

在里約海灘發現馬蹄鐵

作者：史梅爾 Stephen Smale 譯者：周樹靜

史梅爾是美國數學家，在加州大學柏克萊分校任教 30 年退休後，轉任職於香港城市大學與豐田芝加哥科技學院。他的研究領域跨越微分拓樸、動力系統、數理經濟、計算理論。1966 年獲得費爾茲獎，2007 年獲得沃爾夫獎。



史梅爾。(維基·Halleyo 攝)

混沌是什麼？

電影《侏羅紀公園》中，有一位數學家在討論混沌（chaos）。葛雷易克（James Gleick）的《混沌》長期占據暢銷書排行榜，史托帕德（Tom Stoppard）知名劇作《艾凱狄雅》（Arcadia）中的角色高談混沌的意義。到底，大家在興奮個什麼勁？

混沌是一門新科學，確立了無所不在的不可預測性，其實是我們日常經驗的基本特性。

過去這兩個世紀，決定論的信條宰制了科學思想，認為世界當下的狀態將會明確決定未來的狀態。這項信條源自物理力學理論的影響，在這門理論中，牛頓的運動方程描述了大自然狀態的時間軌跡。這類方程的數學特質，就是由某刻的初始條件，便足以決定其他任何時刻的解狀態。一般認為這就是決定論哲學之所以正確的鐵證。有些人更深入的認定決定論否斥了自由意志（甚至人類責任概念）的存在。

到了 20 世紀初，由於量子力學的出現，決定論的破綻才得以顯現。至少在電子、質子與原子的層次，科學家發現不確定性根本到處遍布，因為量子力學運動方程的解是隨時間演變的機率。

儘管出現量子力學的挑戰，但是牛頓方程仍然主宰了鐘擺運動、太陽系運行，以及天氣變化這一類宏觀現象，因此量子革命並無損於許多決定論特性的思考模式。舉例來說，二次世界大戰之後，科學家仍然相信只要有足夠豐富的電腦資源，就可以成功進行天氣的長期預報。

不過在 1970 年代，科學社群注意到另一項革命的出現——混沌理論。依我的看法，這似乎正是牛頓式決定論的致命一擊。大家現在知道，即使面對日常經驗現象，也必須處理不可預測性的問題。得丟硬幣才能決定的

狀況遍及所有現象，「對初始條件的敏感依賴性」（sensitive dependence on initial conditions）成為現代科學的流行語。

混沌的想法擴張了非決定性的領域，就像半世紀之前的量子力學一樣。但混沌的貢獻並不止於此，深入理解混沌理論背後的動力機制，為科學的所有分支都帶來啟發，其成就範圍從心電圖解析到計算設備的製作都有。

混沌的發展並非得益於新發現的物理定律，而是對於牛頓物理學背後微分方程的更深層解析。混沌是一場基於數學的科學革命，是演繹而非歸納。混沌理論針對牛頓方程，運用數學的分析工具，確定這些方程所描述的現象裡，存在廣泛的不可確定性。透過數學，我們得以從牛頓自己的定律，推導出牛頓式決定論的失敗！

納稅人的錢

1960 年，我人在巴西里約熱內盧（Rio de Janeiro），在日後稱為混沌理論的數學領域裡做研究。當時我拿的是美國國科會（NSF）的博士後獎助。後來有人對於我拿美國納稅人的錢，卻在里約海灘做研究有所質疑。提出這種說法的不是



圖 2 美國反越戰示威，群眾和軍警對峙，攝於 1967 年。（維基）

別人，正是詹森總統的科學顧問賀尼格（Donald Hornig），他在 1968 年的《科學》（*Science*）期刊上寫道：

數學家這種漫不經心的風氣，讓他們很認真的提議，普通納稅人應該認同用政府基金資助在里約海灘做數學的看法……^❶

我在沙灘的研究和這項國家級譴責之間的八年，發生了什麼事？

1960 年代，我在加州大學柏克萊分校擔任教授，那些年柏克萊動蕩不安。我的學生被逮捕；催淚瓦斯的氣味不時瀰漫校園；動力學會議在宵禁中開幕；「大學炸彈客」（Unabomber）嫌犯卡津斯基（Theodore Kaczynski）是我的數學系同事。

