

數學家如何提出可行的猜想

用結果、隨機性、類比協助推理

訪談者：梅哲（Barry Mazur） 譯者：趙學信

梅哲為美國數學家，1959年畢業於普林斯頓大學，現為哈佛大學教授。梅哲早期研究幾何拓撲，證明廣義句弗萊猜想（Schoenflies conjecture），後受格羅騰迪克影響，轉往代數數論領域，成為該領域的領導人之一。他在2013年獲頒美國國家科學獎章。

►做數學要形成猜想，經常需要先採取可行性思考與啟發性方法釐清問題的樣貌，才能著手證明。

►可行性推論三種模式：從結果推理、從隨機性推理、從類比推理。

►作者以歐拉尚未證明的猜想與其他的例子，說明其中所牽涉到的可行性思考。

我們數學家有許多便捷的方式來發現何者可能為真，而且我們有各種程度的證據模式來幫助形成這樣的期望，像是類比到已知確知為真的事物、計算、以特例來論證等。這些方法有的具有明確表述，有的沒有，可謂五花八門。有時它們只是隱約暗示我們某一數學命題可能為真（plausible）^①，有時即使還不能證明，它們仍帶給我們相當確定的信念。但是它們也可能引導我們誤入歧途。無論如何，最後的終局當然仍是：理解、驗證、釐清，還有最確切的——證明；簡言之，真理。

可行性和啟發法

不過，還是先來考慮開局。既然我在文章標題裡用到 plausible 這個字，各位不難猜到，我是波利亞（George Pólya）名著《數學與可行性推理》（*Mathematics and Plausible Reasoning*）[MPR]的書迷。我想這本書之所以重要，雖有種種原因，但最主要在於，波利亞所針對的是任何思考數學或試圖創造新數學知識的人，必定會耗費大半時間和心力所從事的活動。往往已知的很有限，卻有許多未知，屢屢被錯誤和迷思所苦，只能努力和類比、推論與隱約顯現的期望纏鬥；運用概略估計，運用暗示了完整形貌的片段模式，運用假說中正確（或看似正確）的部分結果，因為它們使得假說的真確

性提高，或至少值得我們往下猜想，繼續鑽研。我們使用各式各樣的經驗法則與半具系統性的啟發法（heuristics）^②，而一旦成功了，我們就可以見著真理。

依此模式，我們對腦海中任一浮現的概念或表述，不斷檢驗其可行性。這是一個三階段的活動：

1. 透過一個或多或少可激發信心的啟發法網絡，發展出可能性、假說或期望，並且同時
2. 檢驗它們的可行性，並且同時
3. 把它們「賣空」——在此我借用一個名聲很壞的金融辭彙做比喻，意思是想辦法證明它不成立。

我們努力去理解數學、乃至任何事物的新概念時，以上三者構成了我們腦海中內在對位樂曲的三聲部——至少對我而言是如此，但是我想對許多人亦然。

在實際著手證明之前，我們如何能對一個猜想有信心呢？有別於波利亞著作的主旨，我們在此避免指導式或禁制式的規則，也就是說，先不採取教導的姿態，指示該做哪些，不可以做哪些。我的目標是以內省式的描述，呈現當我們試圖判斷數學猜想能否成立時，自然而然會出現的思考方式（至少對

我是自然而然的）。不同數學家必然會有不同的描述，這些差異是值得談論的。不僅如此，數學可行性的心理學導向的研究，類似像特沃斯基（Amos Tversky）



波利亞。（Mazur's Note）



歐拉。Jakob Handmann 繪於 1753 年。(維基)

和康納曼 (Daniel Kahneman) 的那種研究，或許也能協助揭露一些有趣的現象。

以下是提供我們可行性推論的三種推理模式：

- 🍎 從結果推理 (reasoning from consequence)
- 🍎 從隨機性推理 (reasoning from randomness)
- 🍎 從類比推理 (reasoning from analogy)

其中第一個大致算是非啟發式的方法，另兩個則是啟發式的。其間的差別在於啟發式方法可幫助我們發現 (有趣以及或許能成立的) 新命題，並且給出讓我們相信它為真的理由。相對而言，當我們已經知道某一命題後，非啟發式方法對於提供它是否成立的支持證據會很有用，但對於要如何發現這類的命題，則用處不大。這三者的區隔有時變得模糊，因為它們可以合作得非常好。為了瞭解它們之間的互動，我們將檢視歐拉 (Leonhard Euler) 提出某個有趣猜想的可能動機。

從結果推理

「從結果推理」的精神可以用這句話來表達：

若命題 A 蘊涵的事物為真，則我們對 A 的信心提高。^③

視表述的方式和脈絡，「從結果推理」有時被稱為歸納 (induction)，或實驗驗證 (experimental confirmation)，又或稱為「推論謬誤」(inferential fallacy)。

波利亞曾討論歐拉的一個猜想^④，以下我們將集中來談這個例子：

對任何正整數 n ，整數 $3 + 8n$ 必定是某平方數與某質數兩倍之和^⑤

$$(A) \quad 3 + 8n = a^2 + 2p$$

直到今日，這仍是一個猜想，既未被證明，也未被否認。一開始你怎麼發現這一

個可能為真的命題？既然得到這個命題，你怎麼去找出它為真的證據？如果不去真的證明它，你如何提高或降低它可能為真的程度？

面對這樣的問題，我們可能會做、也應該去做的第一件事是數值檢驗：

$$\begin{aligned}
 11 &= 1^2 + 2 \cdot 5 \\
 19 &= 3^2 + 2 \cdot 5 \\
 27 &= 1^2 + 2 \cdot 13 \\
 35 &= 1^2 + 2 \cdot 17 = 3^2 + 2 \cdot 13 \\
 &= 5^2 + 2 \cdot 5 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

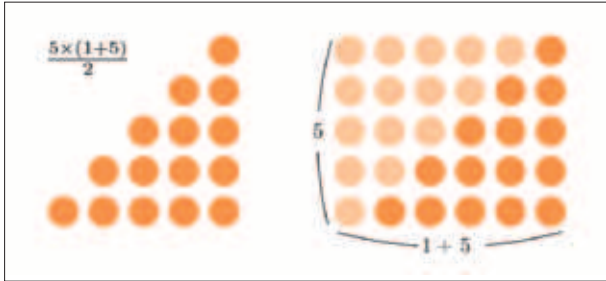
① 譯註：plausibility/plausible 主要譯成「可行性」。但在文中它有時指「可以成立的、可以為真的」，有時指「可以證得出來」。因此依上下文也譯成「可成立」、「可能為真」等。

