統一隨機性的定理

相異隨機結構背後的深刻幾何連結

作者：哈奈特（Kevin Hartnett）　譯者：紀露結
哈奈特是知名科普作者。除了在《波士頓地球報》開設專欄，文章也散見各報章雜誌，並收錄於《最佳數學寫作選集》。

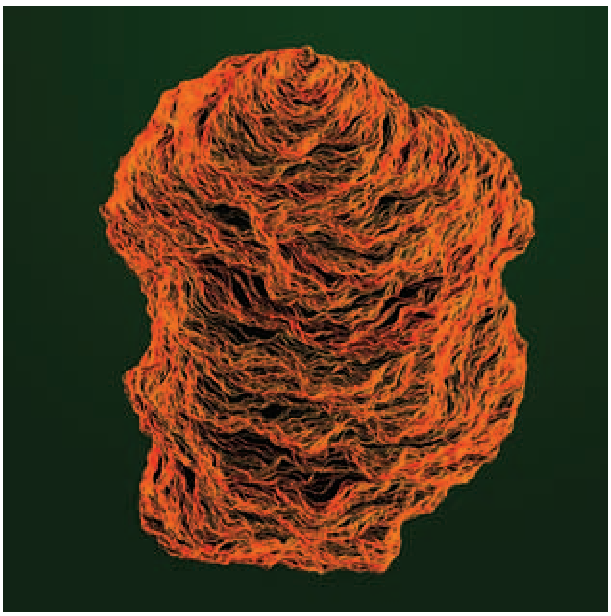

圖 1　SLE 曲線。（Jason Miller 提供）

標準的幾何形體可用簡單的方式描述，例如每條直線即是 $y = ax + b$，而且他們彼此之間的關係井然有序：連結兩點成一直線，連結四條線段成一正方形，連結六個正方形可得一正方體。

然而這些不是麻省理工學院數學系教授謝菲爾德（Scott Sheffield）考慮的物件，他研究的是隨機過程所構成的形體。這些形狀獨一無二、從未重複，最著名的隨機形體是隨機漫步（random walk），它無所不在──大至金融資產價格的波動，小至量子力學的粒子路徑。這些漫步之所以隨機，是因為我們完全無法預期路徑上一個給定的點接下來會出現在何處。

除了一維的隨機漫步，還有很多種類的隨機形體，例如各式各樣的隨機路徑、隨機二維曲面、隨機生長模型（能用來模擬例如石頭上的苔蘚散佈模式）。這些現實世界中自然生成的形狀，直到不久前都還不是嚴格的數學思維所能觸及。數學家面對一大堆隨機路徑與隨機二維形體時，對於它們所共有的性質竟毫無頭緒。

謝菲爾德與劍橋大學教授米勒（Jason Miller）經常合作，他們近幾年的工作顯示，這些隨機形體可以被分門別類，每一類的性質都有自己的特性，而且某類隨機物體與另一類隨機物體竟有非常清楚的連結。他們的研究為幾何隨機性的統一理論掀開了新篇章。

謝菲爾德說：「考慮最自然的東西：樹、路徑、曲面，我們證明了它們彼此相關。一旦建立了這些關係，你就能證明之前無法證明的各種新定理。」

謝菲爾德與米勒會在近期發表他們系列三篇論文的最後一部分。這是數學家首次對隨機二維曲面提出全面性的觀點。這項成就有如歐幾里得對平面幾何的觀照，極其重要。❶

蘇黎世聯邦理工學院（ETH Zürich）教授弗納（Wendelin Werner）評論道：「謝菲爾德與米勒能納入自然的想法，不被技術細節所牽絆，基本上他們所得到的結論，其他方法都無法望其項背。」弗納在 2006 年以其在機率論與統計物理的研究榮獲費爾茲獎。

Quanta 是西蒙斯基金會（Simons Foundation）出版但編輯獨立之網路科普雜誌（http://www.quantamagazine.org/），希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：https://www.quantamagazine.org/20160802-unified_theory_of_randomness/
本刊感謝 *QUANTAMagazine.org* 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。