1965 年，詹森總統升高投入越戰的態勢，於是我和魯賓（Jerry Rubin）被迫建立對抗性的反戰力量，我們的組織稱為「越南日委員會」（Vietnam Day Committee, VDC），當時所舉行的各場座談會、反運兵列車示威、大型反戰遊行，把我推到報紙頭版。眾議院反美活動委員會（House Unamerican Activities Committee, HUAC）後來因為這些活動傳訊我時，我正在前往莫斯科的路上，準備接受 1966 年的費爾茲獎頒獎。我在後來莫斯科的記者會上批評美國的越戰政策（以及俄國對匈牙利的干涉），造成華盛頓人士長期對我的不滿。

言歸正傳，讓我回到 1960 年的春天，說明我在

里約熱內盧的海灘上到底做了什麼研究。

直奔里約

1950 年代，拓樸學領域的新想法大爆發，吸引了許多年輕研究生的注意，我是其中之一。1956 年，我在密西根大學完成了這個領域的博士論文。當年夏天，我和妻子克拉拉（Clara）到墨西哥城（Mexico City）參加一個回顧這些數學偉大進展的會議，全世界的拓樸名人都與會提出報告。在會議裡我結識了巴西人利瑪（Elon Lima），他是芝加哥大學的博士生，而我正要去芝大擔任講師，因此倆人成了好友。

幾年之後，利瑪介紹我認識年輕的芝大訪問教授佩索多（Mauricio Peixoto），佩索多來自里約，雖然他的老家在巴西北方，他的父親曾擔任過那裡的州長。佩索多富幽默感，討人喜歡，除了偶而爆發的興奮之外，他其實舉止保守，在政治想法上也一樣。在當時，巴西鮮有數學家，因此佩索多在一所科技學院任教。他協助建立巴西的新數學研究機構——巴西純粹與應用數學研究院（Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA）。由於熱愛數學，佩索多在 1957 年負笈美國，後來成為巴西科學院的院長。

佩索多的研究主題是微分方程或動力學，他給我看了些很漂亮的結果。不久之後，我自己也證明了一些動力學的結果。

^❶ 譯註：這段文字出自賀尼格在卡內基梅隆大學的得獎講詞，摘錄自 1968 年 *SCIENCE* 期刊 161 期 248 頁的 A Point of View 中。文中除了里約海灘，也提到希臘愛琴海諸島。關於本事件更詳細後續發展，可見史梅爾另篇文章（見「延伸閱讀」）。



圖 3 近前景是巴比倫尼亞山，遠方是萊米城區與科帕可芭納海灘。(維基·Halleyo 攝)

1958 年夏天，克拉拉和我，以及我們剛出生的兒子奈特 (Nat) 搬到普林斯頓高等研究院 (IAS)，因為我獲得 NSF 的博士後獎助金，應該要在 IAS 待兩年。然而，基於我和利瑪、佩索多共同的研究興趣，他們邀請我到里約完成第二年的計畫。於是，克拉拉、我、奈特，以及剛出生的羅拉 (Laura)，在 1959 年 12 月離開普林斯頓，直奔里約而去。

由於孩子還小，我們大部分行李裝滿了替換的尿布。儘管如此，我們還是完成了長久以來的夢想，一覽拉丁美洲的風物。在造訪巴拿馬叢林之後，我們四個人 1959 年的聖誕節，離開厄瓜多首都基多 (Quito)，沿著知名的安地斯山鐵道到達瓜亞基爾 (Guayaquil) 的港口。我們很快就搭機到達里約，醫治在祕魯利馬 (Lima) 時感染的疾病。如今我記憶猶新，我們是晚上到達里約的，那一晚我出門好幾趟，想要為嚎哭的小孩找牛奶喝，卻只能找到鮮奶油或優格這類替代品。後來我們才知道，在里約，牛奶只有早上的街頭才販售。那個時候，巴西還不折不扣是「第三世界」的一部分。

不過，在朋友的協助下，我們很快適應了巴西的生活。我們抵達巴西時，有一位空軍上校試圖發動政變，後來逃離巴西到阿根廷尋求庇護。結果我們從他妻子手裡，在里約的萊米 (Leme) 區段租到他的豪華公寓，房間多達 11 間。那時候美元一直升值，我們光靠獎助金，竟然還能僱用上校家的兩