② 譯註：heuristics 混用「啟發式」、「啟發法」來譯。啟發法是一種思考法或教學法，在完美陳述理論或證明前，先運用簡單而關鍵的構思、步驟、發想、比喻，來讓自己或他人理解此理論之所以合理或可行的緣由。

③ 譯註：imply 在數學與邏輯脈絡下譯為「蘊涵」，雖然「蘊含」也是通譯。

④ 這在波利亞的書中被當作「驗證結果」的例子來討論，見 [MNR] Vol. II, P. 3。細節可參見本文後記。

⑤ 因為歐拉把 1 視為質數，所以他的猜想可以包括 $n = 0$ 。但是我從歐拉的猜想中排除 1 是質數的想法，所以敘述稍微強了點。同時請注意，因為任何奇數的平方模 8 後與 1 同餘 (編按：亦即任何奇數的平方被 8 除餘數為 1)，如果「某平方數與一質數的兩倍之和」可寫成 $3 + 8n$ ，則該質數模 4 後必定與 1 同餘，所以歐拉的猜想與模 4 後與 3 同餘的質數無關，也與質數 2 無關。本文後面將用到本敘述中質數必「模 4 與 1 同餘」的事實。



可寫成 $n(n+1)/2$ 的數因為可擺成等腰直角三角形的形狀，自古被稱為三角形數。

據波利亞的解釋，歐拉之所以對這個猜想感興趣，是因為如果它成立，歐拉就能證明：

任何數都是三個三角形數 (trigonal numbers) 的和：

$$(B) n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}$$

他相信這個命題為真，而且先前曾經研究過。追尋歐拉有趣的思路（我們隨後會看到為何有趣）是很吸引人的：是什麼讓他覺得，他特別感興趣的 (A)，可以因為蘊涵 (B) 而變得更可能成立？（見本文後記）

後面的 (B) 式是費馬 (Pierre de Fermat) 多邊形數「定理」 (polygonal number “theorem”) 的特例，即使歐拉相信 (B) 是對的，當時也還不存在 (已發表的) 證明。

(B) 式得要到了 1796 年，才由高斯在《算術研究》 (*Disquisitiones Arithmeticae*) 中提出證明。(他在日記中記下此項發現的語句，日後還屢屢被引述：「我發現了 (Eureka) ! num = $\triangle + \triangle + \triangle$ 」)



高斯。G. Biermann 繪於 1887 年。(維基)

邏輯思考和從結果推理的差別

藉由描述歐拉的思路發展，波利亞指出了 (A) 和 (B) 之間微妙的曲折關係。歐拉論證 (A) \implies (B)，而且相信 (B) 為真 (但他還沒有證明 (B))。由此，(A) 變得更為可信；這像是某種命題可行性的傳遞：

$$(A) \implies (B)$$

(B) 可能成立

(A) 成立的可能性提高

我們可以把這個示意圖看成是如下所示，古典邏輯肯定前件 (modus ponens) 推理律的「可行性」兄弟：

$$(A) \implies (B)$$

(A) 為真

(B) 為真

對於某個一般性的命題，每當我們相信它的某個特例可能成立，就會對這個一般命題的信心提高一些些。如果這個特例已知確實成立，那當然就更好了。這表示我們在思考時，採用了這個逆反的肯定前件 (inverted modus ponens) 推理。

就像肯定前件推理是邏輯計算的關鍵，我們也可以把上面第一個示意圖看成是可行性計算的核心之一。這兩種「計算」之間的巨大差



韓培爾。(維基)

異非常明顯，實在不需費言闡明：在可行性的計算中，預先的評估極為重要。假設 $(A) \implies (B)$ 與 (B) 都成立，能為 (A) 增加多少可信度，端視我們評斷 (A) 、 (B) 兩者的關聯有多密切。這常會被我們發現 (B) 為真時的驚訝程度所影響（如果真的很驚訝的話）。

相較之下，邏輯計算則不涉及任何評斷。你看到什麼，就得到什麼： $(A) \implies (B)$ 加上 (A) 成立，就一定得到 (B) 。

考慮這兩種思考模式之間的差別，那就難怪同樣是改變表述方式這件事，在邏輯計算中你或許得到等價的命題，但在可行性計算中則可能得到迥異的命題。這類改變表述的著名例子是轉換成逆反命題 (contrapositive) ⁶，就像哲學家韓培爾 (Carl Hempel) 提出的哲學難題。這個問題通常稱為韓培爾悖論或烏鴉悖論：觀察兩個命題——「所有烏鴉都是黑色的」以及「任何不是黑色的東西都不是烏鴉」——它們「在邏輯上」是等價的，但是搜集經驗證據的自然方式（亦即，從結果推理）卻不相同。就第一個命題而言，檢查的方式是一隻烏鴉、一隻烏鴉去檢查看看是否都是黑的，至於第二個命

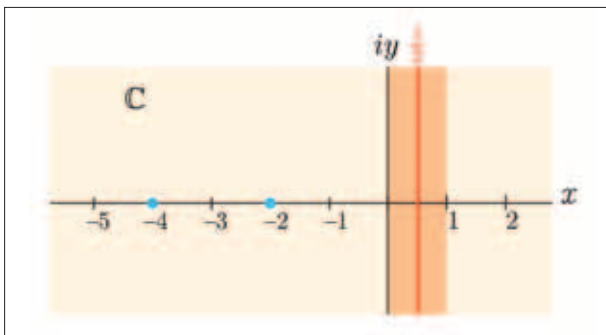
題，則是去檢查不是黑色的物體，看看它們是不是烏鴉。

前一個對命題累積信心的策略可能有點不切實際，但至少還算神智清楚，至於第二個則完全荒謬。就我所理解，這個「悖論」的精髓在於，即使兩個命題從邏輯計算的觀點來看完全等價，當要「從結果推理」時，卻可能需要完全不同的自然策略。

以黎曼假說為例

為了對我們現在的討論有所啟發，讓我舉一個把韓培爾困境類比到數學上的實例：試比較用下面兩種方式來建立對黎曼假說的信心。如果使用傳統表述，黎曼假說斷言（當然還只是猜想），黎曼 ζ 函數 $\zeta(s)$ 的所有零點，若不是落在實數線上（此時它們發生在 s 是負偶數值，這些值被稱為 $\zeta(s)$ 的無聊零點，因為 ζ 函數在實數線上為零的問題是已知的），否則就是落在複平面上的直線 $\text{Re}(s) = 1/2$ 上。採用這種表述，那麼韓培爾困境將會發生在，以自然的「從結果推理」模式來蒐集假說的證據，或是蒐集它的逆反命題的證據。兩種模式所做的分別是：

