

蒙特卡羅法之應用

(一)簡單問題之計算

The Applications of Monte Carlo Method

Part I: Calculation of Simple Problems

陳雲宗、顏守謙、葛必昭

交通大學電子研究所

摘 要

本文之目的在於介紹蒙特卡羅法之原理及其在計算機方面之應用。先以求 π 及求定積分為例，說明蒙特卡羅法模擬問題之原理，步驟及其性質，次以解或然率問題而示其優點。最後對長龍問題作有系統之研究，文中各例題均寫成計算機程序計劃並用交大計算機中心之 IBM 1620 電子計算機加以計算。

1. 緒 論

蒙特卡羅法一詞始用於1944年。然其原理之應用則早在十九世紀二十年代。如以 Buffon 投針實驗求圓周率之值。一九〇四年，Student 利用樣品抽樣法以求相關係數之分佈及其他統計分析，其構想亦與蒙特卡羅法同。至於蒙特卡羅法當作研究工具則在二次大戰期間用於製造原子彈。

1948年 Fermi 等利用於估計 Schrödinger equation 之 Eigenvalues。自1950年起，此法之研究及應用更為普遍，數值分析無法解決之問題大部份可用此法加以分析及估計。由於抑抵變異係數法之改進，蒙特卡羅法在解決實際繁雜問題之應用上，諒可建立新的里程碑。

蒙特卡羅法係實驗數學之支門，以亂數(random numbers)表實際問題之亂現象(random phenomenon)而由亂數之性質以求實際問題之解答。其應用甚廣，可用於解決科學及工程各方面之問題包括化學，生物學及醫學等。近十年來更廣用於核子物理及政策研究(Operation Research)等各方面。然就其解決問題之性質可分為Probabilistic problem與deterministic problem兩類。前者係以亂數直接模擬原題之實際變化過程，藉亂數變化之特徵以求解。如核子反應爐及電話系統之設計研究等。吾人可以選亂數直接代表核子反應爐內之中子，由亂數之變化來模擬中子在核子反應爐內不規則之變動，而得知整個核子反應爐之實際反應情況。進而設計其實際構造。後者係解決很難以理論方式求解之理論關係式。蒙特卡羅法不能直接應用於此類問題，而需以間接方式模擬，如電磁理論方面，解附有邊界條件之 Laplace Equation等。

本文先介紹亂數產生器，次以求 π 及求定積分為例說明用蒙特卡羅法模擬問題之原理，方法及步驟，再以可能率問題為例，說明此法之優點，最後以此法研究長龍問題。

2. 近亂數產生器(Pseudo Random Number Generator)

利用蒙特卡羅法以解實際問題，是以亂數之變化代表亂現象之變化過程，故亂數之變化均勻與否，直接影響答案之準確性。亂數之產生法很多，簡便而適用者為近亂數產生器，其產生亂數法如下：先選適當兩數A，B及任一亂數 X_0 ，以 X_0 乘以A，再除以B，其餘數即為第一亂數 X_1 ，次以第一亂數 X_1 乘以A，再除以B，可得第二亂數 X_2 ，重複這些步驟，可得一亂數數列。若以 X_i 表第i個亂數， X_{i+1} 表第i+1個亂數，則上述之計算可以下式表之：

$$X_{i+1} = AX_i \pmod{B}$$

如令

$$A=5, B=17, X_0=1, \text{則}$$

$$5 \times 1 = 0 \times 17 + 5$$

$$5 \times 5 = 1 \times 17 + 8$$

$$5 \times 8 = 2 \times 17 + 6$$

⋮

$$5 \times 15 = 4 \times 17 + 7$$

$$5 \times 7 = 2 \times 17 + 1$$

$$5 \times 1 = 0 \times 17 + 5$$

其數列為：1, 5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1, 5, 8, ……其週期為16，蓋因除數17之餘數必小於17，而5與17互質，其餘數當不為0，故亂數在1至16之間，其出現不按順序而形成一亂數。

亂數之好壞，取決於A，B及 X_0 之選擇。整數論中曾述及如何取A，B及 X_0 才能得到理想的亂數，如吾人欲產生十位之理想亂數則取 $A=3^{19}$ ， $B=10^{10}$ ， $X_0=A$ ，其前100個亂數如下：

7672992089	1640534563	7856583921	3630072107	2397600969
9510561523	7715734241	7926791547	2019419449	1283071683
6549738961	3278915787	2768079529	4148209043	7739846081
0457260827	9590653209	8180597603	0999463601	1111362667
3716452489	1900941363	7241359521	9951877307	8237829369
7309624323	8868861841	3940980747	4426975849	4632310483
7571058561	9850768987	3908723929	7817543843	5301997681

2749658027	2209345609	8626348403	9723887201	3176783867
7601352889	9953828163	2994295121	9964402507	5564297769
7822767123	2377349441	8868289947	3581572249	6289229283
2758938161	4366142187	3393208329	0300158643	4745909281
3183975227	8224678009	8342979203	7629270801	3310525067
0911693289	9527194963	4091390721	1459647707	5241006169
8537989923	3137197041	5140719147	7227208649	6701828083
9329377761	2697035387	5445532729	8204053443	0007580881
5872212427	9940650409	7298490003	7771614401	4664586267
7631473689	5149041763	3108646321	3429612907	8531954569
3743292723	1644404641	0390268347	1507885049	9118106883
2098377361	9915448587	0689697129	6937228243	4623012481
8126369627	4061262809	0260880803	4806918001	7590967467