名女傭。

坐在公寓的上層花園陽台，我們可以看到名為巴比倫尼亞山 (Morro da Babilônia) 的滿山貧民窟 (favela)，那是電影《黑色奧菲斯》(Black Orpheus) 取景拍攝的地點^②。在狂歡節 (Carnaval) 前炎熱潮濕的夜裡，可以看到幾百名貧民窟居民下山到街道上跳森巴舞。有時我也會加入他們狂野的舞蹈行列，遊行綿延長達若干英里。

就在我們公寓前方，遠離山丘的方向，是知名的科帕可芭納 (Copacabana) 海灘。我在這片寬闊而優美的沙灘上，度過早晨的時光，游泳、衝浪，同時，帶著筆和紙，在沙灘上做數學。

沙灘上的數學

到達里約後不久，我很快就開始投入數學。邀我訪問的 IMPA 是巴西政府建立的學術機構，他們提供我舒適的研究室與研究環境。IMPA 是在兩年前才找到落腳處，那是一棟位於里約老街區博塔弗戈 (Botafogo) 的小殖民建築。院裡只有一些數學研究生，沒有大學生。專業數學學者也不多，主要是佩索多、利瑪，以及一位分析學家納席賓 (Leopoldo Nachbin)，另外還有一座很好的數學圖書館。沒有人預料到，不到 30 年後，IMPA 會成為動力系統的世界級研究中心，坐落於堂皇的建築，並成為巴西科學研究的焦點。^③

日常午後，我會搭公車到 IMPA，隨即和利瑪討



圖 4 巴比倫尼亞山的 favela 已遷移，這是離科帕可芭納海灘不遠的 favela。（維基，Leon petrosyan 攝）

論拓樸或是和佩索多研究動力學，不然就是在圖書館中到處瀏覽。數學研究通常所需不多，只需要一疊紙、一支筆、圖書館資源，以及可以詢問的同仁就夠了。我很滿意這一切。

特別愉快的是在海灘上度過的時光。我的工作主要是寫下粗略的想法，試著看看如何把一些論證兜在一起。我會畫些草圖，描繪在空間中流動的幾何物件，嘗試將這些圖像和形式推理連結在一起。當我深入這種思緒在紙上書寫時，並不會被海灘給分心打擾。但在研究之餘，能夠順便游個泳是件很舒服的事情。

衝浪是很刺激的挑戰，但有時也很可怕。有一回，利瑪來拜訪我的「海灘研究室」。我們跑去衝浪，結果陷入一道海流，把我們帶出海。當利瑪感到自己性命垂危時，遠方的泳客高喊，建議我們平行於海岸，游到某個能讓我們回來的地方。34 年後，就在狂歡節前，同樣這些海灘再一次差點害死我。這一回，一個超級大浪把我重重摔到沙上，傷了我的手腕，撕裂我的肩腱，然後同樣的大浪把我帶到外海，很幸運的，我光靠沒受傷的手臂就游回來了。

一封美國的來信

當時，身為拓樸學家，我頗為一篇剛發表的動力學論文感到自豪。在那篇論文裡，我很高興的寫下一項猜想，用現代術語來說，就是「混沌並不存

在。」

但這份愉悅很快被列文森（Norman Levinson）的一封信粉碎了。我知道他和別人合寫過一本重要的常微分方程（ordinary differential equation）研究生教科書，是必須嚴謹以對的科學家。列文森在信裡寫下他先前的一項研究結果，其中很清楚的包括我猜想的反例。他的論文則是釐清英國數學家卡特萊特（Mary Cartwright）和李托伍德（John Littlewood）在二戰期間所做的大量研究。

卡特萊特和李托伍德一直在解析某項方程，那是源自與戰爭相關，涉及無線電波的研究。他們發現這些方程的解有出人意料的異常行為。事實上卡特萊特和李托伍德發現了混沌的跡象，即使他們處理的是源自工程問題的自然方程，只是當時的世界還沒做好仔細聆聽的準備。我從沒見過李托伍德，但在 60 年代中期，卡特萊特夫人是當時劍橋大學吉爾頓（Girton）女子學院的院長，曾邀請我共進學院的高桌晚餐（high table）。^④

^② 譯註：*Black Orpheus* 是法國導演 Marcel Camus 拍攝的電影，曾獲得威尼斯影展金棕櫚獎等多項電影獎，一舉讓巴西音樂與 favela 景觀登上國際舞台，後來 favela 更成為巴西的文化象徵之一。