- ① 找出黎曼 ζ 函數的不無聊零點，檢查它是否真的落在 $\text{Re}(s) = 1/2$ 上。
- ② 找出複平面上的點 s_0 ， s_0 必須滿足既不是無聊零點，而且不在直線 $\text{Re}(s) = 1/2$ 上，然後檢查是否 $\zeta(s_0) \neq 0$ 。



在複數平面上，負偶數（藍點）為 $\zeta(s)$ 的無聊零點。黎曼假說認為非無聊零點都集中在 $\text{Re}(s) = 1/2$ （紅線）。而朱色區域為臨界帶。

⁶ 譯註：若 $P \Rightarrow Q$ 是原命題，則 $Q \Rightarrow P$ 稱為逆命題 (converse)， $\sim P \Rightarrow \sim Q$ 稱為反命題 (inversion)， $\sim Q \Rightarrow \sim P$ 稱為逆反命題 (contrapositive)，其中 $\sim P$ 是 P 的否定。

即使這個例子可能嫌瑣碎，但仍有些要點值得討論。先看上述的第二個策略，如果選擇位於臨界帶（critical strip） $\sigma = 1/2$ 之外的 s_0 ，我們絕對無法學到任何新東西，因為已知所有不無聊的零點都位在臨界帶內。即使只考慮臨界帶之內，我們也已知零點的集合是離散的，所以隨機任選一點，它碰巧是零點的機率是——嗯，零。相對而言，第一個策略——驗證某點是否在一給定的線上——的棘手處則在於，它是非常吃力的檢驗。

簡言之，這個微妙的「預先評估」網絡主宰了這些策略的可行性計算。黎曼假說的例子闡明了「從結果推理」為何會那麼錯綜複雜；因為同一個假說有許多等價的表述，每個表述就提供了一種自然的蒐集經驗證據（從結果推理）的方式。

舉例來說，一個標準的黎曼假說等價表述（它也是這個猜想引人注目的主要原因之一），是黎曼假說蘊涵了函數 $\pi(X)$ 的良好逼近， $\pi(X)$ 指的是不大於 X 的質數個數。更明確的說，如果定義 $Li(X) := \int_2^X \frac{dt}{\log t}$ ，那麼黎曼假說等價於底下這個估計：

$$|Li(X) - \pi(X)| < X^{\frac{1}{2} + \epsilon}$$

其中 ϵ 是任何正數，而 X 是足夠大的數（至於多大才算「足夠大」，得視 ϵ 而定）。若考慮此一表述，那麼「從結果推理」的直接方式會是對各個 n ，計算 $\pi(10^n)$ 和 $Li(10^n)$ ，然後加以比較。

從結果推理：由上往下

「從結果推理」有兩種形式，一種可稱為由上往下（top-down），另一種則是由下往上（bottom-up）。由上往下是你已經很明確有一個表述清楚的

(P)，然後你想要藉由找到一些 (Q) 來評估 (P) 成立的可能性，這裡的 (Q) 是可證明，且是 (P) 的邏輯結論，因此可以增加你對 (P) 成立的信心。例如在討論歐拉猜想時，我們建議先做數值檢驗，像是 $11 = 1^2 + 2 \cdot 5$ 等操作以建立信心。這就是從結果推理的「由上往下」版的範例。

一種似乎適合由上往下架構的開局法是：你的目標是 (P)，且你證明了 (P) 的一個特例 (Q)。但在某些時候，這個 (Q) 並不會讓 (P) 更有可能成立，它的作用反倒是中性或負面的。因為視實際的題目而定，有時我們反而得問下面這個令人不安的問題：證明 (Q) 這件事究竟在更大的 (P) 的脈絡下扮演什麼角色？它所暗示的會不會是 (P) 有什麼不對勁，而不是為 (P) 提供支持證據？

關於這一點，歐拉的另一個猜想給出了完美的例子。歐拉在 1766 年猜測，所有嵌入 (imbedded) 的多面體都是 (無窮小) 剛性的 (rigid)。歐拉的研究顯示所有嵌入的凸多面體都是剛性的，這或許可被視為是支持此一猜想的證據。是嗎？或許恰巧相反。也就是說，究竟凸性條件是個非必要的條件，只是讓歐拉比較容易證明而已？或者反過來，證明時需要這項條件，是否正強烈暗示，如果沒有它就會出問題？212 年後，才有人構造出一般猜想的 (相當優美，且有點令人吃驚的) 反例 (參見 [C2]、[C1]) ——顯示真正的情形是後者。

從結果推理：由下往上

由下往上形式則是你心裡並沒有任何一般條件的 (P)，但卻有一個很有潛力的 (Q)，你知道它為真，或者更常見的是，你有一些有潛力的 (Q)，

而你想找出一個更大架構的 (P)，可以蘊涵這一個或這一組 (Q)。前面所述波利亞關於歐拉猜想的討論即屬於此類。因為波利亞告訴我們，歐拉「想要」證明 (Q) ——任何數都是三個三角形數的和，而在探究時，他造出了 (P) ——關於質數的兩倍的猜想，因為它可以蘊涵 (Q)。那麼，歐拉是不是認為他的 (P) 比他的 (Q) 更有可能證明？

這種「由下往上式的從結果推理」路徑也是發展證明的標準策略：我們常常知道想要證的是什麼，然後「倒著做」，也就是逐次構想出愈來愈可能成立、愈來愈容易處理，而且蘊涵原命題的表述。

有人可能認為從結果推理符合通常所謂的科學歸納法的精神，或至少是在數學實踐中可行的科學歸納法。但兩者其實差異頗大，最大的差別在於科學歸納法充滿了（或者明示、或者暗示的）因果關係，亦即休謨所謂的「思考習性」。然而在數學世界的藍圖裡，和經驗科學的「因果」最接近的，當數「邏輯蘊涵」。但是「因果」和「邏輯蘊涵」兩種概念，各自都有著對方完全沒有的要素，而且各自和時間也有著獨特的關係。

再回到波利亞的例子：歐拉猜想任何可寫成 $3 + 8n$ 的數是一個平方數和 2 倍質數的和。即使歐拉是從我們所謂的「從結果推理」而覺得這個猜想成立，還有另一條路也可以得到同樣的猜想。人們也可能透過一種啟發式的方法，而得到它，或是質性與其相似的東西。