表 一

依此法所得之亂數介於1與 $10^{10}-1$ 之間，唯其間所有數並非全部出現。由上表得十位亂數個位數之週期為4，十位數為20，百位數為100，即十位數之週期為個位數之五倍，百位數之週期為十位數之五倍，如此類推，最高位數之週期為500,000,000故僅取前幾位，則亂的程度很理想。此法係利用兩數相乘，故速度較慢，如用IBM 1620計算，則每一亂數需19ms，即每秒鐘可得50個亂數，如每日計算24小時，欲得全部五萬萬個亂數，則需100日以上。如令 $A=2$ ，則 $AX_i = X_i + X_i$ ，上述乘法即變為加法，可節省很多時間。如取適當的質數 B ，則可得週期為 $B-1$ 之理想亂數。但如 X_i 不太大則 $2X_i$ 也不會太大，而 B 很大時，則所得亂數不會太理想。這種困難可以Gruenberger and McCracken法解決，即令 $A=2$ ， $B=999,999,883$ 求得 X_i ，再以 $A=2$ ， $B=999999893$ 求得 Y_i ，再以 X_i ， Y_i 加於 S_{i-1} 得亂數 S_i ，結果尚滿意，其詳細求法如下：

DORG 16000,RANDOM NUMBER GEN.

```

START  A    RNGX,RNGX
        C    RNGX,RNGP
        BL   *+36
        S    RNGX,RNGP
        B    START+12
        A    RNGY,RNGY
LOOP    C    RNGY,RNGQ
        BL   *+36
        S    RNGY,RNGQ
        B    LOOP
        A    RNGS,RNGX

```

```

A    RNGS,RNGY
TDM  RNGS-10,0,11
WNTY RNGS-9
B    START
RNGP DC 9,999999883
RNGQ DC 9,999999893
RNGX DC 10,162261467
RNGY DC 10,111111111
RNGS DC 11,0,16250
      DC 1,@,16251
DEND START
    
```

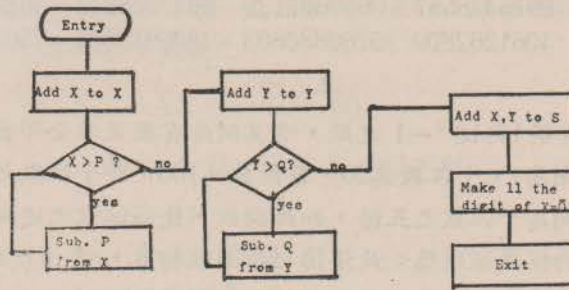


圖 一

3. 數 值 積 分

(a) π 值的計算：

求圓周率 π 值的方法很多，最早的方法是 Buffon投針實驗，即於地上劃多條相距 l 之平行線，再以長為 l (與平行線距等)之針投於地上。

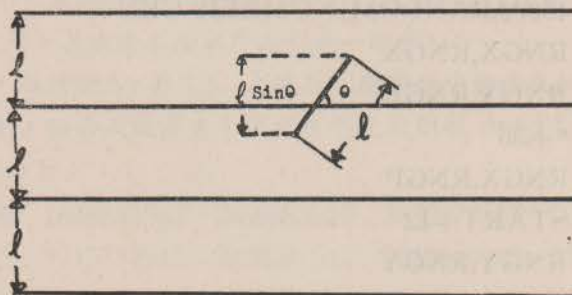


圖 二

假設此針與平行線所成之角度為 θ ，則此針投於地上與平行線相交之或然率為：

$$\frac{l \sin \theta}{l} = \sin \theta \dots\dots\dots (3.1)$$

θ 為由 0° 到 180° 之間的任意值，因此其平均或然率為：

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \dots\dots\dots (3.2)$$

現假設投針 n 次於地上（投在平行線之外者不算），而與平行線接觸之次數為 S_n ，則 S_n/n 之數值幾近於 P ，即

$$\frac{S_n}{n} \doteq \frac{2}{\pi} \dots\dots\dots (3.3)$$

因此可得

$$\pi \doteq \frac{2n}{S_n} \dots\dots\dots (3.4)$$

當然 n 的數值愈大， π 的準確度愈高。此 Buffon 投針實驗法或許很笨，但却為研究蒙特卡羅法之先例。

第二方法可由數值分析法中的級數解得，如

$$\tan^{-1} X = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + \frac{X^9}{9} - \frac{X^{11}}{11} + \dots\dots\dots (3.5)$$

