

投資純數學就是投資我們的未來

2016 年阿貝爾獎得主懷爾斯訪談

訪談者：勞森 Martin Raussen · 史考 Christian Skau 譯者：翁秉仁

受訪者簡介：懷爾斯曾長期任教於普林斯頓大學，現為牛津大學教授。他的研究領域是數論，以證明費馬最後定理知名於世，並因此獲得 2016 阿貝爾獎。

訪談者簡介：勞森目前任職於丹麥奧爾堡大學（Aalborg University, Denmark）數學科學系。史考是挪威科技大學（Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway）數學系退休教授。他們從 2003 年起負責阿貝爾獎得主的訪談。

問 | 懷爾斯教授，恭喜你獲得 2016 年阿貝爾獎。老實說，我們等待這次訪談已經好幾年了。

你不但享譽數學社群，在社會大眾之中也頗負盛名。如果徵引阿貝爾獎委員會的說法，原因就是「你透過橢圓曲線（elliptic curve）的模性猜想（modularity conjecture），漂亮的證明了費馬最後定理，為數論開啟了新紀元。」你的證明可以回溯到 1994 年，這表示你多等了 20 年才獲得阿貝爾獎。但無論如何，你仍然是至今最年輕的阿貝爾獎得主。

你證明費馬最後定理之後，媒體訪問蜂擁而至。這為今天的訪談增加了難度。究竟還有什麼問題你還沒有回答過呢？唉，我們只好盡力一試。

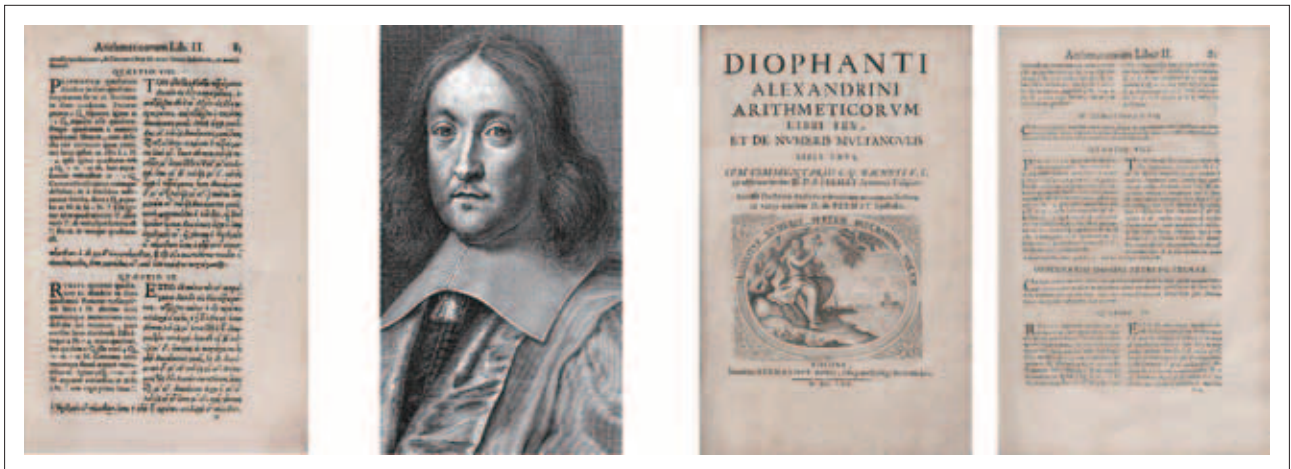
費馬最後定理的歷史回顧

先回到這段故事的源頭，那是一段拉丁文：… nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere，意思是「任何高於

二的幕次不可能再分成兩個同樣的幕次。」用現代數學術語來說，就是方程式 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 時沒有正整數解。這段話還有後文：cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet，意思是「我發現一個非常精彩的證明，只是書緣太窄寫不下。」這整段話出自法國律師與業餘數學家費馬（Pierre de Fermat），寫在他收藏的丟番圖（Diophantus）名著《算術》（*Arithmetica*）的書緣，時間是 1637 年。他想必沒料到這段話，讓專業或業餘的數學家忙了好幾世紀，想發掘出這項證明。

請簡單說明，在你成功證明費馬最後定理之前，歷史上曾經出現過的嘗試。尤其，為何看來這麼簡單的問題會有這麼大的吸引力？而且在數論發展史上，為何證明這個定理的嘗試如此多產？

答 | 第一個想認真解決這個問題的，當然應是費馬自己。可惜我們對他的嘗試一無所知，只知道他



由左至右：（1）1621 年版的丟番圖《算術》問題 II 之 8，85 頁就是費馬寫不下證明的書緣；（2）費馬；（3）1670 年版的丟番圖《算術》，封面註明內含費馬的註釋；（4）1670 版的問題 II 之 8（61 頁），稍下方就是費馬知名的註解。

解釋了 $n = 3$ 或 $n = 4$ 這兩種特殊情況的證明^❶。也就是說，他證明兩個立方數的和不可能是立方數；兩個四次方數的和不可能是四次方數。他的美妙證明方法稱為無窮遞降法（infinite descent）。這在算術學裡是一種新證明法，或呈現證明的新方法。費馬曾在給同儕的信中解釋這個方法，也寫在他知名的書緣上，這次空白大到至少足夠寫下其中一部份。

費馬過世之後，他的兒子把父親的書緣筆記出版，此後事情沈寂了一段時間。後來歐拉（Leonhard Euler）和其他人接手，試圖找出這個非常不可思議的證明，但是都失敗了。到 19 世紀中葉，故事的發展很戲劇化，有好幾個人認為自己解決了這個難題。在法國科學院（French Academy）裡，有些關於這個議題的討論。拉梅（Gabriel Lamé）宣稱自己快證明這個定理，然後柯西（Augustin-Louis Cauchy）說他相信自己也能證明，諸如此類。

事實上，當時傳說德國數學家庫默爾（Ernst E. Kummer）已經寫了一篇論文，解釋最基本的問題出自所謂的算術基本定理：普通正整數裡任何數只有一種質因數分解，例如 12 只能分解成 2 乘以 2 乘以 3，沒有其他的分解方式。想要解決費馬問題時，卻會用到缺乏這種唯一性的數系。在過去，解決費馬問題的所有嘗試之所以窒礙難行，都起因於唯一分解性質的失敗。於是，庫默爾完成了細節令人驚歎的分析，得到十分漂



歐拉



庫默爾

亮的結果。庫默爾能夠證明很多情況。例如當 $n \leq 100$ 時，他能夠證明所有質數的情況定理成立（除了 37、59、67 之外）。不過庫默爾終究無法解決整個問題。他的方法立基於費馬引介的無窮遞降法，只是用於上述的新數系。庫默爾使用的新數系衍生出今天所謂的代數數論。數學家在這種新數中解方程式，取代原先正常的整數和有理數。

追隨費馬思路所做的嘗試風行了一段時間，但在 20 世紀逐漸淡出，沒有人能再找出根本的新想法。20 世紀後半，數論持續進展，但考慮的是其他問題，專業數學家幾乎忘了費馬問題。