這方法說的是：一旦考慮完所有已知的限制條件後，資料便是隨機的。

從隨機性推理

正如前述，這種推理模式的精神可用這句話來表達：

當我們已經窮究所研究的現象裡所有相關的系統性限制條件後……剩下來的全都是隨機的。^⑧

這是個有點狂妄，但很常見、而且也很自然的思考方式。它也往往是能夠推導出假說的有力方法——這些假說即使並不必然正確，但至少常可代表「目前最好的猜測」。有別於「從結果推理」，這方法是真正啟發式的：一旦適用，它確實會呈現給我們相當準確的表述。

下面這個簡單的例子，可以說明這種狂妄方法的威力及其基本限制。如果 a 是大於 1 的正整數，所謂 a 次方數 (perfect a -th power) 指的是可以寫成 u^a 的數，其中 $u \geq 1$ 是自然數。

令 a, b, c 是正整數。考慮丟番圖方程

$$A + B = C$$

其中 A 是任何 a 次方數， B 是任何 b 次方數， C 是任何 c 次方數。（舉例來說，若 $a = b = c = 2$ ，則我們考慮的是畢氏三元數。）令 X 是一個大的正整數， $N(X)$ 是在 $C \leq X$ 時上述丟番圖方程解的個數。

^⑦ 在複平面上的 (開) 臨界帶指的是 $\{z = x + iy \mid 0 < x < 1\}$ 的範圍，含蓄的說，黎曼 ζ 函數在這裡的行為有點麻煩。

^⑧ 我們構造測度空間 (measure space) 含納我們感興趣的可能結果，遵守所有我們已知該遵守的條件，然後我們賦予這個空間某種「公平」的機率測度。這可稱之為「不充分理由原理」 (principle of insufficient reason) 的應用。

我們對於上界 X 的函數 $N(X)$ 的行為，有什麼可說的？

以下的概略論證，或許可以導引你得到關於這個問題的某些猜想。幾乎所有數學家在他們各自的領域裡，必定會以他們特有的語彙從事類似的推想過程。（為求簡潔，我將忽略獨立於 X 、在做誤差估計時會以倍數或常數的形式出現的正常數。）可能的思考步驟如下：

1. 依循上述隨機性方法的提示，對丟番圖方程

$$A + B = C$$

的等號兩邊—— $A + B$ 和 C ，除了已知的知識之外，把其餘一切都想成是「隨機的」，所以我們得先把確實已知的整理清楚：

2. 方程解的集合是否有任何系統性結構？我立即能想到的只有：如果 d 是 a 、 b 、 c 的最小公倍數，且 (A, B, C) 是本問題的解（亦即構成數字 $N(X)$ 的一分子），那麼對每一整數 $k = 1, 2, 3, \dots, (X/C)^{\frac{1}{d}}$ ，下式同樣也是本問題的解：

$$(k^d \cdot A, k^d \cdot B, k^d \cdot C)$$

3. 假設把系統性結構拋棄：處理系統性結構的方法有很多，其中之一就是把它丟掉！所以讓我們改問底下的問題：
定義函數 $N_0(X)$ 是我們問題解中互質三元數解 (A, B, C) 的個數。問 $N_0(X)$ 有什麼行為？當然這會影響到原先解 (A, B, C) 所構成的集合，但我們後面會看到影響並不大。
4. 寫出機率事件的表述：在 A 、 B 互質， A 、 B 分別為 a 次方數和 b 次方數且都 $< X$ 的條件下，

我們隨機選擇 A 、 B 。在 C 為 c 次方數且 $< X$ 的條件下，我們隨機選擇 C 。

每當 $A + B - C = 0$ ，我們就算「猜對」一次，亦即得到一個 $A + B = C$ 的解。如果假設（這是個很大膽的假設）當我們試完所有容許的 (A, B, C) 後， $A + B - C$ 是一個大小約為 X 的容許範圍內隨機出現的數，那麼 $A + B - C$ 為零的機率大約是 X^{-1} 。

總之，如果事情真的如我們樂觀期待的那麼隨機的話，忽略常數不計，則從單一事件中「猜對」的期望值大約是 $1/X$ 。

5. 點數可以玩幾次上述的遊戲：

在 $\leq X$ 的範圍內，所有可以為解的 A 值的個數大約是 $X^{\frac{1}{a}}$ 。同理，對 B 和 C 我們分別有 $X^{\frac{1}{b}}$ 和 $X^{\frac{1}{c}}$ 個。再來我們必須考慮 A 、 B 、 C 三數互質（亦即其中任兩數互質）的條件。因為只是粗估，我們可以忽略這一點。其說明如下：

A 可能的選擇是下列整數的 a 次方：

$$u = 1, 2, 3, \dots, X^{\frac{1}{a}}$$

而 B 的選擇則是下列整數的 b 次方：

$$v = 1, 2, 3, \dots, X^{\frac{1}{b}}$$

而且 A 和 B 要互質。因此對每一質數 p ，我們得剔除 $(u, v) = (pu_0, pv_0)$ 這類數對，其數目大約是

$$p^{-2} X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

略微高估之下，總共剔除的對數最多是

$$\left(\sum_p p^{-2} \right) \cdot X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

其中 p 是質數。但已知級數 $\sum_p p^{-2}$ 收斂（其值約為 0.452247...），將它吸收到我們的常數

內，就可以忽略了。

於是全部個數大致是

$$X^{\frac{1}{a}} \cdot X^{\frac{1}{b}} \cdot X^{\frac{1}{c}} = X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

所以，期望的成功數等於 $\frac{1}{X}$ 乘以 $X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ ，亦即 $X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1}$ 。

從隨機性得到的猜想

既然我們一路討論下來都估得很樂觀，我們不妨再放鬆一些，於是可以做下列猜想：

猜想 1

當 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ 時，對於任何 $\epsilon > 0$ 且 $x \gg 0$ ，可以得到

$$X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 - \epsilon} < N_o(X) < X^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 + \epsilon}$$

其中 \gg 表示足夠大的數，其常數視 ϵ 的大小而定。當 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ ，上述的估計會得到，當 X 趨近無窮大，答案個數會遞減。這完全不合理，但我們把它理解成底下猜想的暗示：

猜想 2

當指數 a, b, c 滿足不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ ，則丟番圖問題 $U^a + V^b = W^c$ 只有有限多組解，其中 (U, V, W) 是互質正整數。