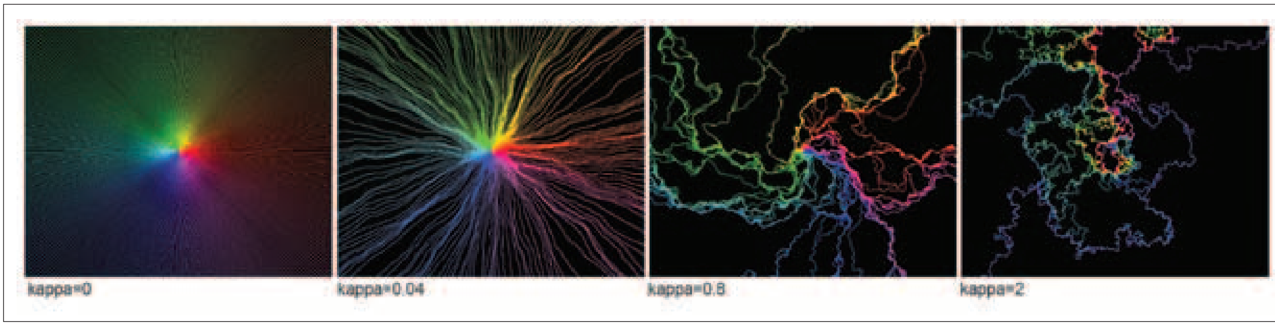

圖 2 隨機曲面上的射線。kappa 表示隨機的程度，0 表示完全無隨機，由左而右，隨機程度增加。（Scott Sheffield 提供）

量子弦上的隨機漫步

在標準的歐幾里得幾何中，我們感興趣的是直線、射線、光滑曲線（如圓與拋物線）等。這些圖形上的點座標具備明確、有規律的模式，可以用函數來描述。舉例而言，如果你知道直線上兩點的坐標值，就能知道線上其他點的坐標值。圖 2 中左圖的射線與其上各點坐標值的關係也是如此。

想要試著理解隨機二維幾何可以飛機為例。就像是東京到紐約的這類長程航線，駕駛員從城市到另一城市是以直線飛行的。但是若把航線畫在地圖上，看起來卻是彎曲的，這是因為我們將圓球如地球上的直線投射到平面的紙上。

如果地球不是圓的，而是以更隨機與狂野的方式彎曲的複雜形狀，那飛機在二維平面上呈現出來的航線會益發不規律，就像圖 2 左二圖的射線一樣。

如果飛機從原點出發，嘗試在隨機起伏的幾何曲面上盡可能以直線飛行，它的軌跡剛開始會像圖 2 左邊兩圖中的射線。然而當刻畫曲面的隨機程度增加了（kappa 值增加），原先看似平直的射線擺動扭曲，變成愈來愈像鋸齒狀的閃電，幾乎毫無章法可言（參考圖 2 右邊兩圖）。

然而沒有章法不代表無法理解。在隨機幾何中，如果知道某些點的位置，就能（頂多）指定後續各點位置的機率。但就像作弊的骰子也是隨機的，只是其隨機方式和公平骰子不同。我們也可以用不同的機率測度（probability measures）來生成隨機曲面上各點的座標。

數學家已經發現（也希望持續發現），某些隨機幾何的機率測度是特別的，而且出現在許多不同的領域內。自然界在生成隨機曲面時，似乎很喜歡使用某種很特殊——有不可數無窮多面——的骰子。謝菲爾德與米勒等數學家希望能了解這些骰子的特性，以及其所生成的幾何形體的「典型」性質，就像數學家對正常球面的理解那麼明確一樣。

數學家以此方式理解的第一類隨機形體是隨機漫步。就概念上而言，所謂一維隨機漫步的路徑，就是用硬幣的正反面決定每步的方向——正面往左，反面往右，如此往復走出來的路徑。這類運動在 1827 年正式進入人類眼簾：英國植物學家布朗（Robert Brown）觀察到懸浮在水中的花粉粒呈現看似隨機的運動，這是因為水分子撞擊花粉粒而形成的。接著在 1920 年代，麻省理工學院的維納（Norbert Wiener）用精確的數學語言描述了這個今日稱為「布朗運動」的過程。

布朗運動是隨機漫步的「尺度極限」（scaling limit）。當隨機漫步的步伐間距很小，每走一步的時間間隔也很小，則此隨機路徑會愈來愈像布朗運動。幾乎所有隨機漫步在時間極限上都會收斂到布朗運動。

另一方面，二維隨機空間是物理學家嘗試了解宇宙結構時，才首次成為研究的重點。

弦論中考慮的是隨著時間扭動的細弦。就像一個點隨時間運動的軌跡是一維曲線，同理，一條弦隨

---

❶ 兩人連續三篇以 “Liouville quantum gravity and the Brownian map”（里歐維勒量子重力與布朗映射）為名的文章，已分別於 2015 年 7 月、2016 年 5 月、8 月發表在 arXiv 預印本網站上。