如令 $X=1$ ，則

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots (3.6)$$

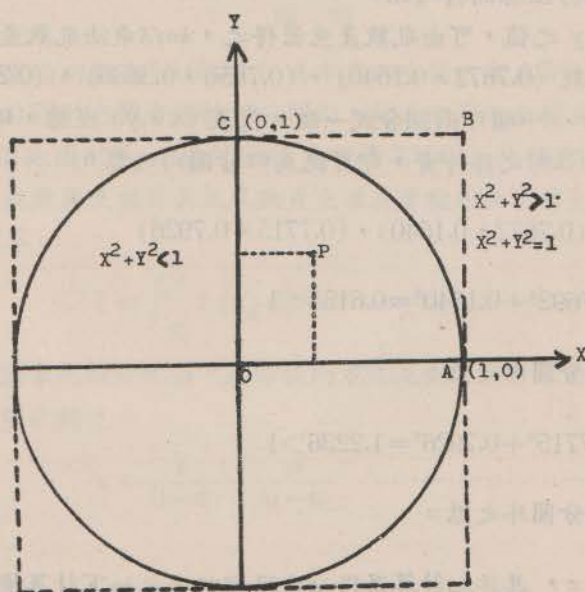


圖 三

$$\therefore \pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots) \dots (3.7)$$

故計算此級數即可得到 π 值。然如欲用蒙特卡羅法求 π 值最方便的是求圓的面積，由幾何學得知圓的面積為 πr^2 (r 為半徑)，如半徑 r 為1，則圓的面積為 π ，現在假定不知 π 值，而用蒙特卡羅法求之。

將圓四等分，作一四分圓，作邊長為1之正方形O ABC 包圍此四分圓，然後無規律地以箭射此正方形，若打中正方形之箭數為 N ，射中四分圓之箭數為 n ，如 N 數够大時，則箭數比 n/N ，約等於四分圓與正方形面積之比，即

$$\frac{n}{N} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1}$$

$$\therefore \pi = \frac{4n}{N} \quad (N \text{ 很大}) \dots (3.8)$$

上述在正方形中無規律射箭，實際上可利用亂數照下面方法去做。
令正方形內 P 點之座標為 (x, y) ，則當

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0) \dots (3.9)$$

時， P 點即在四分圓內，若 $x^2 + y^2 > 1$ ，則在四分圓外，所謂 P 點即是無規律射出的箭，也就是亂選 x 與 y 座標而得之點。

此等亂定 x, y 之值，可由亂數產生器得之，如以乘法亂數產生器為例，取小數點以下四位之亂數 $(0.7672, 0.1640)$ ， $(0.7856, 0.3630)$ ， $(0.2397, 0.9510)$ ， $(0.7715, 0.7926)$ ，……順序兩個合成一組，代表 (x, y) 座標，則可決定 P 點之位置，這些點中合乎(3.9)之條件者，即可視為四分圓內之點。

例如： $(0.7672, 0.1640)$ ， $(0.7715, 0.7926)$

$$\text{因 } 0.7672^2 + 0.1640^2 = 0.6155 < 1$$

故為四分圓內之點。

$$\text{因 } 0.7715^2 + 0.7926^2 = 1.2236 > 1$$

故為四分圓外之點。

利用蒙特卡羅法求 π ，其詳細計算過程以流程圖四表之如下計算機程序計劃如附錄一。

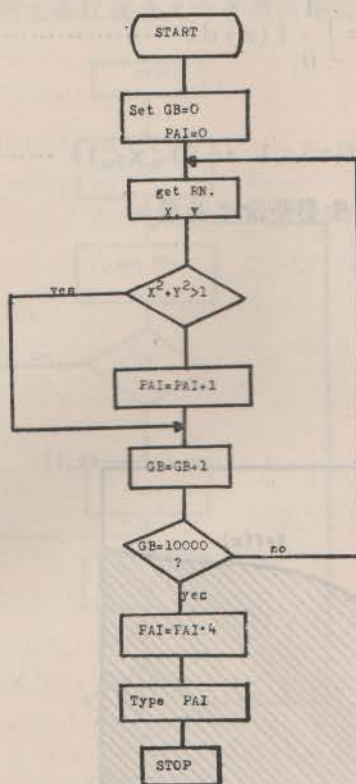


圖 四

在計算中，實驗回數為 10,000 次，其中在四分圓內者為 7891 次，在四分圓外者為 2109 次，即有 0.7891 之機會落於四分圓內，故正方形之面積為 1 時，則四分圓之面積為 0.7891，因此圓周率 π 之值依 (3.8) 式可得 3.1564，此值與真值 3.14159……稍有差異，蓋因近亂數產生器非真正亂數產生器及實驗回數不够大所致。

(b). 定積分之運算。

$$I = \int_a^b f(z) dz \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

用蒙特卡羅法求定積分之值，最方便的方法是先將積分限由 a 至 b 變成 0 至 1，這點可由下列變數變化得之。

$$x = \frac{z}{b-a} - \frac{a}{b-a} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

故 (3.10) 變為：

$$I = \frac{1}{b-a} \int_0^1 f(x) dx \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