我們可以看到，相較於上述猜想，「費馬最後定理」對 $a = b = c > 3$ 的情形給出了準確許多的訊息。這正說明這種機率啟發式的結構性缺陷：它本質上是機率的，而光靠機率是無法得到像費馬最後定理那樣準確的猜想，即使它或許可為費馬最後定理提供一些定性方面的確證。⑩

以更為一般的形式所做的類似探討，促使馬瑟

(David Masser) 和奧斯達利 (Joseph Oesterlé) 提出了奇妙、而且更全面的 ABC 猜想，請見 [ABC]。⑪

事實上，如果你以下列方式放寬 a 次方數的定義，同樣使用上述的啟發式討論可以導出與上述猜想同類型的猜想，而且風格會和 ABC 猜想更相似。亦即，對於正實數 α ，定義一大於 1 的整數 A 的幂數 (power) $\geq \alpha$ 的意思是

$$\alpha \leq \frac{\log A}{\sum_{p|A} \log p}$$

其中 p 是整除 A 的正質數。注意如果 A 是 a 次方數，那它的幂數自動滿足 $\geq \alpha$ 。令 $N_1(X)$ 是下列方程式解的個數，

$$A + B = C$$

其中 A, B, C 是正整數，且分別具有幂數 $\geq a$ 、 $\geq b$ 和 $\geq c$ 。類似上述的啟發式推理可以得出以下猜想：

猜想 3

如果 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > 1$ ，則對於任何 $\epsilon > 0$ ，

$$X^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1 - \epsilon} < N_1(X) < X^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1 + \epsilon}$$

⑨ 譯註：此丟番圖方程常見的形式是 $x^a + y^b = z^c$ 。

⑩ 上述討論省略了等式 $1/a + 1/b + 1/c = 1$ 的情形，亦即 $(3, 3, 3)$ 、 $(2, 3, 6)$ 、 $(2, 4, 4)$ 及其不同排列方式。它們每一種都有一段有趣的故事。

⑪ 望月新一 (Shinichi Mochizuki) 最近宣布證出了 ABC 猜想。關於望月所發表的文章及註解的網上資源彙整，可參閱

http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=ABC_conjecture。

猜想 4

猜想 4 若 α, β, γ 滿足不等式 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$ ，則丟番圖問題 $A + B = C$ （其中 A, B, C 是互質正整數，且冪數分別 $\geq a, \geq b$ 和 $\geq c$ ），只有有限多組解。

相關、非相關和結構

前一節的猜想可以看成是由下面的思路所引導：

- 🎯 $A + B = C$ —— 或者概略言之，加法運算。
- 🎯 指數（次方）—— 或者概略言之，乘法性質。

這類的關係在統計上是不相關的，至少當我們把某些基本且明顯的相關性考慮進來後是如此。試與一些結構性的定理，如畢氏定理或正整數 \mathbf{Z} 的唯一分解域性質（unique factorization domain）相比較便知。然而，「不相關」和「結構」之間，常有著微妙互動。我們經常會發現，去證明某一結構性定理，結果卻是證明某種不相關性質的正確途徑。

每位數學家必定有某些他最喜歡使用的隨機性推理。在數論中，我目前偏愛的是柯恩 / 蘭斯特拉啟發法（Cohen-Lenstra heuristic），它給出的是在各數體（number field）範圍裡，理想類群（ideal class groups）平均值的猜測。[C-L]

柯恩 / 蘭斯特拉啟發法是經由這個思考實驗獲得的：想像我們在遵守所有已知理想類群行為的前提條件下，藉由生成元和關係（generators and relations）都是隨機的過程來製造理想類群。迄今為止，柯恩 / 蘭斯特拉啟發法都與數值計算結果一致，而且這些啟發法被視為是足夠可靠的，所以它們在數學家的猜想工具箱裡佔有穩固的位置——即

使尚未得證，也有助於思考和試驗數論這一支裡的問題。

當我們做隨機性推理時，「是否現象中一切相關的一致性結構都已納入考量？」這個問題盤旋在每一個可行性論證之上。亞丁（Emil Artin）曾經提出一個著名的數論猜想，是預測以給定整數 A （不等於 0 或 ± 1 ）為原根（primitive root）的質數 p 所成的集合在質數全體中的密度。顯然， A 若是模 p 的原根，則不存在質數 q 整除 $p - 1$ 使得 $A^{(p-1)/q} \equiv 1 \pmod{p}$ 。亞丁起初假定這些條件對於不同的質數 q 是獨立的，據以計算此一情況的機率，並且得到一個可能的密度。進一步思索後，他明白這些條件之間確實有某些相依性（與質數 2 有關）。關於這點的詳情可以參考朗（Serge Lang）和泰特（John Tate）為《亞丁論文集》（*The Collected Papers of Emil Artin*）所寫的序。

讓我們再回頭看歐拉的猜想。他討論的 n 是某平方數與質數的兩倍的和，其中該質數模 4 同餘 1。注意如果這個猜想是對的，那麼自然可知，至少有 $1/8$ 的正整數可以寫成這種形式（亦即，任何模 8 同餘 3 的數屬之）。機率啟發法可以怎麼看這猜想？

平方 $< X$ 的數，其數量級是 $X^{1/2}$ ；然後根據質數定理，等於質數的兩倍且 $< X$ 的整數個數，當 X 趨近無窮大時，其數量級是 $X/\log(X)$ （記得我們忽略常數的正因數）。

所以當 X 趨近無窮大時，忽略常數來概算，則（平方數 + 兩倍質數）且其和 $< X$ 的數對個數 $\mathcal{N}(X)$ （其中質數模 4 同餘 1），可得到

$$\mathcal{N}(X) = X^{1/2} \cdot X / \log(X) = X^{3/2} / \log(X)$$

於是忽略常數，對於很大的 X 可得

$$\mathcal{N}(X) > X$$

現在，平方數和質數的兩倍除了模 8 的關係外彼此不相關，所以根據機率啟發法，可促使我們做如下的猜想：

猜想 5

形式符合「平方數加兩倍質數」的整數集合（其中質數模 4 同餘 1），在正整數集合裡的密度為正值。

但有件事應當注意：當機率啟發法暗示這樣的猜想時，它通常還同時暗示了遠多於此的東西。例如，根據同樣的推理，如果我們令 $f(x)$ 為任何正整數係數的非常數多項式，且令 n 為任何正數，則我們同樣可以猜想具有下列形式的數所構成的集合具有正密度：

$$f(a) + n \cdot p$$

其中 a 是任何正整數， p 是任何質數。

從類比推理

我們一切思想的織錦是以類比（analogy）的絲線編織而成的——不管是有意識或無意識的類比——然後再由那些活潑的類比，亦即隱喻（metaphor）來妝點。所以難怪數學思想總是充滿各式各樣的類比，而且也因此生色不少。