時間運動的軌跡是一個二維曲面。這個稱作「世界面」（worldsheet）的曲面，隱藏著一維弦隨時間扭動的歷史。

謝菲爾德說：「為了讓弦的量子物理有意義，我們需要某種像是曲面布朗運動的東西。」

許多年來，物理學家已經有一些類似的部份成果。目前任職普林斯頓大學的物理學家波里亞可夫（Alexander Polyakov），1980 年代提出一種描述這些曲面的方法，稱為里歐維勒量子重力（Liouville quantum gravity，LQG）❷。這個能令人一探隨機二維曲面的看法，雖不完整卻很有用，物理學家能因此定義曲面的角度，進而計算曲面的面積。

與此同時，有一個稱為布朗映射（Brownian map）的模型提供了研究隨機二維曲面的另一種方法。LQG 易於計算面積，布朗映射則具備能計算兩點距離的結構。將布朗映射與 LQG 兩者結合，它們似乎提供了兩種互補的視角，去切入物理學家與數學家期待的基本上相同的概念。但他們卻無法證明這兩個模型彼此相容。

謝菲爾德表示：「這情況很奇怪，關於所謂最典型的隨機曲面，我們有兩個彼此競爭的模型，分別給出不同的資訊。」

從 2013 年開始，謝菲爾德與米勒就決定要證明，這兩個模型本質上描述的是同一件事。

隨機生長的難題

謝菲爾德與米勒因膽識而合作。2000 年代初期，謝菲爾德還是史丹佛大學的研究生，他的指導教授丹柏（Amir Dembo）是機率論學者。在畢業論文中，謝菲爾德提出一個問題，想要在一個曲面的複雜集合中找出秩序。他提出這個問題就是要當作思考練習。

謝菲爾德說：「我以為這會是個需要寫上 200 頁，而且可能無人能解決的高度難題。」

然而米勒出現了。謝菲爾德畢業數年後，米勒在 2006 年進入史丹佛，也開始在丹柏麾下學習。丹柏為了讓米勒認識隨機過程，將謝菲爾德的問題交給他。謝菲爾德說：「米勒把問題解決了，這令我刮目相看。我們開始合作，最後我們有機會聘他到麻省理工進行博士後研究。」

為了證明 LQG 與布朗映射是隨機二維曲面的兩個等價模型，謝菲爾德與米勒採取了概念上非常簡單的思路——他們決定看看是否能在 LQG 曲面上找到測量距離的方法，然後證明這個新方法與布朗映射內稟的距離測量方式相同。

謝菲爾德與米勒想要設計一把數學尺，用以測量 LQG 曲面上的距離。但他們很快意識到，普通的尺無法妥善應用在隨機曲面上，因為想在這個狂亂空間中移動直尺，它會整個被四分五裂。

他們放棄直尺的想法，轉而把距離問題重新詮釋為生長的問題：想像曲面上細菌群落的生長。群落從一點開始，隨著時間推移，細菌往四面八方擴張。想要測量兩點的距離，一個有點迂迴的方法是測量菌落從其中一點開始，最終占據另一點所需的時間。謝菲爾德說這個技巧多少可描述成一個球狀物逐漸生長的過程。