013	.8237	.6784	.7309	×	-	063	.3012	.0907	.8776	×	-
014	.8868	.7864	.3940	○	06	064	.1884	.0354	.4348	×	-
015	.4426	.1958	.4632	×	-	065	.8550	.7310	.6953	○	23
016	.7571	.5732	.9850	×	-	066	.3496	.1222	.7302	×	-
017	.3908	.1527	.7817	×	-	067	.5249	.2755	.2523	○	24
018	.5301	.2810	.2749	○	07	068	.4059	.1647	.6580	×	-
019	.2209	.0487	.8626	×	-	069	.8332	.6942	.1278	○	25
020	.9723	.9453	.3176	○	08	070	.6180	.3819	.5568	×	-
021	.7601	.5777	.9953	×	-	071	.4087	.1670	.5585	×	-
022	.2994	.0896	.9964	×	-	072	.7441	.5536	.0107	○	26
023	.5564	.3095	.7822	×	-	073	.8730	.7621	.1179	○	27
024	.2377	.0565	.8868	×	-	074	.2610	.0681	.4321	×	-
025	.3581	.1282	.6289	×	-	075	.5600	.3136	.2869	○	28
026	.2758	.0760	.4366	×	-	076	.9756	.9517	.3615	○	29
027	.3393	.1151	.0300	○	09	077	.7813	.6104	.4192	○	30
028	.4745	.2251	.3183	×	-	078	.3951	.1561	.3404	×	-
029	.8224	.6763	.8342	×	-	079	.3890	.1513	.2869	×	-
030	.7629	.5820	.3310	○	10	080	.7830	.6130	.7324	×	-
031	.0911	.0082	.9527	×	-	081	.2284	.0521	.6681	×	-
032	.4091	.1673	.1459	○	11	082	.5899	.3479	.7896	×	-
033	.5241	.2746	.8537	×	-	083	.7118	.5066	.3225	○	31
034	.3137	.0984	.5140	×	-	084	.9066	.8219	.5799	○	32
035	.7227	.5222	.6701	×	-	085	.1860	.0345	.1780	×	-
036	.9329	.8703	.2697	○	12	086	.7479	.5593	.1104	○	33
037	.5445	.2964	.8204	×	-	087	.0064	.0000	.6322	×	-
038	.0007	.0000	.5872	×	-	088	.3342	.1116	.1042	○	34
039	.9940	.9880	.7298	○	13	089	.2670	.0712	.5539	×	-
040	.7771	.6038	.4664	○	14	090	.0997	.0099	.4059	×	-
041	.7631	.5823	.5149	○	15	091	.9811	.9625	.8465	○	35
042	.3108	.0965	.3429	×	-	092	.9157	.8385	.9120	×	-
043	.8531	.7277	.3743	○	16	093	.1440	.0207	.3201	×	-
044	.1644	.0270	.0390	×	-	094	.9750	.9506	.2414	○	36
045	.1507	.0227	.9118	×	-	095	.5476	.2998	.0934	○	37
046	.2098	.0440	.9915	×	-	096	.9481	.8988	.0840	○	38
047	.0689	.0047	.6937	×	-	097	.4628	.2141	.8322	×	-

048	.4623	.2137	.8126	×	-	098	.3766	.1418	.2805	×	-
049	.4061	.1649	.0260	○	17	099	.3373	.1137	.8053	×	-
050	.4306	.2309	.7590	×	-	100	.8337	.6950	.2127	○	39

表 二

表(二)表示其計算結果， N 為試驗回數， $RANX$ 為取出二亂數中的第一個亂數，代表 x ，將 x 代入 $f(x)$ 則得 $F(x)$ 之值， $RANY$ 為第二個亂數， $RANY \leq F(x)$ ，以0表示， $RANY > F(x)$ 則以 x 表之。 SN 代表 $RANY \leq F(x)$ 之回數，即落於陰影部份之面積。在試驗100次中，共有39次落於陰影部份，故其面積約為0.39，而其值為0.333……，其誤差係因亂數產生器所產生之亂數不均勻及試驗回數不夠大所致。如試驗回數增至1000次則其結果為0.327，誤差顯然減少了。如試驗回數增至10,000次，則其結果為0.3371，誤差更小。

實際因亂數的分佈並不很均勻而試行回數不可能為無窮多。故所得之近似值不能無限接近真值。但在工程上只要所得結果在某限定信賴度以內即可適用。現在在 N 次試驗中有 S 次滿足(3.15)式之條件，則 S/N 為相對度數，取 X 為亂變數(random variable)，當各組 (x, y) 滿足(3.15)式時，其值為1，否則為0，設在 N 回試驗中所得 x 亂變數之值之數列為

$$x_1, x_2, \dots, x_N \quad (x_i = 0 \text{ 或 } 1)$$

則

$$Z_N = \frac{S}{N} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) \dots\dots\dots (3.19)$$

Z_N 之平均值及其變異數可用中心極限定理(Central Limit Theorem)算出。其結果如下：

$$E(S/N) = E(Z_N) = I$$

$$\sigma_{S/N}^2 = \sigma_{Z_N}^2 = \frac{1}{N} I(1-I)$$

$$\text{故 } \sigma_{S/N} = \sqrt{\frac{1}{N} I(1-I)} \dots\dots\dots (3.20)$$

如(3.18)式之計算，當 $N=100, 1000, 10000$ 時其平均值及標準離差如下：

N	I	σ_I
100	0.39	0.0488
1000	0.327	0.0148
10000	0.3371	0.0047

如 N 固定，則(3.20)式之極大值為當 $I=\frac{1}{2}$ 時，故(3.20)式為：

$$\sigma_{Z_N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \dots\dots\dots (3.21)$$

如吾人欲標準離差 σ_{z_N} 在某值以下，則可得最少之相對試驗回數。

σ_{z_N}	N
0.1	25
0.05	100
0.01	2,500
0.005	10,000
0.001	250,000

以此方法求積分，在一重積分幾乎無何意義，因有關其近似之便利公式已有很多，如Simpson's Rule, Weddle's Rule, Gaussian Quadrature Method等。唯在求多重積分上，則蒙特卡羅法具有甚大的意義。例如想求