^③ 譯註：1967 年，IMPA 搬到里約城中心，1981 年再遷入位於 Jardim Botânico 的現址，文中的「堂皇建築」即位於此。

^④ 譯註：英國許多大學或學院的制度，高桌指提供給學院院士及其賓客使用的餐桌，位於學校餐廳的盡頭高台上。

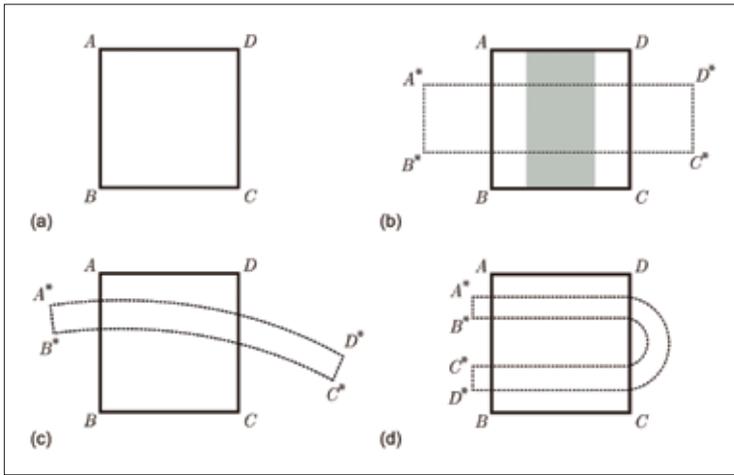


圖 5 正方形變形由簡到難的示意圖，小圖 (d) 就是史梅爾發現的「馬蹄鐵」。

轉換的方式如下：將正方形垂直方向均勻往中央壓縮，同時往水平方向均勻拉大，圖 5 (b) 是經此過程得到的長方

形 $A^*B^*C^*D^*$ ，將這個長方形疊在原來的正方形 $ABCD$ 上。圖中的灰色區域，則是在轉換過程裡不會跑出原來正方形範圍的部分。

理解馬蹄鐵第三步驟的第二步，是上述線性範例的擾動，把正方形變成小圖 (b) 中長方形的彎曲版。小圖 (c) 中正方形轉換後的圖形，只是 (b) 的小改動。

至於馬蹄鐵則是上述正方形變動的完全非線性版本，推廣了 (b) 和 (c) 所表示的過程，如圖 5 (d)。這個情況和前述線性模型在定性上截然不同。馬蹄鐵就是圖中虛線圍成的區域。

大自然狀態的演變根據的是數學公式，上述說明，取而代之的是幾何圖像的演變。幾何觀點的全面優點將會逐漸展現。處理動力學問題比較傳統的方法是使用代數表式，但是用公式描述這項過程十分複雜，運用那種描述形式，無法讓我獲得洞識或達成感受性的分析。我的拓樸學訓練背景，會嘗試彎曲像正方形的物件，協助我看出馬蹄鐵的機制。

馬蹄鐵描述的動力學，是將正方形的點根據圖 5 (d) 變動到馬蹄鐵上，例如頂點 A 在一時間單位後會移到 A^* 點。正方形上一般點 x 的變動，是一系列的點 x_0, x_1, x_2, \dots ，其中 x_0 就是現在狀態 x ， x_1 是一單位時間後的狀態， x_2 是兩單位時間後的狀態，以此類推。

現在，想像我們的視野侷限在正方形本身，跑出正方形的點就置之不理，圖 6 中的灰色區域，描述的是一單位時間後不會跑出正方形的點。那些永

我日夜工作，試著解決信內說法對我信念的挑戰。這必須先把列文森的分析論證轉譯成我自己的幾何思考方式。至少以我自己的情況，理解數學並非來自閱讀或聆聽，而是源自對所見所聽的反思。我必須在自己特定背景的脈絡中重做這些數學，這個背景包含許多成分，有些比較強，有的比較弱，有些是代數的，有些是視覺的。我的背景長於幾何式分析，但依循一系列的公式則會陷入麻煩。在理解一項論證時，我比大部分數學家來得遲緩。數學文獻有用，只因為它能提供各種線索，通常可以用來拼湊出合理的景象。但是除非我能用自己的說法重整數學的思路，不然我就沒有已然理解的感受。

最後，我說服自己列文森確實是對的，我的猜錯了，混沌已經隱含在卡特萊特和李托伍德的分析中。悖論解決，我猜錯了。但在認識到這一點時，我發現了馬蹄鐵 (horseshoe)！