直到 1985 年，德國數學家弗瑞（Gerhard Frey）發現一個驚人的新點子。他取出一組費馬問題的假設解，利用它構造一條橢圓曲線。弗瑞演示這類橢圓曲線的性質很特別，並猜測這樣的橢圓曲線根本不會存在。一年之後，美國數學家李比特（Kenneth Ribet）以弗瑞曲線為基礎，證明任何費馬問題非無聊解的存在和知名的模性猜想（Modularity Conjecture）矛盾。

模性猜想原先較弱的形式出自日本數學家谷山豐（Yutaka Taniyama），後來由志村五郎（Goro Shimura）加以改善。不過，這個猜想的第一項實質證據來自威伊（André Weil），他提出模性猜想的明確形式，讓我們有可能仔細檢視其正確

❶ 嚴格說起來，歐拉才是第一位清楚寫下 $n = 3$ 完整證明的人。



懷爾斯從挪威哈康王儲（Crown Prince Haakon）手上接下阿貝爾獎。（Audun Braastad 攝）

性。之後，許多證據不斷累積，顯示這個猜想勢必正確。於是，數學家到了這個關頭才確認，是的！費馬應該是對的。只是，還缺了證明。

模性猜想不是數學家可以丟到一旁，再放個 500 年不管的猜想。它是衝著現代數學大道，擋在路正中央的障礙，是一個非常非常核心的問題。不像費馬問題，你不妨擺在一旁，就此遺忘也無所謂。但是模性猜想無法忽略。因此，在聽到李比特結果的當下，我知道這個問題能解決，我想試試看。

問 | 關於費馬宣稱已然證明的種種揣想，你覺得他的想法是跟拉梅相同，假設分圓整數（cyclotomic integer）具有唯一分解嗎？雖然最後知道那是錯的。

答 | 不，我不認為如此。雖然想法或許包藏在其中某處，但會很難理解。威伊曾經論述這個問題。費馬考慮的所有其他問題，都和虧格（genus）為 0 或 1 的曲線有關。然後，他突然討論起高虧格的曲線，他要如何著手？

我在年少時曾經試過，把自己擺在費馬的認知框架中，畢竟我那時不太可能還有別的看法。

我可以了解他 17 世紀的數學，但很難再超越更多。我感覺費馬所做的一切似乎都化歸到二次型（quadratic form），因此或許是可以一試的思路。當然最後我沒有成功，但是也沒有其他的線索，暗示費馬曾經陷入唯一分解的困境。事實上從二次型的觀點，費馬理解有時唯一分解成立，有時不行。因此，從他自己的脈絡足以了解這個差別。我覺得這不太可能是他所犯的錯誤。

問 | 你剛提到威伊的書，也就是《數論：從漢摩拉比到勒讓德的歷史取徑》（*Number Theory: an approach through history from Hammurapi to Legendre*），威伊在書中提到費馬曾討論方程式 $x^3 - y^2 = 2$ ，並說明它基本上只有一組解，亦即 $x = 3$ 且 $y = \pm 5$ 。他猜測費馬當時所檢視的正是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ，而這個環（ring）具有唯一分解性質。

答 | 是的，他用到唯一分解性質，不過他是透過二次型來運用。我想他也曾檢視對應到 $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ 的二次型，但這個環就沒有唯一分解性質。所以我才認為他理解箇中因由。這是我的印象，當我過去思考這個問題時，感覺費馬其實是理解這個差別的。

數學教育

問 | 你在很小的年紀就對數學益智遊戲感興趣。你曾經想過這樣的嗜好是怎麼來的嗎？你是否特別受到誰的影響？

答 | 我很小就非常喜歡數學，十歲的時候翻遍了圖書館中的數學類書架。我常搬出一堆書閱讀。有

一次，我讀到貝爾（Eric T. Bell）所寫的《最後問題》（*The Last Problem*），封面上描述了費馬方程式、沃夫思凱爾獎（Wolfskehl Prize）^②，以及這個難題的浪漫歷史。我完全沈迷其中。

問 | 貝爾這本書裡，還有什麼東西讓你驚豔？

答 | 他整本書真的只談一類方程式，而且字真的很多。因此就某種意義而言，書中數學的部分比原先我期待的少，只把重點放在方程式本身。所以當我發現這個方程式，就開始尋找其他數論的入門書，學習同餘（congruence）、解同餘方程等等，而且我還閱讀了其他費馬的研究結果。

問 | 你是在正常的學校作業之外做這些事情的？

答 | 是的，我想學校作業並不怎麼費事。

問 | 你當時是否已經很清楚自己數學天分非凡？

答 | 我當然有點數學才能，顯然也很愛數學，不過我不認為當時我覺得自己是唯一的。事實上，連在學校裡我都不相信自己那麼突出。其他同學已經有人強勢宣稱日後要成為數學家，有些後來還真的當了數學家。

問 | 你在那個年紀，也已經想要研究數學，將數學納入職涯規劃了嗎？

答 | 沒有。我不認為自己當時真的理解一個人可以終生做數學，這要等再晚一點才領悟到。不過，我當然希望盡己所能研究數學。我很確定自己生涯開展時，一定會將數學包含在內。

問 | 你在 1971 年進入牛津大學開始讀數學。可以跟我們談談當時的情形嗎？有什麼特別的老師或領域對你來說是很重要的？

答 | 在高中時，我有一個老師是數論博士。他送我一本哈第（Godfrey H. Hardy）和萊特（Edward M. Wright）合寫的《數論簡介》（*An Introduction to the Theory of Numbers*）。我自己也找到一本戴文波特（Harold Davenport）寫的《高等算術》（*The Higher Arithmetic*）。我覺得這兩本書在數論學習上非常有啟發性。

問 | 所以你在進入大學讀數學前，就已經找到自己的跑道了。

答 | 沒錯。其實某種程度來說，我覺得大學課程反而分心，因為我必須做很多別的事，像是讀應用數學、邏輯等等，而我只想研究數論。我們的第一年不許做數論。在三年級之前也無法全心專注於數論研究。

問 | 你對幾何並不感興趣，至少不像對代數和數論那麼來勁？

答 | 沒錯。我最主要的興趣是代數和數論。能學習別的東西我也很高興，但是真正讓我最興奮的是數論。我的老師安排我去上更多數論課程，不過當時並沒有那麼多這樣的課程。

^② 譯註：這裡的曲線是複曲線，相當於實曲面。虧格是一個拓樸量，可看成曲面的洞數。所討論的方程次數越高，對應的曲面虧格越大。費馬問題的曲線 $x^n + y^n = z^n$ 一般都是高虧格曲線。

^③ 譯註：關於這個獎的來龍去脈，見後述。



寇茨。(MFO)

有一段時間，我決定好好運用多年在學校學的拉丁文，試著閱讀一些費馬的原著。不過那真的太難了。即使能夠翻譯拉丁文，但當時的著作缺乏我習慣的代數符號，真的十分困難。

問 | 所以畢業後，你應該鬆了一口氣。因為你進入劍橋大學，開始跟著你的論文老師寇茨 (John Coates) 研究真正的數論。

答 | 我可以有一整年只研究一個主題，足以寫出一篇專業論文。寇茨當時還沒進入劍橋，但他協助我，那時應該是夏天。反正，那年夏天我和寇茨見面，立即一起工作，這是一段非常棒的經驗。從只能閱讀和學習的大學時代，轉變到研究工作，對我真是一種突破，是非常美妙的體驗。