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{20}}^{b_{20}} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}) dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{20}$$

之值時，即使各積分限分成9等分得10點（分割不夠細），使適用於普通之近似積分公式，則20個座標便成 10^{20} 點，就用高速計算機也不能計算，然在此情況下公式(3.20)仍能成立，即使 $N=10^4$ ，(3.20)式仍為 $\sigma_{S/N} \leq 0.005$ ， $\frac{S}{N}$ 之值十分穩定，故利用蒙特卡羅法求多重積分非常實用，此項在第二部份中再加以詳細討論。

4. 或然率問題之計算

某件事之發生（設其發生可能率為 P ），若用蒙特卡羅法加以模擬，則其最簡便方法為取一亂數（設小數點在亂數最左邊）與 P 比較之，若此亂數小於 P ，則吾人可說此事件已發生，否則不發生。因亂數係均勻分佈於0與1之間，故產生小於 P 之亂數之或然率為 P 。若有三事件 A, B, C ，其發生之或然率各為 P_A, P_B, P_C ，其關係為 $P_A + P_B + P_C = 1$ ，則蒙特卡羅法之模擬如下：產生一亂數，先將此亂數與 P_A 比較，若小於 P_A ，則謂 A 事件已發生。若大於 P_A ，則再與 $P_A + P_B$ 比較，如此亂數小於 $P_A + P_B$ ，則謂 B 事件發生，如大於 $P_A + P_B$ ，則謂 C 事件發生。由此法可引伸為各種形式。

(a) 從自然數中重複任取五數字，試問此五數字彼此不同之或然率為何？

此問題之模擬方法甚多，其較便者，為由亂數產生器產生器產生 n 個亂數，統計其中每個亂數前五位數字完全不同之數 S_n ，則 S_n/n 為所求之或然率。

採用 IBM 1620 電子計算機，亂數產生器用 Gruenberger and McCracken Method，程序計劃如附錄三，取亂數 $n=10,000$ 。得到前五位數字完全不同者 $S=3056$ ，則可估計其或然率為 0.3056 ，當然此值不等於真正的或然率，根據方程式(3.20)，可獲得其偏差為： $\sigma_{S/N}=0.0046$ 。此問題之實際答案為 0.3024 。由蒙特卡羅法求得之值與真值之偏差可用以檢定亂數產生器之亂的程度。

(b) 一賭徒袋中有3元，前往賭場碰運氣，他每次下注1元，若勝，則贏1元，否則輸一元，當他袋中有5元（即贏了2元），或是輸到袋中沒有錢時，則離開賭場，根據統計，下注1元能贏回1元之或然率為0.35，試問：(a) 此賭徒贏到袋中有5元之或然率為何？(b) 此賭徒在離開之前平均下注幾次？

此題屬於亂步 (Random Walk) 問題。最初賭徒袋中有3元，下注後可能剩下2元，或增為4元，再下注後，可能由2元變成1元，或還原為3元，如此不斷下注，一直到賭徒袋中之錢數為0元或5元才停止。若以蒙特卡羅法模擬之，可先假設一數值 $M=3$ ，然後取一亂數與 0.35 比較，若前者小於後者，則由 M 中減去 1，否則加 1，當 M 等於 0 或 5 時，就算此賭徒玩一次。但如果僅模擬一次則無從獲得答案，因此須再假設賭徒袋中又有 3 元，不斷玩下去。其詳細模擬過程如圖七之流路圖所示。

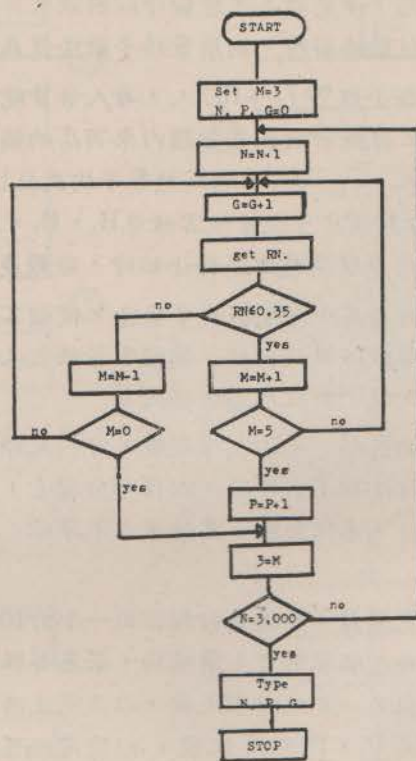


圖 七

設此賭徒玩了1000次，利用附錄四之程序計劃由計算機完成之，得知此賭徒玩1000次中贏（即袋中有5元）261次，共下注5911次，則答案為(a)，此賭徒贏到袋中有5元之或然率為 0.261，(b). 賭徒在離開之前平均下注 5.911次，此數值與理論推得之數值 0.256 甚為相近，其誤差在可容忍範圍以內。

5. 長龍問題(Queing Problem)