馬蹄鐵是什麼？

馬蹄鐵是以幾何方式重審卡特萊特 / 李托伍德和列文森方程的自然結果，能協助理解混沌的機制，解釋在動力學中廣泛存在的不可預測性。

混沌是動力學的特性，也就是一組自然狀態隨時間演變的特徵。底下我將以離散單位來測量時間，並把單一自然狀態理想化為二維平面的一點。首先，我描述一個非混沌的線性範例。想法是在如圖 5 (a) 的正方形 $ABCD$ 上，運用下段的轉換，研究正方形上一點每隔一時間單位的變化行為。

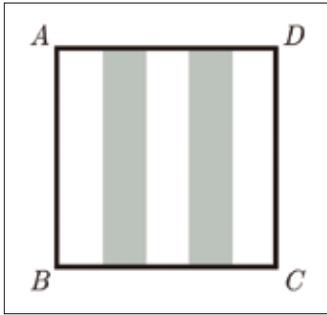


圖 6 正方形中的灰色區域是在馬蹄鐵映射後依舊不會離開正方形的部分。

遠不會跑出正方形的點列，我估且稱之為「運動軌跡」（visual motion）。後面將會繼續討論「運動軌跡」。

總之，馬蹄鐵過程是完全非線性的運動。下一節，我將顯示如何從這個圖示得到混沌。

馬蹄鐵與混沌：擲硬幣

在傳統上，機會的法則以丟硬幣的方式表達自有其理由。猜測丟硬幣的結果是正面還是反面，是純粹機率的典型範例。另一方面，實際硬幣拋擲的運動卻受制於決定論式的過程，因此擲硬幣結果是正是反，只取決於硬幣十分微細的最初狀態。這便是「對初始條件的敏感依賴性」。

擲硬幣試驗是一個連續拋擲硬幣的過程，每次拋擲的結果只有正面（H）或反面（T）兩種情況，因此可以用 H T T H H T T T T H... 的形式來表示⁵，於是擲硬幣試驗可以表示一個序列 s_0, s_1, s_2, \dots ，其中 s_0, s_1, s_2, \dots 中的每一項不是 H 就是 T。

底下是我在科帕可芭納海灘研究發現的馬蹄鐵分析結果。考慮所有在馬蹄鐵映射之下一直留在正方形上的點，也就是不會離開正方形視野中的點。結論是這些「運動軌跡」恰恰對應到擲硬幣試驗所有可能的集合。這項發現演證了非線性運動中不可預測性的出現，並給出如何從決定論過程產生不確定性的機制。

這項對應如下：每一運動軌跡正好對應一種擲硬幣試驗。如果 x_0, x_1, x_2, \dots 表示時間 $i = 0, 1, 2, \dots$ 的運動軌跡，當 x_i 落在正方形上方，就對應到 H；當 x_i 落在正方形下方，則對應到 T。

然而，更關鍵的觀察是，每一可能的擲硬幣序列

會被一種馬蹄鐵運動所呈現。因此這個動力學過程就和擲硬幣一樣是不可預測的。在底下這個一對一對應裡

$$x_0 x_1 x_2, \dots \rightarrow s_0 s_1 s_2, \dots$$

其中 $x_0 x_1 x_2, \dots$ 是留在正方形中的運動軌跡，而 $s_0 s_1 s_2, \dots$ 則是 H 與 T 形成的序列。左邊是由決定論式的過程產生，右邊則是擲硬幣試驗。

從馬蹄鐵這個決定論式的運動過程裡，我們見到兀然出現的完全不可預測性。這就是混沌。

混沌的祕密起源

既然混沌是一個基於數學的革命，第一位在動力學中發現混沌證據的是數學家，就不令人意外。

法國數學家龐卡赫（Henri Poincaré）活躍於 19 世紀末，是當時兩位頂尖世界級數學家之一（另一位是希爾伯特，David Hilbert）。我第一次知道龐卡赫是他發明了拓樸學。龐卡赫寫了一篇論文，聲稱如果一個流形和 n 維球面有相同的代數不變量（invariant），在拓樸上就和 n 維球面等同。隨後他在證明裡發現錯誤。於是，他將維度限制在三維，並將原來的斷言改成一個問題，後來被稱為龐卡赫猜想，到目前為止，仍是三或四個數學重要未解問題的其中之一。⁶