橢圓曲線

問 | 我們推敲過，應該是寇茨引領你研究橢圓曲線和岩澤理論 (Iwasawa theory) 的吧？

答 | 當然。寇茨有一些很精彩的想法，而且很大方的與我分享。

問 | 你跟寇茨說過你對費馬問題的興趣嗎？

答 | 可能說過，不過我不記得了。事實是，自從 19 世紀之後就再也沒出現過什麼新點子。大家只是嘗試改善舊方法。其中的確有一些改善的成果，但是看不出這些改善，如何和真正完全解決問題兜在一起。想要從這個方向進行，未免太困難了。

問 | 當你跟寇茨開始工作時，你並不知道你們研究的橢圓曲線日後將是解決費馬問題的關鍵，對嗎？

答 | 不知道，這是絕妙的巧合。奇怪的是，今天我們記得費馬的兩項最主要工作，就是他的橢圓曲線研究以及費馬最後定理。例如你剛剛提到的方程式 $y^2 + 2 = x^3$ 就是一條橢圓曲線。結果這兩條主線在證明時竟然合流了。

問 | 請你說明一下何謂橢圓曲線，以及為什麼數論和橢圓曲線有關係？

答 | 對於數論學家，橢圓曲線源自費馬考慮方程式 y^2 等於一個 x 的三次有理係數方程式，而問題是求這類方程的有理數解。費馬注意到下述事實：有時你可從一個或兩個有理解開始，透過這些解生成無窮多的其他解；但是有時根本沒有解。後者在 $n = 3$ 的費馬問題就會發生，這個方程對應的是一條偽裝的橢圓曲線 (elliptic curve in disguise)。有時你能證明方程不存在有理解。費馬對此了然於心：解可能無窮多，也可能一個都沒有。

19 世紀早期，數學家在複數中研究橢圓曲線。阿貝爾 (Niels H. Abel) 此時登場，他研究橢圓函數，並將它連結到橢圓曲線，這蘊含橢圓曲線具有群結構。在 19 世紀初期，藉由雙週期函數理論，這個事實已經眾所周知。不過這一切指的是複數解的情況，他們是在複數中求方程式的解。

開始研究這類方程有理解的是龐卡赫 (Henri

Poincaré)。如今所謂的摩岱爾／威伊定理回答了龐卡赫的問題，這是摩岱爾（Louis J. Mordell）和威伊先後在 1920 年代證明出來的。這個定理若以現代的架構是說：考慮數體（number field） K 橢圓曲線上的 K 有理點（包括 K 是有理數的情形），這些點構成一個有限生成的交換群（abelian group）。套用費馬的語言，就是從有限的解開始，可以運用他所謂的弦切法（chord-and-tangent process）生成所有解。

BSD 猜想、TS 群、塞爾莫群

所以你可以掌握結構，這個非常美麗的代數結構稱為群（group），但是這對如何找到解並沒有實質幫助，還是沒有人真的知道求解的一般方法。直到 1960 年代出現了伯奇／斯溫諾頓戴爾猜想（Birch and Swinnerton-Dyer conjecture，簡稱 BSD 猜想）。這個猜想有兩個面向，一個是分析的面向，另一個則是所謂的泰特／薩法瑞維奇群（Tate-Shafarevich group，簡稱 TS 群）。基本上，TS 群所給的訊息正是求解算則的障礙。而 BSD 猜想則告訴我們，的確存在解讀 TS 群的分析方法。如果能將這一切整合在一起，最終就能給我們一個求解的算則。

問 | 你跟寇茨當研究生時，是不是就已經在研究 BSD 猜想了？

答 | 是的，這正是他建議研究的題目。我們在某特定橢圓曲線系（family）得出第一個結果，討論方程解與橢圓曲線的 L 函數之間的分析連結。

弦切法

所謂弦切法，一開始是從幾組橢圓曲線的理解找出其他有理解的方法，但因此衍申出曲線的群結構。若曲線方程為

$$y^2 = x^3 - ax - b, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

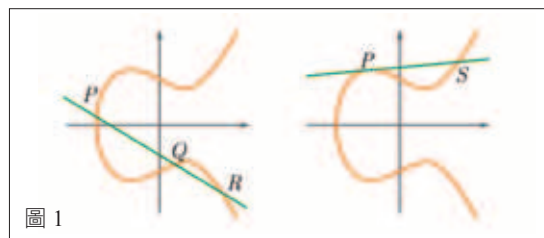


圖 1

如圖 1 兩小圖所示：若 $P(x_p, y_p)$ 和 $Q(x_q, y_q)$ 是有理解，則直線 PQ 和曲線的另一交點 $R(x_R, y_R)$ 也是有理點（弦法）：

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q, \quad y_R = y_P + m(x_R - x_P)$$

其中， $m = (y_Q - y_P)/(x_Q - x_P)$ 是 PQ 的斜率。另外，過 P 點切線和曲線的另一交點 $S(x_S, y_S)$ 也是有理點（切法）：

$$x_R = m^2 - 2x_P, \quad y_R = y_P + m(x_R - x_P)$$

其中， $m = (3x_P^2 - a)/(2y_P)$ 。

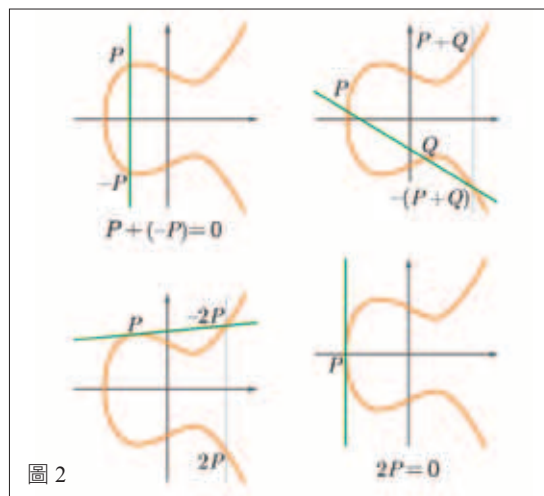


圖 2

圖 2 則呈現如何在此曲線上定義群的運算 $+$ ，其中單位元素 0 可以想成是無窮遠（交）點。左上圖有兩層意思：平行於 y 軸的直線，和曲線交於兩點，我們定義這兩點互為反元素： P 和 $-P$ ；同時也認為此直線和曲線相交於無窮遠點 0 。這和右上圖的規則一致。下兩圖則說明切點（相當於 $P+P$ ，亦即 $2P$ ）對應的運算規則。