在正常平面上描述球面（這時是圓）的生長很容易，因為所有點都是已知而固定的，生長的法則也是決定性的（deterministic）❸。相反的，描述隨

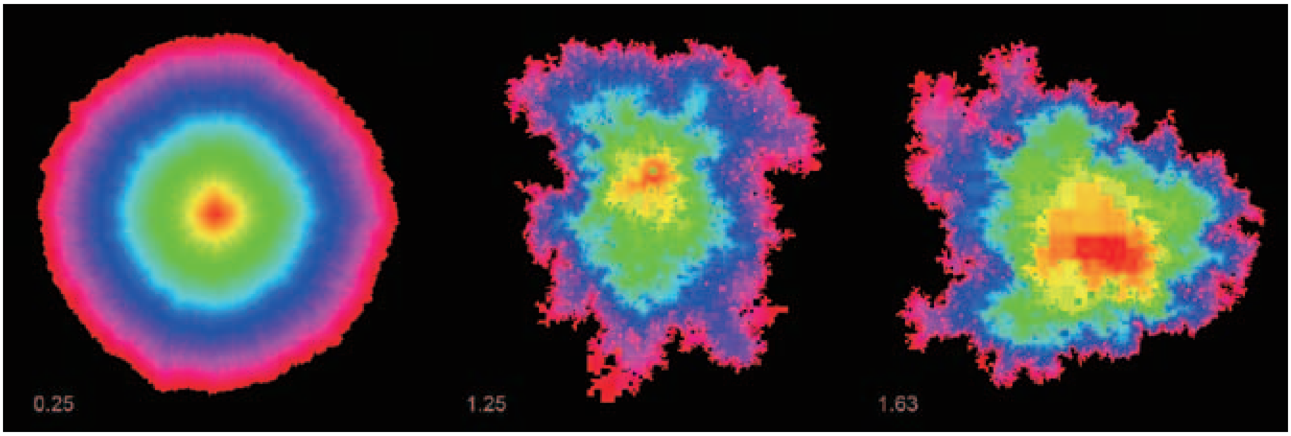

圖 3 在不同隨機程度的隨機曲面上的伊登生長情況越來越狂野。（Jason Miller 提供）

機生長要困難很多，長期困擾著數學家。然而謝菲爾德與米勒很快發現「理解隨機曲面上的隨機生長比在光滑曲面上容易。」隨機生長與其所植基的隨機曲面，就某意義來說，共用的是同一套隨機性語言。「在瘋狂曲面上套上一個瘋狂生長模型，不知怎麼回事，就是會讓你的日子過得舒服一點。」

圖 3 顯示的是一種能描述細菌群落的特定隨機生長模型，稱為伊登模型（Eden model）。細菌群落會跟著沿邊界逐次隨機增加的菌點而增長，我們在任意時刻都無法確知邊界何處會出現下一個菌點。米勒與謝菲爾德在這些圖片中展示了二維隨機曲面上的伊登生長模型。

圖 3 最左邊顯示在相當平緩（不很隨機）的 LQG 曲面上的伊登生長效果，生長過程循序推進。我們用顏色表示時間，標示曲面上該時間出現的點，結果就像同心圓一樣。

接下來，謝菲爾德與米勒在隨機性愈來愈大的曲面上畫出生長結果（圖 3 右兩圖）。在產生曲面的函數中有一個控制隨機程度的常數 gamma。常數 gamma 愈大，曲面就愈粗糙，山峰更高，山谷更深，因此在曲面上的隨機生長也就更不規律。圖 3 各圖的 gamma 值，左圖是 0.25，中圖是 1.25，構造曲面的隨機性增加了五倍。這個不確定曲面上的伊登生長自然隨之扭曲變形。

當 gamma 取值 $\sqrt{8/3}$（約 1.63）時，LQG 曲面起伏得更劇烈。他們所選擇的粗糙度正好和布朗映射的相同，因此容許對隨機曲面的這兩個模型做直接比較。

在這類粗糙曲面上的隨機生長非常不規則，若想用數學描述，就好比在颱風裡期待只有細微的壓力起伏一樣困難。但謝菲爾德與米勒意識到，他們必須理解如何在非常隨機的 LQG 曲面上模擬伊登生長，如此才能建立一種距離結構，或許可以等價於（也非常隨機的）布朗映射上的距離結構。

謝菲爾德說：「釐清如何將隨機生長以嚴格的數學描述是一項十分艱鉅的任務。」而他注意到華威大學（University of Warwick）的賀勒（Martin Hairer）正是因為克服此類困難在 2014 年榮獲費爾茲獎。「我們總需要超級聰明的手法來對付難題。」謝菲爾德這麼表示。

隨機探索

謝菲爾德與米勒的聰明手法是基於一種特別的隨機一維曲線，這類曲線與隨機漫步相似，只是它從不和自己相交。物理學家很早就遇到這種曲線，例如他們研究正自旋與負自旋粒子的叢集時，這兩種粒子叢集的邊界就是一條不自交的一維路徑，且路