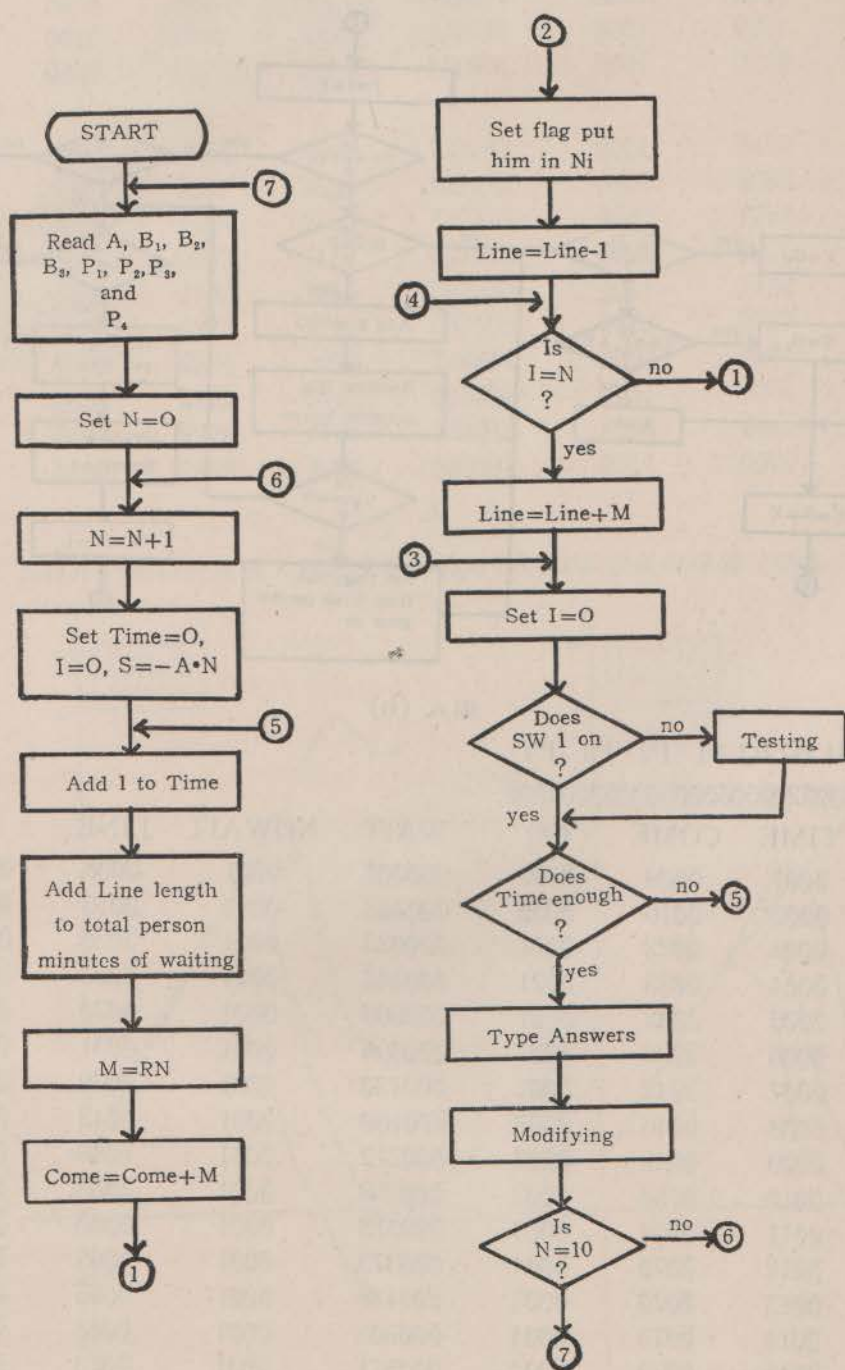
在公共汽車站或火車站，常見有旅客排成長龍等待買票或上車，爲了避免長龍過長，有關方面曾多方努力，增加汽車班次或售票口，以提高運輸能力，然而此種方法雖能解決問題，但就企業觀點而言，却不能不多加考慮，因增加汽車班次，就必須增加車輛、駕駛員、車掌，以及維護人員等，因此成本必須提高。如此成本與旅客不滿之現象合併加以考慮才合理。此亦爲本節討論之重點。再以工廠之連續作業爲例，一工廠其部份製品及半製品之流動，並非有一定之時間間隔，有時一部門之工作人員日夜趕工，而未完成之製品仍然堆積如山，但另一部門的工作人員却無所事事，工廠對於是項問題，多憑過去之經驗予以解決之。在簡單問題或許可以如此，但若問題過於繁雜而很難瞭解時，則用蒙特卡羅法較爲方便。

假設某百貨公司有服務小姐 N ($1 \sim 10$) 人，每人售貨能力相等，且每人每日工作十小時，可得薪資30元。據統計設在每分鐘內來商店的顧客人數不等，但不超過10人，來的人數爲0人，1人，……9人，的或然率平均爲0.1，每一顧客在每分鐘內離去的或然率爲 P ，又每分鐘商店可由每顧客賺進 B_1, B_2 ，及 B_3 元之或然率爲 P_2, P_3 ，及 P_4 ，試問該百貨商店應聘請幾位服務小姐時，賺錢最多？