4 譯註：寇茨 1969 年從劍橋畢業後，前往美國的哈佛大學和史丹福大學。1975 年，他回劍橋任教，但夏天已先回到劍橋，並和懷爾斯見面。

問 | 這個曲線系容許複數乘法。

答 | 正是。就是帶有複數乘法的橢圓曲線。

問 | 這是否關於 BSD 猜想的第一個一般性結果？

答 | 這是第一個處理曲線系的結果，而不只是個別特例。關於個別情況，當時已經有很多數值資料，但我們的結果是第一個無窮系的情況。

問 | 這個結果針對的是有理數。

答 | 沒錯。

問 | 順便提一下，BSD 猜想是克累千禧年大獎問題之一，解決的人可以獲得 100 萬美金的獎金。

答 | 這是一個迷人的問題。部分原因在於它也根植於費馬的工作，就像費馬問題一樣。這是另一個「描述起來很基本」的問題，關心的是人們無法掌握的方程式（在這個情況次數很小），而且也源自費馬的想法。我認為這個問題十分吸引人。

問 | 你覺得離解決 BSD 猜想的時間已經不遠了嗎？換句話說，我們已經備足必要工具，只待有人膽量夠大，就能出手成功解決這個問題嗎？還是得再等另一個 300 年？

答 | 我不覺得需要等到 300 年，但這也不是千禧年問題中最簡單的一個。想要解決，我認為還缺少某種東西。到底工具是不是都已經在手邊，我並不確定，或許是吧。對於這些真正困難的問題，總是會出現這一類的揣測。但是事情或許很單純，就是需要的工具尚未出現。

我不相信任何 19 世紀的人可以解決費馬最後問題，當然不可能以最後解決的方式出現。數學史的鴻溝就是那麼巨大，必須再等 100 年，正確的拼圖才會到位。

你永遠無法很確定，我們的時代是否已能解決這些問題。這正是這些問題那麼有挑戰性的原因。如果你只是有直覺現在可以做什麼、做不出什麼，那你離解決問題還有一段遠路。

問 | 你剛談到的 TS 群和塞爾莫群有關。塞爾莫 (Ernst S. Selmer) 是一位挪威數學家，為塞爾莫群命名的則是卡協爾斯 (John W. S. Cassels)。你可以談談塞爾莫群以及它和 TS 群的關連嗎？儘管這會牽涉到專業術語。

答 | 這的確很技術性，不過或許我可以解釋塞爾莫群的基本意義。我們想要做的是找出橢圓曲線上的有理解，方法是在橢圓曲線取一些有理點（假設能找到），以這些點生成體擴張 (field extension)。我所謂生成體擴張，是指可以取這些點的次方根，就像平常取 5 的 n 次方根或 2 的三次方根一樣。我們在橢圓曲線上做類似的事：取一個點的 n 次方根，也就是取出那些自己連「加」 n 次後會等於該點的點 \circledast 。這些點可以生成本來數體的某種擴張，在我們的情況，本來的數體就是有理數體 \mathbb{Q} 。你可以在這些擴張中施加許多限制條件。基本上，塞爾莫群就是在這些明顯限制之下最小的一組擴張。

綜述一下。我們手上有一些點，以這些點得到某些擴張，但是這些擴張太大了，我們不需要那麼多擴張。於是我們加入局部的條件限制——解

釋這個需要用到 p 進數 (p -adic number) —— 盡量削減這些擴張，從而得到塞爾莫群。基本上，這組點所生成的群和塞爾莫群之間的差異就是 TS 群。因此 TS 群所給的資訊，可以說就是從塞爾莫群到這些點之間的「誤差」。

問 | 卡協爾斯所引述的塞爾莫論文，其中討論了 $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ 以及類似方程。塞爾莫證明這個方程在整數只有無聊解，但是如果模 n ，則對所有 n 都有非無聊解。特別的是，在它相應的曲線上沒有有理點。為什麼卡協爾斯要用塞爾莫來為這個群命名？

答 | 這其中有十分微妙的關係。事實上我們檢視的是一條橢圓曲線，在這裡 $x^3 + y^3 + 60z^3 = 0$ 是偽裝下的橢圓曲線（如果你喜歡這樣稱呼的話），而 TS 群則是考慮其他諸如此類的曲線（例如 $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ ），虧格為 1，但上面沒有有理點。而它對應的雅可比解形 (Jacobian variety) 是原來橢圓曲線 $x^3 + y^3 + 60z^3 = 0$ 。一種描述 TS 群的方式，就是透過這些虧格 1 但沒有有理點的曲線，將這些整合起來就是 TS 群，而這反映在塞爾莫群上。這實在太複雜，很難用普通話語來解釋，但這是描述這些概念的另一種方式。我前面藉由體擴張這類算術名詞來解釋，這裡則是藉由撓形式 (twisted form) 這樣的幾何方式來說明。^⑤

模性猜想

問 | 你最終證明的是現在所謂模性猜想的某個特殊情況。為了解釋這個猜想，我們得從模形式

(modular form) 開始，並討論模形式和橢圓曲線的關係。你可以為我們稍做解釋嗎？

答 | 好的。前述的有理橢圓曲線來自方程 $y^2 = x^3 + ax + b$ ，其中 a 和 b 是有理數（還有一個條件是判別式 [discriminant] 非零。）前面說過，19 世紀初數學家就知道求這類方程的複數解，而且可以藉由懷爾斯查司 (Karl Weierstrass) 的 \wp 函數或某特殊橢圓函數來對此做完善描述。

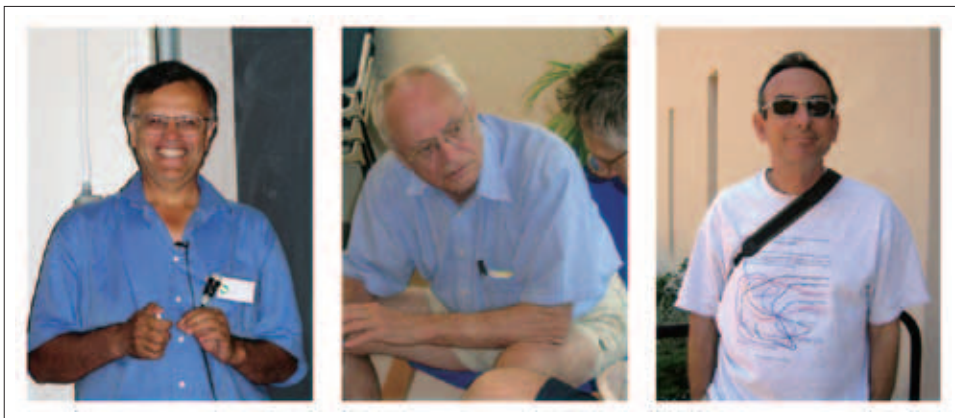
不過，我們真正需要的是一個對這些橢圓曲線全然不同的單值化 (uniformization) 理論，足以反映 a 和 b 是有理數的事實。它必須是只針對有理橢圓曲線的某種參數化 (parametrization)。而且，由於它反映了方程式定義於有理數的事實，因此能比橢圓函數更讓我們掌握有理解的特性。畢竟原先使用的橢圓函數只能反映複結構。