[2] 編註：弦論的競爭理論「迴圈量子重力」（loop quantum gravity）的縮寫也是 LQG，由於本文後面都使用縮寫，讀者切勿混淆。

[3] 譯註：deterministic 決定論式的，相對於「隨機的」。因為這裡處理的是隨機成長的模型。

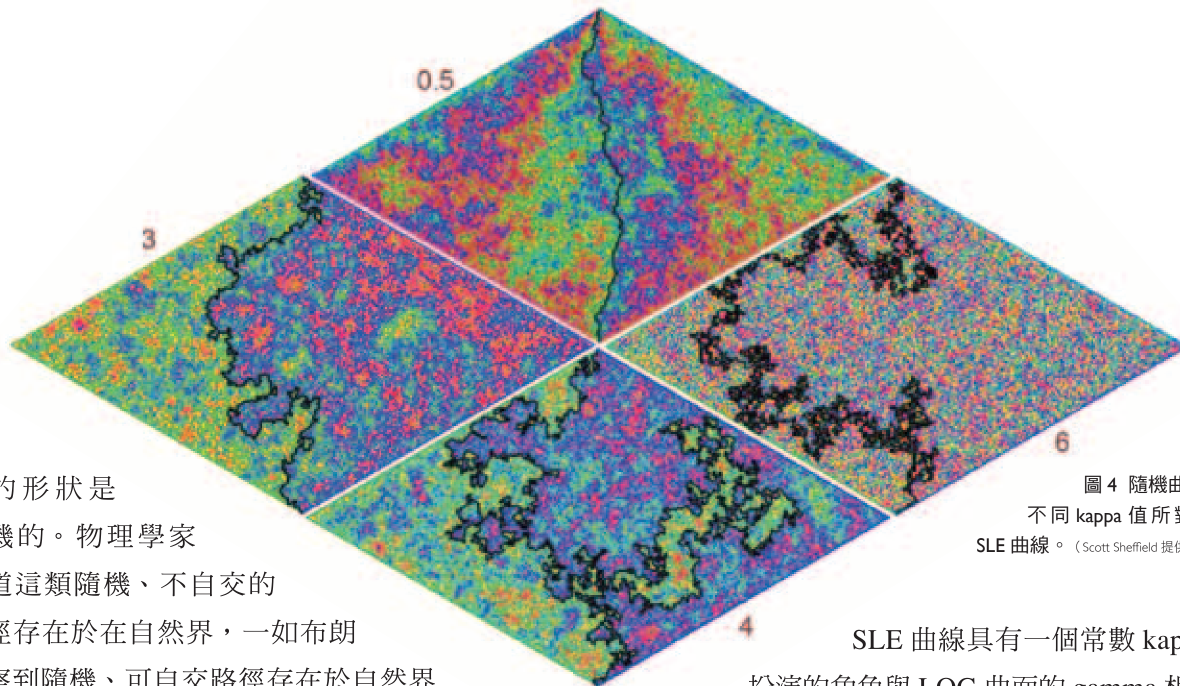

圖 4 隨機曲面上，不同 kappa 值所對應的 SLE 曲線。（Scott Sheffield 提供）

徑的形狀是隨機的。物理學家知道這類隨機、不自交的路徑存在於在自然界，一如布朗觀察到隨機、可自交路徑存在於自然界一樣，但是物理學家想不出精確的方法來思考這類曲線。1999 年，當時任職於華盛頓雷蒙園區微軟研究中心的施拉姆（Oded Schramm）引入施拉姆 / 婁納過程（Schramm-Loewner evolution，SLE）的想法，作為不自交隨機曲線的標準模型。

施拉姆的 SLE 曲線工作是隨機形體研究的里程碑。一般公認，2008 年因登山意外過世的施拉姆，若在發表論文時能再年輕幾個星期，那他一定會得到費爾茲獎 4。畢竟以 SLE 研究為基礎，與施拉姆共事的另兩位數學家都已獲得費爾茲獎：分別是 2006 年的弗納，與 2010 年的史米諾夫（Stanislav Smirnov）。更根本的是，發現 SLE 曲線讓我們得以證明許多其他隨機形體的性質。

也是施拉姆的朋友與合作者的謝菲爾德說：「施拉姆的成果，使得許多從物理學標準已知為真的事物，一夜之間突然踏入可用數學證明的境地。」

對米勒與謝菲爾德而言，SLE 曲線竟是出人意表的珍貴。為了在 LQG 曲面測量距離，進而證明 LQG 曲面與布朗映射本質上相同，他們需要在隨機曲面上模擬隨機生長，而 SLE 正是解決之道。

米勒說：「靈光閃現那一刻，我們意識到可以運用 SLE 來構造隨機生長，而且在 SLE 與 LQG 之間存在某種關聯。」

SLE 曲線具有一個常數 kappa，扮演的角色與 LQG 曲面的 gamma 相似。gamma 描述 LQG 曲面的粗糙度，kappa 則描述 SLE 曲線的「凌亂度」──當 kappa 值較低，曲線與直線無異；當 kappa 值增加，構造曲線的函數有了更多的隨機性，使曲線更不規則的扭動彎曲，但始終遵守曲線可回彈、不可穿過的不自交規則。圖 10 的 SLE 曲線 kappa 值分別為 0.5、3、4、6。