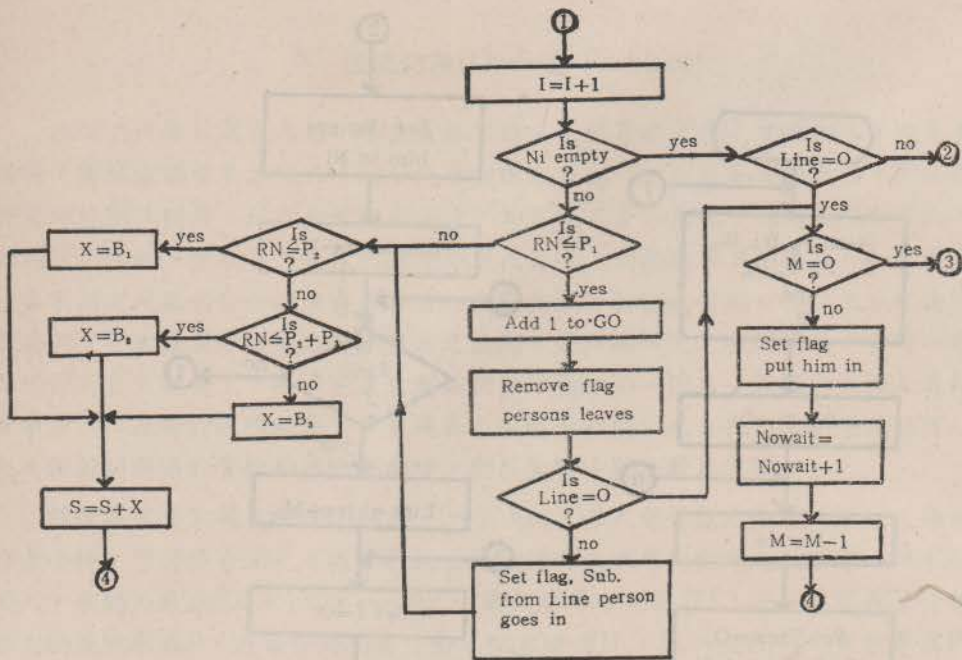
很顯然的，若服務小姐增多，可照顧更多生意，使顧客滿意，但却增加商店的開銷，爲店主所不願，但若裁減服務小姐，使顧客等候太久時，則會引起顧客不滿而走向別家，或不再光顧，對全盤收入影響很大。

其次談到顧客買東西的性格，有些人很乾脆，有些人却討價還價，囉嗦很久，最後什麼也不買，浪費服務小姐不少時間，以往各種因素，都必須加以考慮。如果純粹以數學方程式加以分析，不但繁雜，其結果亦不準確。下面介紹解此題之蒙特卡羅法。

首先計算出每日必須之開銷，然後每分鐘抽出一小於10之亂數作爲來訪顧客人數，若服務小姐有空，等候之顧客則可上前購物，若無等候之顧客，則新來的顧客立刻可接受其服務。次取出另一亂數與 P 比較，以決定正購物中之顧客會不會離開。若不離開，再取一亂數與 P_2, P_3, P_4 比較，以決定他可能使商店賺多少錢，如此累加該商店一日全部所得，則可算出該商店全日淨賺若干數目。最後將該商店顧1, 2, ………10位服務小姐時之淨賺作一比較，則可求得解答。其流程圖如圖八。以 N 表服務小姐人數， $COME$ 表顧客人數， GO 表顧客離開人數， $WAIT$ 表顧客等待之"人分"數（每人等一分鐘謂之一人分） $NOWAIT$ 表無需等待之顧客人數， $LINE$ 表顧客等待排隊之長龍人數， S 表該商店所賺之錢數。



圖八 (a)



圖八 (b)

A B1 B2 B3 P1 P2 P3 P4
 030000000200505000300050002000

N	TIME	COME	GO	WAIT	NOWAIT	LINE	S
01	0001	0009	0000	000000	0001	0008	0003000
01	0002	0016	0000	000008	0001	0015	0002950
01	0003	0022	0001	000023	0001	0020	0002950
01	0004	0025	0001	000043	0001	0023	0002930
01	0005	0032	0001	000066	0001	0030	0002880
01	0006	0036	0001	000096	0001	0034	0002860
01	0007	0042	0002	000130	0001	0039	0002840
01	0008	0046	0002	000169	0001	0043	0002820
01	0009	0049	0002	000212	0001	0046	0002770
01	0010	0058	0002	000258	0001	0055	0002770
01	0011	0064	0003	000313	0001	0060	0002750
01	0012	0070	0004	000373	0001	0065	0002750
01	0013	0070	0004	000438	0001	0065	0002750
01	0014	0073	0004	000503	0001	0068	0002730
01	0015	0078	0004	000571	0001	0073	0002710
01	0016	0087	0004	000644	0001	0082	0002660
01	0017	0094	0005	000726	0001	0088	0002660

01	0018	0095	0005	000814	0001	0089	0002640
01	0019	0097	0005	000903	0001	0091	0002640
01	0020	0106	0005	000994	0001	0100	0002640
01	0600	2725	0291	739162	0001	2433	0008000
02	0600	2667	0583	628235	0002	2082	0018950
03	0600	2658	0893	532338	0003	1762	0027370
04	0600	2637	1157	447525	0005	1476	0034850
05	0600	2700	1515	367339	0011	1180	0045380
06	0600	2528	1789	247595	0022	0733	0051830
07	0600	2584	2073	144611	0092	0504	0060640
08	0600	2712	2443	092290	0051	0261	0070270
09	0600	2778	2728	033012	0096	0041	0078140
10	0600	2868	2859	006707	0514	0000	0073000