這個理論源自模形式或模曲線 (modular curve)。先談模函數 (modular function) ^⑥。我們很熟悉平移下不變的函數，每當寫下一個傅立葉級數 (Fourier series)，就有一個平移不變

^⑤ 譯註：通常數 a 的 n 次方根指的是自「乘」 n 次會等於 a 的數。不過前面所提的運算用的是 +，所以才說連「加」 n 次。

^⑥ 編註：撓形式是指二個定義在有理數體的曲線在佈於一個有限擴張上會同構。根據定義，撓形式必有相同的虧格，但不必然在有理數體上同構。例如文中的曲線 $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ 是 $x^3 + y^3 + 60z^3 = 0$ 的一個撓形式，前者沒有有理點，後者有理點 $(1, -1, 0)$ ，但二者佈於一個較大的有限擴張是同構的。（感謝中研院謝銘倫提供說明）

^⑦ 譯註：在訪談中，懷爾斯混用模形式和模函數。兩者在定義上有一點微小的差異。



弗瑞（左），塞爾（中），李比特（右）。（維基）

用很多工具來研究。

的函數。而模函數則是在大得多的群作用下不變的函數，其中考慮的群通常是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的子群。也就是說，我們考慮的是單複變函數 $f(z)$ （通常定義在上半平面 H ），並滿足

$$f(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

或者在等號右式再乘上 $cz+d$ 的某個次方。

這些函數稱為模函數，在 19 世紀就被廣為研究。令人驚訝的是，模函數是研究橢圓函數算術性質的關鍵。也許最簡單的描述方式如下：由於 $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用在上半平面 H ——把 z 映到 $az+b/cz+d$ ——因此可考慮 H 模掉此群作用的商空間（quotient）。我們可以賦予這個商空間以曲線結構，事實上，它有一個很自然、定義於有理數的曲線結構。

取 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的同餘子群（congruence subgroup），其中假設 c 值可以被 N 整除，稱上述考慮的曲線是層級（level） N 的模曲線。模性猜想斷言所有有理數橢圓曲線，都是上述某層級 N 模曲線的商曲線。於是利用這些模曲線，可以給出橢圓曲線的單值化理論。

表面上看來，這麼做沒有好處，因為模曲線是更複雜的高虧格曲線。但事實是它具備更多結構，因為它是一個模空間（moduli space）。

問 | 這是一個威力強大的工具嗎？

答 | 沒錯。其中牽涉到函數論、變形論（deformation theory）、幾何方法等，因此可以

問 | 年輕日本數學家谷山豐是第一位猜測或提示這項關連的人，不過他的猜想是否比較模糊？

答 | 谷山的猜想的確比較模糊。他沒有把猜想和在模群（modular group）^① 作用不變下的函數（模函數）連結起來。我已經忘記谷山猜想的明確敘述，我想他提出某種群的不變量，但我忘了他預測的是什麼群，不過不像模群同餘子群這麼清楚。他的文章是用日文寫的，可惜沒有廣為流傳。我想他的論文收在某部日本學術會議結集內^②。

問 | 在當時，這是難以想像的大膽猜想？

答 | 顯然如此。

問 | 不過它慢慢抓住某些數學家的眼光。如你前面所說的弗瑞，他提出的猜想聯繫了費馬最後定理與模性猜想。

答 | 弗瑞告訴我們如果取出某個費馬問題的一組解如 $a^p + b^p = c^p$ ，然後考慮橢圓曲線 $y^2 = x(x-a^p)(x+b^p)$ ，那麼這個曲線的判別式是一個完全 p 次方數。如果假設模性猜想成立，再加上另外一個稍強的猜想——塞爾（Jean-Pierre Serre）的 ϵ 猜想——也成立，將迫使前述橢圓曲線的層級 N 等於 1，這時對應的同餘子群等於 $SL_2(\mathbb{Z})$ 。但是上半平面 H 模去 $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用的商曲線虧格為 0，不可能有橢圓曲線作為商空間，因此根本不可能存在這樣的橢圓曲線。換句話說，費馬問題無解。

追尋證明

問 | 在這個時候，你開始走上自己的證明之路，因為當時已另有塞爾和李比特的關鍵結果，他們把其中的連結描述的更清楚。在這裡，我們想簡述之後的過程，畢竟這段故事你已經說了很多遍，甚至成為 BBC 紀錄片的焦點。

你曾經前往美國，先到哈佛大學，再到普林斯頓大學，並在那裡成為教授。當你聽到李比特的結果之後，就開始投入所有研究時間，想證明有理數半穩 (semistable) 橢圓曲線情況下的模性猜想。你孤獨從事這項十分艱鉅的研究，持續了七年之久。在這段期間，你還得維持普林斯頓教授的責任，並且還要教養年幼的小孩。

1993 年，證明似乎在望。最高潮是你回到英國，在牛頓數學科學研究所給了三場演講，宣告你完成費馬最後定理的證明。你受到同事數學家的讚揚，甚至全球媒體都對這項結果深感興趣，這對數學研究來說是很罕見的事情。

後來，你的文章投到聲望崇高的學術期刊，卻在六位審閱人的檢視下，發現你的證明中有一處不很明顯的缺口，把你重新打回尚未完成的階段。過了一陣子，你寫信邀請以前的學生泰勒 (Richard Taylor)，到普林斯頓幫你完成證明。這又多花了十個月的時間，其中充滿艱辛和挫折。如果稱此為龐大壓力下的英雄作為並不算誇張。最後你靈光一現，發現如果結合你之前的研究與新結果，就可以繞過造成缺口的問題。而那正是你的模性猜想所需的部分，足以證明費馬最後定理。

這一定是個大解脫！你可以為這段戲劇性的故

事再稍做評論嗎？

答 | 說起自己的研究，當我跟著寇茨工作，成為職業數學家時，就領會到我真的不該再研究費馬問題，因為它太耗費時間，而在過去幾百年，卻幾乎沒有什麼真正的結果。我也見到很多做這項研究的人下場悲慘，包括很優秀的數學家。當弗瑞的結果剛出來時，我其實有點懷疑塞爾的猜想。但是當李比特證明了塞爾猜想，我心想好吧！這就是了！

那是一段漫長而艱難的奮鬥。就某種意義而言，排除其他事情只專注於一個問題是不負責任的作法，但這就是我做事的方式。

費馬問題是一個狹隘的問題，針對的只是單一方程，它的解答可能有助或無助於其他研究。但是模性猜想的整體架構卻是數論的大問題，無論如何都值得一試，這正是絕佳的機會。

研究這類問題，需要花許多年真正的建立直覺，看出需要哪些材料，方程解依賴哪種東西。過程有點像要不斷丟棄你不能或無法成功的東西，直到你的心神足以集中到即使犯了錯誤，都能找出別條路徑到達終點，只因為你已經看過夠多的東西。

⑥ 譯註：模群就是 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 。亦即前述的

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

再把矩陣 A 和 $-A$ 等同

⑦ 譯註：*Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory. Tokyo & Nikko, September 1955(195), Science Council of Japan.*



從左至右：懷爾斯、勞森和史考，攝於訪談時。
(Eirik F. Baardsen 攝，DNVA。)