然而，類比有兩種稍稍不同的類型：

擴充型類比（analogy by expansion）指的是某人有一個或一組概念、乃至一個理論，然後在維持其結構的前提下，以這些概念為藍本而擴大其範圍。我們通常將它簡稱為「推廣」（generalization）；

但若我們把「推廣」的定義放得更寬鬆，並且納入一些其他類型的類比操作（下面會提到），則「推廣」一詞會更加有用。

擴充型類比在事後看來，或許會像是一個概念非常自然的「解析延拓」^②——例如像零和負數是自然數的擴充，接著又可以擴充到有理數……。然而，這個行為本身在當時乃至之後，會有造成根本變化的震撼價值。例如雖然格羅騰迪克拓樸的概念出現已有半世紀之久，而且（當你懂了之後！）它是古典拓樸概念全然直接的擴充——直抵概念本質的擴充——但它對於什麼是拓樸的激進重構，仍可讓人感到激動不已。

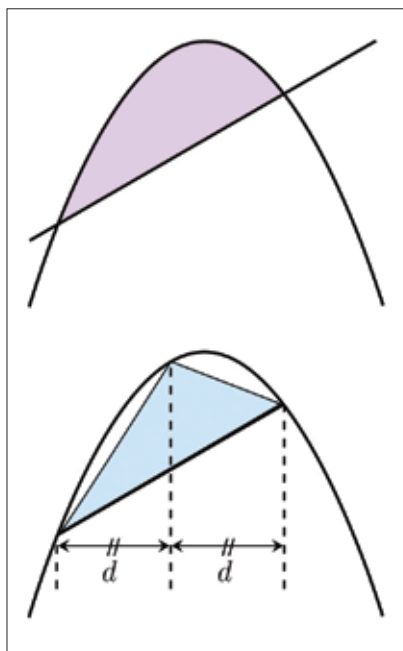
不過還有一種較平凡的擴充型類比是我們經常做的：就是從一個我們已知為真或至少深信為真的（Q）開始，我們找方法改善以得到稍稍推廣的（P），使得

$$(P) \implies (Q)$$

即使是相對微小的改進，比方說，（P）只不過是（Q）+ ϵ ，那也是值得探索的。只要沒有明顯可見的反面暗示（counter-indication），被證明的蘊涵關係可稍微增強我們對（Q）+ ϵ 的信心：這就像亞馬遜（Amazon.com）的行銷用語：「如果你喜歡 X，你應該也會喜歡 Y」，不過形式變成「如果你相信（Q），那你何不相信（Q）+ ϵ ？」我希望能在本文結尾的「後記」闡明，這種信念擴張的

^② 所謂模質數 p 的原根是一個與 p 互質的整數，且其次方遍歷所有非零的模 p 同餘類。任何質數都有一個原根。（編按：例如 2 是 3 的原根，但 4 不是 3 的原根。）

^③ 編註：作者借用了複變中 analytic continuation 的概念來作類比，符合本節的宗旨。



阿基米德證明幾何弓形面積是內接三角形面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。(維基)

態度，或許也可用於解釋為何歐拉會得到他的猜想。

羅塞塔之石

「羅塞塔之石」型的類比 (analogy as “Rosetta stone”) 指的是一個具有其特定辭彙的主題或主題分支，被認為可以構成某種有用的模型，藉以預測在另一主題或主題分支會發生什麼，後者通常具有相當不同的語彙、公設和基本架構。

以下是威伊 (André Weil) 關於類比的名句——雖然他把知識和無感相提並論的看法，我難以苟同，然而我仍一次又一次的引述：

每位數學家都再清楚不過，沒有任何事物比朦朧的類比、理論間混亂的反影、悄然的摸索、無法解釋的齟齬更能帶來豐碩的收穫，也沒有其他事物可帶給研究者更多的樂趣。一旦幻象消逝黎明到來；直覺化為確信；共軛的理論在消退前揭露其共同的根源。正如同《薄伽梵歌》的教誨，知識與無感同時而得。

在數學的發展中，一次次被證明為真的是「共軛的理論揭露其共同的根源」。也就是說，兩個不同理論之間的類比往往是最初的徵兆，暗示著前方還有著一個包容更廣的脈絡，使得現在是用類比套在一起的理論，顯現出不過是更闊大理論下的特例，它們的語彙也溶匯在一起。

前例比比皆是，有些對於我們的主題具有無比重要性，例如像代數和幾何之間的巨型類比。事實上，從一些基本主題的名稱就可以看見以往不同觀點合併的痕跡，像是代數拓樸、代數幾何、幾何代

數 (兩者當然不同)、組合群論 (Combinatorial Group Theory) 等。

近年來，我們目睹了將物理與數學做類比所展現的卓越預測能力——特別是弦論在代數幾何方面的貢獻，這些是來自於先出現在

物理領域的各種對稱性和對偶性。📍

然而數千年來，物理學 (以及廣義理解的物理直覺) 已經提供給數學一個預測都能大體正確的「類比實驗室」。我們只需看看阿基米德的〈拋物線圖形求積法〉(On the quadrature of the parabola)，他在該文中先使用了力學方法——而他認為那不夠嚴格！——來計算拋物線弓形面積與其內接三角形面積的比值。阿基米德還說，關於這個求積法，他也給出了他所謂的幾何 (而非「力學」) 證明，他認為這樣的證明才算嚴格。阿基米德的力學方法是藉由切割把拋物線弓形表示為連續的截線組合，同時把對應比較的內接三角形也做類似的切割。然後他把對應的截線拿來「稱重」(彷彿它們的「重量」與截線長成比例) 從而得到：三角形的「重量」是拋物線弓形「重量」的簡單倍數 (見 [QP])。

若你猜測阿基米德的論證如果正確，將很容易用微積分來驗證，那麼你猜對了。但在阿基米德的概念裡，這個「方法」是用正確引導的類比，將兩個來自不同領域、原本互不相關的直覺結合起來：一個是用秤稱重的經驗，另一個是歐氏幾何的直覺。