不過，和我現在的故事比較相關的是他在動力學研究的貢獻。

龐卡赫在天體力學——行星的運動——做了相當

⁵ 要完整掌握本節討論的神髓，我們有時也得逆轉時間，同時考慮 HT 序列在時間倒過來走的情況。

⁶ 譯註：三維龐卡赫猜想在 21 世紀初已經被證明。

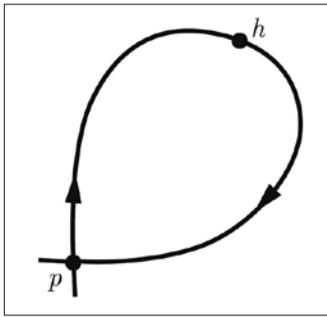


圖7 同宿點的簡單的圖解。
 h 點的向前軌道和向後軌道
 都趨近於平衡點 p ，則稱為
 同宿點。

廣泛的探究。想要證明這些基本方程的可解性，是當時的知名問題（見本期〈從天體力學到混沌理論的形成〉）。事實上，龐卡赫一度以為自己解決了這個問題。但是不久之後，他就被一個發現所困惑，這項發現不只指出他的錯誤，甚至顯示出即使是三體問題的方程也是不可解的。他將這個發現命名為同宿點（homoclinic point）。

一個同宿點，隨著時間遞增，運動將趨近一平衡點，而當時間回溯至過去時，也趨近於同一平衡點。在圖7中， p 是平衡點， h 是同宿點，而箭頭則表示時間的方向。

這個定義看起來平淡無奇，但卻包含驚人的結果。龐卡赫這樣書寫他的發現：

一個人會訝於這個圖形的複雜，我甚至連試著去描繪都不想。沒有東西能更貼切的闡明三體問題的複雜性，以及更一般的所有動力學問題……。

同宿點除了顯示行星運動方程的不可解，後來更成為混沌的註冊商標，因為在所有混沌動力系統中，基本上都有同宿點的蹤跡。

20 世紀上半葉，美國數學開始發展自己的道路。由龐卡赫的拓撲學和動力學所開展出來的傳統，是這項發展的核心。柏克霍夫（George D. Birkhoff，圖8）是二次世界大戰前最知名的美國數學家。他是密西根人，在芝加哥大學讀研究所，後來在哈佛大學任教。柏克霍夫受到龐卡赫動力學研究的影響很大，他在1920到30年代的論文中，發展了龐卡赫的想法，尤其是同宿點的性質。

很不幸的，科學社群很快就遺忘了環繞龐卡赫同宿點的重要概念。在1950年代末，我所參加的微



圖8 柏克霍夫。（維基）

分方程與動力學會議中，沒有人察覺這項

研究。即使在列文森的書、論文，或是與我的通信中，也從未顯示他知道同宿點的概念。不過才幾十年前，數學家領袖還曾大力宣揚的重要科學思想究竟如何消失了，這點實在很令人震驚。

我是在 IMPA 圖書館找到柏克霍夫的研究全集並深入閱讀後，才認識同宿點與龐卡赫的研究。而正因為我才剛剛發現馬蹄鐵的想法，同宿點現象才會進入我的意識。事實上，在馬蹄鐵和同宿點之間有重要的關係。如果一個動力學過程具有同宿點，我證明了它一定也包含馬蹄鐵。這可由圖9看出來。

因此在同宿現象的底層是擲硬幣的機制，這有助於我們去理解它。

第三勢力

我很幸運，自己處在里約這個三方動力學不同歷史傳統交匯的地點。這三股力量儘管處理相同的主題，卻彼此分離，這樣的孤立阻礙了它們的發展。我已經討論過其中兩方勢力——卡特萊特 / 李托伍德 / 列文森，以及龐卡赫 / 柏克霍夫。

第三勢力發源於俄羅斯，主要是1930年代由安德羅諾夫（Aleksandr Andronov）在高爾基（Gorki）奠立的微分方程學派。安德羅諾夫在我第一次去蘇聯之前就過世了。但1961年在基輔（Kiev），我倒是見到他的妻子萊溫托維奇 - 安德羅諾娃（Evgeniya Leontovich-Andronova），她仍在高爾基研究微分方程。