有趣的是，關於我最初證明中的錯誤，有人已經從原來的論證觀點繼續研究，並在最近證明的確可以提出非常相近的論證。事實上，考慮所有鄰近的案例，我原初方法所用的論證都成立，只有我這個唯一的情況似乎不成功。關於這一點，一直都沒有真正的解釋。也就是說，我嘗試運用的類似論證（歐拉系統等等）只有在我需要的費馬情況不成立，其他相近的情況卻都可以。這真的很反常。

問 | 你曾經形容模性定理的證明，是在一幢幽黑、未探查過的宅邸中旅遊。你可以詳細說明嗎？

答 | 剛開始，眼前真是一片黑暗。我對於模性猜想該如何運作或證明，沒有任何先見的洞識。這個問題的麻煩之一，是你甚至不知道解答的方法，該來自哪個數學領域。這有點像黎曼假說（Riemann Hypothesis）的情形，但嚴重程度可能更甚。

首先，表述這個問題的方式有三：幾何的、算術的，以及分析的。過去是分析學家先在這個問題取得進展，但是我自己幾乎完全不理解他們的手法。

我的運氣不錯。我的天生直覺就是採用算術方法，所以直接走上算術證明之路。但我其實有可能弄錯。畢竟模性猜想過去已知的唯一案例只有

複數乘法的情況，而且證明用的是分析手法，徹頭徹尾的分析證明。

一來是因為必要，二來是因為熟悉，所以我直接採用算術方法。結果我發現過去研究岩澤理論的方法，

在思考這個問題時很有用。我和寇茨曾經將岩澤理論用在橢圓曲線上。我在哈佛時，又習知梅哲（Barry Mazur）的研究，他當時正運用很多現代技術研究模曲線的幾何性質，我可以從中運用一些想法和技巧。後來，我意識到可以用這些來開始，找到研究這個問題的切入點。

問 | 在開始研究模性猜想之前，你和梅哲曾共同發表一篇論文，在有理數的條件下，證明岩澤理論的主要定理。請告訴我們岩澤理論的研究主旨。

答 | 岩澤健吉（Iwasawa Kenkichi）的岩澤理論源自庫默爾的分圓體（cyclotomic field）研究，以及他分析費馬最後定理的取徑。庫默爾研究質分圓體的算術性質，尤其是它的理想類群（ideal class group）。岩澤的想法是同時一起考慮所有的 p 次單位根（ p -power roots of unity），由此得到分圓體的塔系（tower，即一系列體擴張）。而岩澤理論的主要定理是證明底下——分圓體迦羅瓦群的一個生成元在 p 準質類群（ p -primary class group）的作用與 p 進 L 函數——兩者之間的關係。這和有限體曲線研究中運用的構造類似，其中弗羅畢紐斯自同態的特徵多項式（characteristic polynomial of Frobenius）和 ζ 函數有關連。

問 | 結果這些工具在你研究模性猜想時很有用？

答 | 是的，這些工具提供一個出發點。當時這並不明顯，我是玩味了一陣子，才領悟從這裡開始，可以走出一條路。

與阿貝爾的對照

問 | 我們想為你讀一段文字：「四面高牆築起，在最終的堡壘圍繞下，這個難題拼命的衛護自己。哪一位幸運的天才能領軍攻陷？或是迫它投降？」

答 | 這似乎是貝爾的文字，是嗎？

問 | 不是。這段文字出自法國數學家蒙度克拉（Jean-Étienne Montucla）寫的《數學史》（*Histoire des Mathématiques*），時間在 18 世紀晚期。這應該是史上第一本數學史著作。前述那段文字談的是五次方程的根式解到底是可解還是不可解。

阿貝爾在他 21 歲時，就證明一般五次方程沒有根式解。就數學而言，他的研究是在奧斯陸這裡全然孤獨完成的。阿貝爾全神貫注於這個問題，至少是極為沈迷。他剛開始也走錯路，以為自己可以證明五次方程有根式解。然後，他發現錯誤，最後找到不可解的證明。

當時，這個難題的年齡已經接近 300 年，而且非常知名。如果往後快轉 200 年，同樣這段文字也可以描述費馬問題，當你解決時也大約有 350 年歷史了。在很多方面，這兩段故事都能兩相對照，你有什麼看法嗎？

答 | 就某種意義，我真的覺得阿貝爾和迦羅瓦

（Évariste Galois，1811-1832）的成就，象徵代數學內的轉移，從簡單可解的方程轉移到沒有根式解的方程。這是源自五次方程的代數突破。

基於某種角度，數論現在的整個走向可說是從基本上可交換以及或許可解的體擴張，轉移到不可解的擴張。不可解的體擴張有什麼樣的算術性質呢？

我相信模性猜想的解決，是因為我們已經從原初的可交換情境轉移到不可交換的情境。我們持續發展工具，如模性概念等等，這些基本上都是非交換工具。我得釐清，雖然我整個證明是借用可解的情境出發，但並不是因為這樣做比較自然，而是在一般不可解的情況中，我們還未能解決相關的問題。

所以，數論的轉移類似於阿貝爾的代數轉移，提供了解決這個方程的工具。這兩段故事是相當可以並比的。

問 | 阿貝爾和費馬問題之間有一個諷刺性的轉折。

阿貝爾 21 歲時，曾到哥本哈根拜訪當時斯堪地那維亞的首要數學家德根（Carl F. Degen）。在一封給他奧斯陸數學老師洪勃（Bernt M. Holmboe）的信中，阿貝爾敘述了三項關於費馬方程的結果，但沒有給出證明，其中有一項其實並不易證明。當然，在今天這只是個有趣的結果罷了。

但是，在同一封信中阿貝爾表示挫折，提及他無法理解在將雙紐線（lemniscate）等分成 n 段的問題裡，為什麼他所得到的方程的次數是 n^2 ，而不是 n 。一直要等到返回奧斯陸之後，阿貝爾才發現雙紐線積分的雙週期性質，以及一般形式

的第一類橢圓積分。

深入想想，他在費馬方程的工作最後只是好玩。但是他在橢圓函數，以及暗示性的橢圓曲線的研究，結果卻成為解決費馬問題的有關工具。當然，阿貝爾對於這些和算術的牽扯毫無概念。這個故事告訴我們，數學的發展有時很神祕。

答 | 是的，的確是這樣。

研究風格

問 | 我們想請你談談一般數學家的工作風格，包括你自己的。戴森（Freeman Dyson）是普林斯頓高等研究院知名的物理學家和數學家，他曾在 2008 年的愛因斯坦講座中說：「有些數學家是飛鳥，其他的是蛙。鳥兒高翔天際，遍覽直至天際的廣闊數學遠景，他們所喜愛的，是能統攝我們的思想、將散布於地上各處的種種問題整合起來的概念。青蛙住在泥地裡，只能看到長在附近的花朵。他們喜愛特定事物的細節，一次只解決一個問題。」¹⁰