目前為止的總結

我已經描繪 (或至少暗示) 三種相當不同的可行

性推理方式：從結果推理、從隨機性推理，以及從類比推理。

從結果推理是歸納法的骨幹。它的缺點在於操作這種方法時，往往並不清楚為了某一般性斷言所累積的結果，是否真能達成目標。例如在數論中有些猜想，關於它們所累積的大量數值資料其實並未（至少不是顯著的）支持這些斷言，甚至從表面來看，反而暗示了另一種定性猜測，但我們（至少目前）仍相信那些一般性猜想。例子可見 [AR]。

隨機性推理的危險在於，我們或許未能考慮到所有與研究現象有關的系統性行為。然而它有兩項極大的優點：它是一個起點，是最佳的當下猜測，所以值得以此來探知全貌；而且即使答案不精確，它往往是一種分析方式，藉此可將現象中的隨機面向（可能顯示為「誤差項」）與更規律的面向（可能顯示為「主項」）區隔出來。在數論中，這些誤差項可能又會具有深刻的結構，例如可參考 [FME]。

但是類比推理才是真正的拱心石（keystone）：它出現在許多（或許是全部）的日常數學思考中，而且也常是一些重要、長程的數學綱領背後的靈感。威伊所說的「沒有其他事物可帶給研究者更多的樂趣」誠然不虛。

數論中，目前正被嚴格探索的朗蘭茲綱領（Langlands program）即是一項連結了表現論、代數幾何和算術的巨型類比。（參見 [G]）

數體和有限體上的單變數函數體之間的類比是一個更基本且更傳統的例子。此一類比把這兩種類型的體看成可以用統一方式來處理的領域，稱為大域體（global field）。¹⁴

「可行性」的各種變體

歐拉相信他的猜想為真的原因，可能混合了我在文章開頭分成不同類別的三種可行性推理（結果、隨機性和類比）。我的感覺是，如果我們仔細回想我們自己專注思考任何數學課題的歷程，一切可用的資源都會在研究過程中扮演某些角色。這些資源的互動方式或許很複雜，也或許是關鍵。

而且有時，可行性本身不是最緊要的。當思考可能的數學策略時，我們自然會把注意力集中在能成為突破點的地方，而不是去構思可行的表述。它們之所以有用，是因為它們所激發的動力，而不必然是因為它們的真理價值，有時是否為真甚至沒那麼重要。原始形式的希爾伯特第十問題即是一例¹⁵。我們衡量這些突破點是否「可行」的是：我們跟隨它的指引走一段路是不是會有益？我們對這些可行性表述的忠誠只是暫時、半穩定的，且會視情形調整，就像是貝氏分析（Bayesian analyses）的先驗機率。

有時候，去特別設想一個不知道答案的是非題會有助於釐清想法。而且，單單想到我們甚至沒有足

¹⁴ 例子的範圍和數量多不勝數，在此僅舉一例：基於可算是「物理類比」的理由，物理學家 Candelas、de la Ossa、Green 等人猜想了一個在一般五次三維形上任何次數有理曲線數目的一般公式。他們的猜想後來得到確認，參見 [CK]。

¹⁵ 但是就像所有巨型類比，其不完美處處可見，所產生的問題可能會引導出未來的理論，將會比目前習以為常的更為深刻。

¹⁶ 編註：希爾伯特第十問題如下：對於任意多未知數的整係數丟番圖方程，是否可設計出一個算則，使得在有限次運算之後，可以判定該方程是否有整數解。

夠的經驗做出令人強烈相信為真的猜測，這就可讓自己更專注（一些）了。

我們的思想經常充滿了碎片，其中包括可能的模式、可能的表述，還有（甚至更重要的）可能的組織性原理；因為是破碎的，所以真理甚至還不具意義，因為它們真得視脈絡而定，而脈絡尚未完全決定或完全形成。有些組織性原理的真確性是我們默認同意的（意即不予討論即接受其原則），這些原理可擔任嚮導，協助我們找到它們足以成立的脈絡。在物理學，能量守恆即是這類指導性原理。能量當然是守恆的，如果有人發現了某個能量似乎不守恆的狀態，我們不會丟掉守恆原理，而是去修正關於能量的概念。

我們用一個數學上的著名範例來說明這類現象：試考慮希爾伯特 / 波利亞著名的猜想，他們希望找到一個希爾伯特空間與厄米特算子（Hermitian operator），使其特徵級數在恰當的規範化（normalization）與調整後會等於黎曼 ζ 函數。在此的重點是，如果能找到這樣的希爾伯特空間和算子，即可證明黎曼假說。反之，如果黎曼假說成立，我們可以製造（僅僅形式上）這樣的希爾伯特 / 波利亞模型。所以可行性在此根本無關宏旨；要問的是思考這個猜想是否有實際效用。①

不過光是它邀請我們去思考 $\zeta(s)$ 的零點，關連到其類比的有限體代數解形 ζ 函數（這是某線性算子的固有值），那麼希爾伯特 / 波利亞模型已經顯示它的有用之處。在另一個方向上，它連結到已證實的岩澤主猜想（Iwasawa's Main Conjecture），這個猜想將黎曼 $\zeta(s)$ 的親戚—— p 進（ p -adic） ζ 函數——與某些自然算子的固有值等同起來。在另

一迥然不同的方向，希爾伯特 / 波利亞模型邀請我們去比較 $\zeta(s)$ 零點和隨機矩陣的固有值。當然，若它能啟發出黎曼假說的證明，那會是它最崇高的效用。

我們都曾聽過，或者我們自己就相信：某些表述是可行的，或者應該為真——或至少是有用的——是因為它看起來很美。我們該如何理解？我們該如何理解濟慈（John Keats）的那一名句^②？或是愛因斯坦告訴萊亨巴赫（Hans Reichenbach）的名言（亦即，即使在1918年的日食提供支持證據之前，他就知道廣義相對論必定是對的，因為理論很優美），或是所有其他可以稱為美的說服力的例子？

每當我們似乎被「美 / 真」的連結所牽動，每當我們遇到這樣的範例，若我們希望能窮究其力量，那麼理解其特定背景的細節是很重要的。實情難道不是：真理的某些面向在我們心中銘刻了優美的印象，而不是美令我們覺得真；美是思想的純然澄明本質的結果。然而有時「因為美，所以有說服力」的說法構成了指導原理，為我們建立了場景、觀點、語彙，所有這些又可能影響那些日後與之連結的事實。這都使這個特定命題無法檢驗真偽。