1937年，安德羅諾夫與蘇聯數學家龐特里金（Lev Pontryagin）合作。龐特里金在14歲時眼

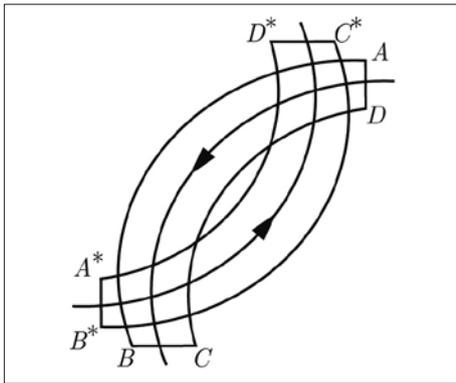


圖 9 有同宿點，就存在馬蹄鐵，因此就有混沌現象。



圖 10 左起安德羅諾夫、龐特里金、列夫謝茲。(維基)

睛就瞎了，但仍然成為拓樸學的先驅者。他們兩人描述了微分方程的一種幾何面向，起初稱之為「粗略」(rough)，後來則稱為結構穩定性(structural stability)。對照前述兩個傳統，混沌並未出現在他們的理論發展裡，這主要是受限於所考慮的動力學類型。

15 年後，偉大的美國拓樸學家列夫謝茲(Solomon Lefschetz)很熱衷於安德羅諾夫與龐特里金的研究。在轉入數學研究之前，列夫謝茲也曾發生意外失去手臂，這可能讓他和眼盲的龐特里金產生一種連結。1938 年，他們結識於莫斯科的一次拓樸會議，戰後又再次見面。正是透過列夫謝茲的影響，尤其是從他的學生迪巴基斯(Henry de Baggis)的論文^⑥，佩索多才在巴西學到結構穩定性的概念。

1957 年，佩索多到普林斯頓跟列夫謝茲學習，就是這樣才導致我們透過利瑪而認識。該次會議之後，我開始研讀列夫謝茲的著作，學習微分方程的幾何進路，最後並來到普林斯頓認識了列夫謝茲。

感謝龐特里金和列夫謝茲，讓常微分方程的結構穩定性概念包藏著拓樸學的面向。我相信這正是為何我會聽進佩索多說法的原因。

好預兆

馬蹄鐵有時被認為是種好兆頭。我在里約海灘上發現的馬蹄鐵似乎就有這種特質。

在 1960 年的那個春天，我基本上是個拓樸學者，主要關心的是這個領域的問題，其中最重要的研究

動機正是龐卡赫提出的偉大未解問題。打從開始投入數學研究，我就提出一些三維龐卡赫猜想的錯誤證明，並且一次次的回歸這個問題。

現在，就在這些海灘上，在尋找馬蹄鐵的這兩個月裡，我很驚訝的發現一個想法：只要將維度限制在五維或五維以上，似乎就能成功讓我回到龐卡赫原先的斷言。事實上，這個想法不只解決了高於四維的龐卡赫猜想，同時也得到許多拓樸學的美好結論。因為這項研究，我得到 1966 年的費爾茲獎。

因此，賀尼格所謂「里約海灘的數學發明」，就是馬蹄鐵以及高維龐卡赫猜想。^⑦

本文出處

“Finding a Horseshoe on Beaches of Rio” *Mathematical Intelligencer* 20 (1988) No. 1, p. 39-44 是當時預定發表在 *Proceedings of the International Congress of Science and Technology--45 years of the National Research Council of Brazil* 文章的擴大版本。

譯者簡介

周樹靜是臺灣數普譯者。

延伸閱讀

► Smale, Stephen “The story of the higher-dimensional Poincaré conjecture : (what actually happened on the beaches of Rio de Janeiro)” *Mathematical Intelligencer* 12 (1990) No.2. 這篇文章中有更多 Smale 事件前因後果的描述。

► “Chaos VI: Chaos and the Horseshoe; Smale in Copacabana” 這是 www.chaos-math.org 混沌介紹的第六章，不但有簡介，還有一部製作精美的混沌與馬蹄鐵的影片。對混沌有興趣的讀者絕對不能錯過這個網站的十部混沌影片。

<http://www.chaos-math.org/en/chaos-vi-chaos-and-horseshoe>

^⑦ 作者自己的英譯。

^⑥ 譯註：根據 *Mathematical Genealogy* 網站，迪巴基斯並不是列夫謝茲的學生，只是相關的研究者。