謝菲爾德與米勒注意到當他們把 kappa 值調到 6、gamma 值調到 $\sqrt{8/3}$ 時，隨機曲面上的 SLE 曲線遵循了一種探索過程 5。由於前有施拉姆及史米諾夫的研究成果，謝菲爾德與米勒了解到這是一種「盲探索者」（blind explorer）軌跡。盲探索者會在走過之後留下足跡，標示出其路徑。盲探索者盡可能隨機前進，只有當它碰到先前行走過的路徑時，它會掉頭離開，避免穿過曲線或進入死胡同。

謝菲爾德說：「盲探索者發現每當它的路徑碰到自己時，就會切掉一小塊被路徑圍繞的地域，並且絕對不會再光臨。」

謝菲爾德與米勒接著考慮了伊登的細菌生長模型，這個模型在隨機曲面生長時具有與盲探索者非常相似的效果──細菌會「掐掉」一塊領地，在其上生長，往外擴張後，不會再回到原有領地。細菌群落侵佔的這塊領地，看起來與盲探索者所割捨的土地一模一樣。況且，無論何時，盲探索者對於隨

機曲面尚未探索的外在區域所掌握的資訊，在任意時刻都與細菌群落掌握的資訊一樣。兩者的差別在於，細菌群落是一下子從外圍邊界的點成長，而盲探索者的 SLE 路徑只能從末梢長出。

在 2013 年發表在網路上的論文中，謝菲爾德與米勒設想了以下情況：如果每隔幾分鐘，盲探索者會神奇且隨機的傳送到它已探索領域的邊界點上，結果會如何？在邊界上這樣任意移動，盲探索者也可以一下子有效的在邊界各點延伸其路徑，就如同細菌群落一般。因此，謝菲爾德與米勒得以運用 SLE 曲線在隨機曲面上行進方式的知識，來理解之前令人束手無策的隨機生長，其中只需要做一些特別設定，曲線演變過程正好可以描述隨機生長的過程。謝菲爾德說：「SLE 與隨機生長之間有種特別的關係，就是這樣的奇蹟特質，使得一切都有可能成真。」

透過精確理解 LQG 曲面上的隨機生長模式進而得到的距離結構，正好與布朗映射上距離結構吻合。謝菲爾德與米勒最終把隨機二維曲面的兩個相異模型，整合成一個既相容又能以數學理解的基礎物件。

將隨機性轉化為工具

謝菲爾德與米勒在科學預印論文網站 arxiv.org 發表 LQG 與布朗映射等價證明的系列論文，目前已經發表了前兩篇，並預計在 2016 年夏末發表第三篇，同時也是此系列的最後一篇論文。他們的工作打開了一扇門，讓我們能跨越不同的隨機形體與隨機過程，得以了解隨機不自交曲線、隨機生長和隨機二維曲面彼此間的關係。這是一個例子，展現隨機幾何領域近來益發精密的研究結果。

謝菲爾德說：「這有如身在有三處礦穴的寶山，一是鐵礦，一是金礦，最後是銅礦。然後突然之間，你發現了將三處礦穴連結在一起的方法。如今你坐擁各種元素，可以用它們打造出前所不能的事物。」

許多問題懸而未解，像是如果放寬目前論文裡 LQG 曲面的條件，使曲面不再那麼粗糙，SLE 曲線、隨機生長模型與距離測量三者的關係是否依舊成立？從現實觀點，謝菲爾德與米勒的結果應該可以用於描述自然界中隨機生長的現象，例如雪花、礦床、岩洞中的樹枝狀石（dendrite），但目前只能用在想像的隨機曲面世界上。他們的方法能否應用到我們身處的正常歐氏空間？這仍有待數學家來解答。∞

本文出處

QUANTAMagazine.org, August 2, 2016

譯者簡介

紀露結現就讀於臺灣大學數學研究所。

延伸閱讀

▶ Jason Miller 劍橋大學實驗室網頁的圖像頁，裡面有很多其他資料。

http://statslab.cam.ac.uk/~jpm205/images.html

▶ Scott Sheffield 麻省理工學院實驗室網頁的圖像與遊戲頁。

http://math.mit.edu/~sheffield/games.html

4 費爾茲獎只頒給年齡未滿 40 歲的數學家。

5 探索（explore）在這裡是一個專有名詞，類似隨機漫步。