來分別寫下兩個版本的證明。多體問題具有一些特別結構，其中之一是許多古典力學系統共享的結構，在幾何學稱為辛結構（symplectic structure），在物理上稱為漢米爾頓系統（Hamiltonian system）。KAM 理論是漢米爾頓系統的穩定性理論，可以解釋上面所提穩定區域橢圓島的存在。混亂與穩定區域交錯的圖像，則暗示我們的太陽系是一個秩序與混沌並存的系統。

1990 年前後，巴黎天文台的科學家拉斯卡（Jacques Laskar）以嚴格控制誤差的數值模擬，去驗證這個理論，結果簡單的說便是：內環的行星相對不穩定，包括地球在內，要判斷水星、金星、地球、火星很久以後的位置，基本上是不可能的。譬如，假使想知道一億年之後這些行星的位置，其誤差不超過 100 萬公里，那麼現在對所有這些行星位置的測量，其誤差需要控制在 10 公分以內。換句話說，現在對於初始條件的小小擾動，好比隕石或小彗星的擾動，都足以造成一億年之後位置的巨大改變。其他的結果包括水星和金星有可能碰撞，但短期內不會發生。至於外環行星，包括土星、木星、天王星、海王星（不包括冥王星），則是相對穩定的，可以合理的預測它們在一億年之後的位

置。這個證據也顯示，太陽系應該是穩定與秩序並存的。

另外值得一提的是，1961 年斯特尼科夫（Kirill Sitnikov）嚴格驗證了限制三體問題存在混沌現象。斯特尼科夫考慮一對以小離心率互繞的等質量質點，還有一個零質量沿著與橢圓軌道平面垂直且過質心的直線運動。他證明無論給定什麼正整數列，都存在一個不斷上下震盪的解，使得零質量質點穿越橢圓軌道平面的時間間隔中，等質量質點互繞的次數完全符合給定的數列。這與前文提到的雙擺不可預測定理極為相似。

以現代語言來說，其關鍵都是因為同宿點附近隱藏了一個馬蹄鐵映射（horseshoe map）。斯特尼科夫的工作，八年後被阿列克謝耶夫（Vladimir Alekseev）推廣至正質量與一般的離心率。大約在同時期史梅爾（Stephen Smale）定義了馬蹄鐵映射，並將之與符號動力系統（symbolic dynamic）聯繫，證明這種映射的混沌現象，並深刻影響動力系統整個領域的後續發展（參見本期〈在里約海灘發現馬蹄鐵〉）。

天體力學是一門歷史悠久的學問，在數學史上佔有獨特的地位，包括微積分在內的許多數學方法，都與天體運行的研究密切相關。龐卡赫關於三體問題的研究，不僅開啟了動力系統這個數學領域，還影響了一些代數拓樸基本概念的出現。他定義了這兩個領域的許多基本概念，本文僅簡述混沌相關概念從中出現的歷史，有興趣深入了解這段歷史的讀者，可參考文末所列之「延伸閱讀」。

最後引用龐卡赫在《科學與方法》（*Science et Méthode*，1908）中的一段話來結尾：

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue. … je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir.

科學家研究大自然並不是因為有用，是因為他們樂在其中，而使他們樂在其中的是大自然的美。如果大自然不美，就不值得我們去了解，那人生也就失去了意義……我說的那種深刻的美來自各個部分之間和諧的秩序，需要純粹的智力去理解領會。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

本文主要內容為 2016 年 3 月 26 日作者在臺灣大學科學教育發展中心「秩序與複雜的華爾滋」系列講座的演講稿。作者感謝臺大科教中心的邀請，以及《數理人文》編輯群的細心校稿。

延伸閱讀

▶ 陳國璋〈天體力學到混沌理論的形成〉（2016/3/26），CASE 探索《秩序與複雜的華爾滋》系列講座第一講錄影：
https://www.youtube.com/watch?v=iTMVVCUG8es

▶ Peterson, Ivars *Newton's Clock: Chaos in the Solar System*。臺灣譯本：皮特遜《牛頓時鐘——渾沌太陽系》（1994），黃銘鏘、黃啟明譯，牛頓出版社。

▶ Diacu, Florin & Holmes, Philip, *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability* (1996) , Princeton Univ. Press.

▶ Green, June-Barrow, *Poincaré and the three body problem* (1997), Amer. Math. Soc..

▶ Gray, Jeremy, *Henri Poincaré: A Scientific Biography* (2013), Princeton Univ. Press.