後記：蘊涵高斯 Eureka 定理的歐拉猜想

試回想，我們要假定歐拉猜想，即對於任何整數 $n \geq 0$ ，下面的 (A) 式成立，其中 a 是整數， p 是質數：

$$(A) \quad 3 + 8n = a^2 + 2p$$

然後要證明高斯的定理，即任何整數 $n \geq 0$ ，都可以寫成三個三角形數的和。以下是這項證明的步驟和提示。



費馬。(維基)

1. 對於任何形如上述 (A) 式的等式， a 是奇數， p 可以表成 $4t + 1$ 。(提示：對 (A) 式做模 8 的算術。)

2. 如果質數 p 出現在形如 (A) 的等式中 (即模 4 同餘 1)，則 p 可以寫成兩平方數的和：

$$p = u^2 + v^2$$

(這是費馬定理。)

3. 若任何數 $n \geq 0$ 出現在形如 (A) 的等式中，則任何數 $n \geq 0$ 出現在形如下式的等式

$$(A') \quad 3 + 8n = a^2 + b^2 + c^2$$

其中 a, b, c 是奇數。(證明：若 $p = u^2 + v^2$ ，取 $b = u + v, c = u - v$ ，再對 (A') 模 8，證明 a, b, c 是奇數。)

4. 令 $a = 2x + 1, b = 2y + 1, c = 2z + 1$ ，其中

x, y, z 是整數，計算可得：

$$(B) \quad n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}$$

反過來即可證明 $(B) \implies (A')$ 。

5. 於是可得 $(A) \implies (A') \iff (B)$ 。

我們現在可以更精確的推測歐拉的可行性思路。歐拉相信 (B) 成立，而且他當然知道 (B) 是邏輯等價於 (A')。所以他必然相信 (A') 成立，而且知道要從 (A) 到 (A')，在此脈絡下，所需做的不過是把：

🔴 形如 $2u^2 + 2v^2$ 的數集，且符合 $u^2 + v^2$ 為奇質數的條件，替換成

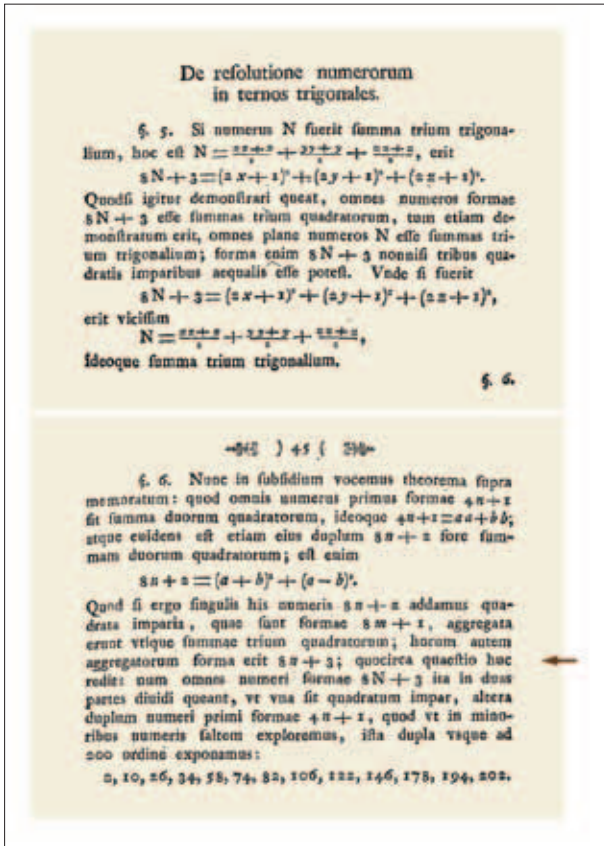
🔴 形如 $2u^2 + 2v^2$ 的數集，且符合 $u^2 + v^2$ 為奇數的條件

我要感謝鄧南 (William Dunham) 寄給我歐拉此一猜想的原始文件 (見下頁)，它出自歐拉文獻 (Euler Archive) E 566，是歐拉於 1775 年 10 月 19 日提交給聖彼得堡科學院的論文。歐拉思索 *quocirca quaestio huc redit* (「接下來的問題是」)：任何可寫成 $8n + 3$ 的數，是否能拆成兩部分，一部分是奇數的平方，另一是形如 $4n + 1$ 的質數的兩倍。

所以，或許他的思路是這樣的：費馬已經跟我們保證 (雖然沒有給出證明)，如果跑遍可以表成 $u^2 + v^2$ 形式的奇數，就可以得到正確的命題。那

17 可行性讓位給功用性，暗示我們有點淪入威廉·詹姆斯 (William James) 的實用主義。

18 譯註：指濟慈〈希臘古甕頌〉(Ode on a Grecian Urn) 中的詩句，「美即是真，真即是美」(Beauty is truth, truth beauty,)。



歐拉文獻 E566 相關的片段，箭頭指處就是文中提到 quocirca quaestio huc redit 處。

麼我們可否再進一步，要求跑遍可以表成 $u^2 + v^2$ 形式的奇質數，這樣就可得到更好且仍然正確的命題？多麼精妙的猜想，並且暗示了質數密度的研究。考慮到歐拉並不如高斯那樣能夠猜測 $\pi(X)$ 的逼近值，而且他也沒有任何有助於估計的嚴肅結果，他的猜想就更加難能可貴了。

從這個角度來看，歐拉的思考模式似乎是直接磨利已知的結果，是一種擴充型類比。

總而言之，歐拉的推論應該運用到了我所列出的所有推理模式。☺

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉

<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

本文出處

本文曾以演講的形式在 2012 年 1 月 5 日的 AMS-MAA 聯合會議上宣讀。後收於 *The Mathematical Intelligencer* 36 (2014) No.1。

譯者簡介

趙學信，網路工程師，兼事翻譯寫作。

延伸閱讀

► Pólya, George *Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics, Mathematics and Plausible Reasoning: Volume II: Patterns of Plausible Inference* (1954), Princeton University Press。本書重印多次。臺灣可見譯本有《數學與可信推理》(林聰源譯)，曉園；《數學與似真推理》(簡體，楊迅文等譯)，福建人民出版社；《數學與猜想》兩冊(李心燦等譯)，臺版：九章、陸版：科學出版社。

► 作者在哈佛大學的網站內除了數學論文外，還有許多科普性或人文性的討論文章。

<http://www.math.harvard.edu/~mazur/index.html>

► Derbyshire, John *Prime Obsession - Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (2004)。中譯成兩本《質數魔力(上)(下)》(2005)，陳可崗譯，天下文化。想理解黎曼假說，這是一本可讀性很高的科普書。