戴森並沒有說鳥比蛙高明，反之亦然。他認為自己是蛙，而不是鳥。

當我們檢視你的研究，覺得似乎很難把你安置在他的分類架構裡：到底是創造理論的鳥，還是解決問題的蛙。你自己認為呢？

答 | 我也覺得很難。我當然不是統合不同領域的鳥。而我認為的蛙則是到處亂跳，但我自認非常非常專一。我不知道該拿什麼動物來做類比，但不是喜歡近旁風景的蛙。對我遇到的問題，我會非常非常專注，而且我對問題很挑剔，甚至很難

分出一點心去看看周遭的花朵。所以我不認為這兩種描述方式適合我。

問 | 基於你的個人經驗，能否請你描述底下兩者的互動關係：一邊是刻苦、專注、堅忍不拔的工作，另一邊是彷彿無中生有的靈光閃現，後者通常會出現在比較放鬆的狀態。你的內心一定無意識的處理著你手邊的問題，是嗎？

答 | 我所做的是進入一種境地，非常清楚的理解一個或甚至多個理論，其中所有視角都已檢視過，也嘗試過非常多彼此互異的途徑。

在做準備的階段，工作的份量非常巨大，你得了解所有細節，也許還需要一些範例，這是你最起碼的研究出發點。如果這一切都發展完成，那麼心靈就可以放鬆。然後。到了某個時候，也許是你離開去做點別的事情再回來時，突然之間，一切就清清楚楚。為什麼你過去沒有想到呢？你的心為你完成一切，那就是靈光一閃的時刻。

我還記得一件事，那是一個非數學的普通例子。有次，某人展示某種字體給我看，那是某款歌德體（Gothic script），看得我一頭霧水。我試著去解讀一些字，最後放棄了。半個鐘頭後我回來，結果我突然全部讀懂了。你的心靈用某種方式在協助你，我們真的不知道為何會如此。但我們確實知道必須先做什麼，才能塑造出它得以發生的條件。

問 | 有一段關於阿貝爾的軼事：當他在柏林時，和一些挪威的非數學家朋友合住一間公寓。其中一個朋友說，阿貝爾經常在半夜醒來，點亮蠟燭，



懷爾斯 1995 年攝於費馬出生地。(Klaus Barner 攝，維基)

寫下他乍醒時腦中的想法。很顯然，他的心在睡覺時仍然保持運作。

答 | 是的，我也是這樣。只是我不需要在醒過來時寫下來，因為我知道自己不會忘記。但是我很害怕當我快入睡時卻冒出好點子，怕我醒來時忘了這個想法，因此這時我得把它寫下來。

問 | 你的數學思考所憑藉的是公式、幾何圖像，還是其他東西？

答 | 不真的是幾何圖像，而是模式，是我以前見過的和我正在面對的情境之間的對照。假設世界很完美，那麼這些模式意指什麼，考慮什麼是證明必須的素材，我口袋裡還有什麼東西還沒用到，但有時也會很絕望。我彙整了我所有的全部證據，我有的一切，我必須由此開始，別無他途。

我常覺得做數學好像松鼠。在某棵參天大樹的頂端有一些核果，但是林裡有一些樹，你不知道哪一棵才是對的。你能做的就是爬上一棵，再想

一想，不，這棵看起來不對勁，於是衝下來再爬另一棵。你的整個人生就這樣上上下下，而且至多只爬高到 30 英尺。現在如果有人告訴你，剩下的樹都不對，只剩下一棵。那麼你就會甘心一直往上爬，直到找到為止。就某種意義來說，排除錯誤的東西是真正的關鍵。如果你相信自己的直覺，而且直覺是對的，你擇善固執於你的那棵樹，最後就會找到它。

數學中的問題

問 | 克萊恩 (Felix Klein) 曾經說過：「數學的發展，是用新方法與洞識重新理解與闡明舊結果。相應的理解越適宜而深刻，新問題就會自然產生。」希爾伯特 (David Hilbert) 強調：「問題是數學的命脈。」你同意這些說法嗎？

答 | 我當然同意希爾伯特的說法，好問題是數學的命脈。你可以從上世紀後半葉的數論發展，清楚看到這一點。就我個人來說是模性猜想，當然還有整個朗蘭茲綱領 (Langlands Program) 與 BSD 猜想。這些問題提供非常清楚的焦點，給我們嘗試的目標。另外的例子還有曲線與有限體解形 (variety) 上的威伊猜想，以及摩岱爾猜想 (Mordell conjecture) 等等。

這些問題多少集中了我們的心神，簡化了數學發展的目標。不然，我們的走向可能非常非常的漫無邊際，不確定什麼有價值，什麼沒價值。

⑩ 譯註：這篇講稿後來因故未宣讀，請見〈鳥與蛙〉（《數理人文》第二期）。

問 | 我們今天也有像 1990 年希爾伯特 23 問題那樣的好問題名單嗎？

答 | 我覺得有，對。

問 | 你覺得哪個問題在今天是最重要的。朗蘭茲綱領在其中的地位如何？

答 | 這樣說吧。和我研究領域相關的，朗蘭茲綱領是最開闊的問題譜系。而就我能理解的範圍來看，黎曼假說則是獨一無二最巨大的問題。有時原因很難說明清楚，但我確實相信解決這個問題，足以協助解決許多其他問題。另外，當然我自己對 BSD 猜想情有獨鍾。

問 | 不過直覺有時會讓人誤入歧途。例如希爾伯特就認為在他有生之年，可以見到黎曼假說被解決。反之，希爾伯特從未想過他名單上的第七問題會在他生前解決，但葛爾馮德（Alexander Gelfond）1934 年解決了這個問題，所以直覺也可能會犯錯。❶

答 | 這當然。我並不訝異希爾伯特這麼想。黎曼假說的敘述如此清楚，又有在函數體框架下的類比。我們已經理解在函數體為何正確，因此覺得應該能夠將研究方法轉譯過來。當然，很多人屢試屢敗。但至少我個人期待黎曼假說會比 BSD 猜想更早解決。

投資數學

問 | 希望我們有生之年可以知道答案！

粗略而言，古典數學有兩個根源，一是來自物理科學，另一個，簡而言之，來自數的理論思考，

也就是和應用無關的數論。

但現在情況已經改變，例如你的橢圓曲線領域，已經應用於密碼學和安全技術。今天，人們已經應用橢圓曲線賺錢！另一方面，除了物理之外的許多科學領域，也善用數學思考與數學結果而獲益。今日的工業發展則經常依賴數學模型與最優化方法。同時，科學界和工業界也向數學世界提出挑戰。

就某種意義，數學已經比以前變得更加應用。有人問這對純數學是否造成問題。表面上看來，純數學有時會被擺到一旁，至少從經費審查單位的立場是如此。你認為這是一個嚴重的問題嗎？

答 | 比起過去，有人覺得兩、三百年前的數學家有能力處理更寬廣的數學領域，其中許多會碰觸到應用數學，遠比今日典型的純數學家多。但是從另一方面看，這或許只是因為我們只記得過去最優秀、最多才多藝的數學家。

一旦經費審查單位眼光短淺，總會造成問題。如果他們希望三年看到結果，這是不可能的。很難想像一項純數學的發展再加上應用能夠在三至五年內完成，很可能根本做不到。

另一方面，缺乏純數學的支撐，我不相信我們能擁有一個運作愉快的應用數學世界。既能提供願景，又能長保誠實。因此不投資純數學是非常愚蠢的看法。

這有點像是只投資眼前可見的能源。我們必須投資未來，因此得投資核融合能（fusion power）、太陽能或其他這類能源。你不能完全只用可見能源，等用光後才開始擔心下一步。數



沃夫思凱爾。(維基)

學也一樣，你不能只使用現有的純數學，等到需要一個新純數學結果來生成應用時，才開始煩惱。

而你得獎的時間是 1997 年。不過在當時，獎金已經因為德國一次世界大戰後的惡性通貨膨脹而大幅縮水了。

數學獎

問 | 基於你的成就，尤其是費馬最後定理的證明，你獲得很多獎項。包括瑞典皇家科學院頒與的夏克獎（Rolf Schock Prize）、在丹麥頒給你的奧斯特婁斯基獎（Ostrowski Prize）、法國的費馬獎、以色列的沃爾夫獎、香港的邵逸夫獎（曾被稱為東方的諾貝爾獎），名單很長，最後是明天要頒發的阿貝爾獎。我們想請教你是否喜歡這些獎項以及隨之而來的美譽。

答 | 我必須說我愛這些。我認為這是對數學的禮讚。像費馬這類故事，有些人會很高興生前可以看到結果。若能看到黎曼假說被解決，我一定非常高興。我會很興奮看著它最終如何被解決，了解故事的結尾。畢竟有太多這類故事，我們到死亡時也看不到終局。所以每當看到這類故事有結果，我們自然而然會想慶祝。就我的情形，我是從貝爾的書得知費馬問題，以及屬於它的沃夫思凱爾獎。而且我發現沃夫思凱爾獎還在，離這個獎過期的截止日還有一段時間。

問 | 這樣剛好可以順便談一下這個獎。這是 1906 年由沃夫思凱爾（Paul F. Wolfskehl）設立的獎項，他是一位對數學感興趣的德國醫生。沃夫思凱爾遺捐十萬帝國馬克（Reichmark，比今天的一百萬英鎊還多），頒給第一位證明費馬最後定理的人。根據遺囑，這個獎將在 2007 年 9 月 13 日失效，

答 | 對我來說，獎金多少並不重要。沃夫思凱爾獎縈繞我心的那種感情才是重要的。

研究生

問 | 你到目前總共有 21 位博士生，吸引了很多很有天分的學生，有些真的很傑出。其中之一就是獲得 2014 年費爾茲獎的巴噶瓦（Manjul Bhargava）。作為這些學生的指導老師一定很愉快。

答 | 是的。但我可不想把太多功勞攬在自己身上。像巴噶瓦，我只是提一個問題給他，但之後就和他的進展沒有太大關係。結果他做出那些全然不可思議的發現。某種意義上，如果你有非常聰穎的學生，會得到更多的讚譽。但是事實是，非常聰穎的學生並不需要太多協助。

問 | 請你談談和研究生的典型互動。

答 | 我想研究生時期最難以學習的，是認識到之後你必須在職涯上持續下去，而選擇研究問題是困難的。所以如果我只是指定一個問題，由他們把問題解出來，就某種意義來說收穫並不大。他們的確解決了那個問題，但困難的是，他必須離開去尋找其他問題！所以我比較喜歡和他們一起做決定。

① 譯註：希爾伯特第七問題：如果 a 是非 0 或 1 的代數數， b 是非有理數的代數數，是否 a^b 是超越數？

我會給他們一些剛開始的想法，以及可以考慮的數學領域，而不是十分聚焦在問題上。這樣等他們開始研究並成為專家時，可以更妥當的清楚掌握到合宜的問題，進入選擇問題的研究路程。我想這對他們的未來是更好的投資。當然事情不總是照這樣運作，有時候你給他們的初始問題，最後證明就是正確的問題。但是通常事情並非如此，而是一個尋找正確問題的過程。

嗜好與興趣

問 | 每次阿貝爾獎訪談的最後，我們都會詢問得獎人，平常不做數學時喜歡做什麼。你在數學之外有什麼嗜好與興趣？

答 | 這因時而異。當我研究費馬問題時，同時也是撫育幼兒的父親，光這兩件事就耗掉我所有精力。其他時候，我喜歡閱讀，像是各種文學作品、小說、傳記，平衡得很好。我沒有其他專心著迷的東西。我讀書時，是棋隊和橋牌隊的一員。不過在我開始做嚴肅的數學研究之後，就對這些完全失去興趣。

問 | 那麼音樂呢？你喜歡音樂嗎？

答 | 我會去聽音樂會，但是自己不太懂任何樂器。我喜歡聽音樂，尤其是古典音樂。

問 | 除了數學之外，你對其他科學感興趣嗎？

答 | 多多少少。我用這些來放鬆心情，所以不喜歡離數學太近的題材。如果是動物行為、天文物理，或其他以定性觀點描述的課題，我當然很喜

歡學習。類似的還有機器設計的進展，以及其他多種科普主題。但是我不會花時間去學習弦論的理論細節。我太專心，所以不想做這類事情。並不是我沒有興趣，但這是我的選擇。

問 | 非常感謝你，這是一次非常精彩的訪談。除了我們自己，我們也替挪威數學學會、丹麥數學學會，還有歐洲數學學會向你致謝。謝謝！

答 | 謝謝你們！☺

本文出處

本訪談進行於阿貝爾獎頒獎前夕（2016年5月23日），地點是奧斯陸。本文最先刊載於歐洲數學學會的 *EMS Newsletter*, Nov. 2016，本刊感謝作者與歐洲數學學會同意轉載翻譯。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。他要感謝中研院數學所謝明倫熱心幫忙審閱譯稿。

延伸閱讀

► PBS 的 NOVA 系列專頁：The Proof。裡面有圍繞著懷爾斯與費馬問題的許多科普文章、網路連結與影片連結。

<http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/>

► 底下阿貝爾獎網頁，有一些懷爾斯與費馬問題的書面資料：

<http://www.abelprize.no/c67107/seksjon/vis.html?tid=67108>

2016 年阿貝爾獎網頁，其中包括懷爾斯的公眾演講錄影，5/25 的阿貝爾獎講座訊息，包括三場學術演講（講者：懷爾斯、Henri Darman、巴噶瓦）的錄影，另外還有一部介紹懷爾斯的短片，以及本次訪談的全程錄影。

<http://www.abelprize.no/c67534/seksjon/vis.html?tid=67535>

► 2017 年 3 月的 *Notices* 提供懷爾斯專頁，除了轉載本次訪談，還刊出 Darman 介紹懷爾斯證明的阿貝爾演講，他的合作夥伴談懷爾斯的研究。另外還有 *Notices* 曾刊登的 13 篇相關文章列表。

網址：<http://goo.gl/y0KkzV>

► 克累研究所千禧年大獎問題之一：伯奇／斯溫諾頓戴爾猜想網頁。其中有懷爾斯對他鍾愛的這個猜想的介紹。

<http://goo.gl/hqogme>