表 三

其程序計劃如附錄五，將電子計算機計算的結果製成曲線圖。圖九，十，十一

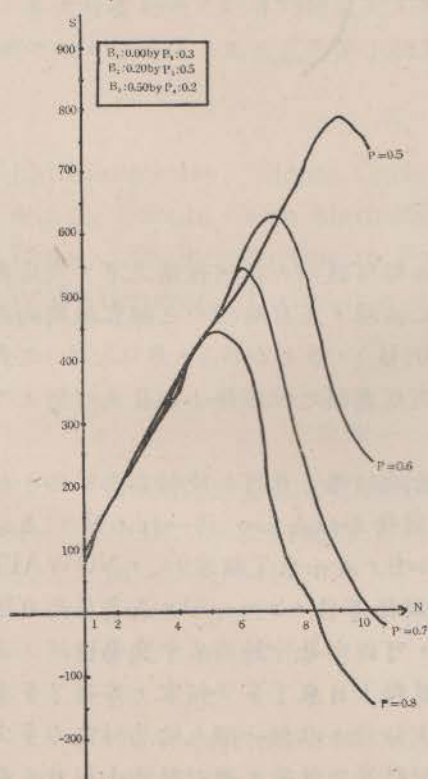


圖 九

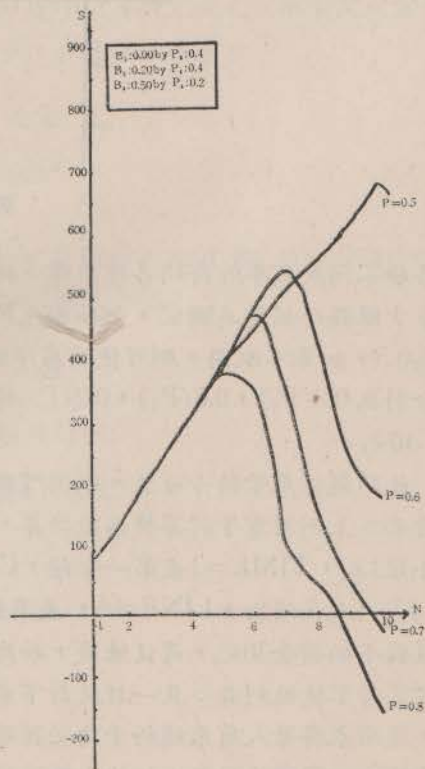
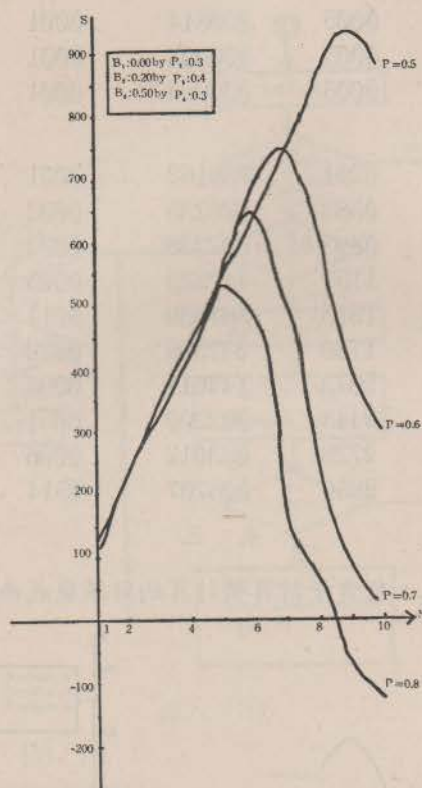


圖 十



圖十一

為各種不同或然率所得的各種曲線。從此等曲線可獲知，在何種情況下，商店應雇用多少服務小姐最為適宜，例如圖九 $P=0.5$ 之曲線，正在購物中之顧客離開的或然率為0.5，如果不離開，則可使商店淨賺 \$0.0(B_1)，\$0.2(B_2)，\$0.5(B_3)之或然率分別為0.3(P_2)，0.5(P_3)，0.2(P_4)時，該商店應雇九位服務小姐最為理想，可賺781.40元。

此問題採用蒙特卡羅法，不但可獲得滿意的結果，且可知曉顧客與服務小姐交易情形。上例用電子計算機模擬計算，其經過情形如表三。第一行， $N=1$ 表示服務小姐1人， $TIME=1$ 表第一分鐘， $COME=9$ ，表示來了顧客9人， $NOWAIT=1$ ，表示1人在購物， $LINE=8$ ，表其餘8人排隊等待， $S=-30$ ，表商店此日須付給服務小姐薪金30元，還沒賺錢，如此下去，可觀察每分鐘商店中交易情況，為數學公式所不能做到者。且一日統計下來，可獲得1日來了多少顧客，等待了多少人分，進而求得每人前來購物平均必須等待多少分鐘，以與一個人的忍耐能力多少作一比較，以便增減服務小姐的人數。因此上例計算之結果，雖以服務小姐9人最為理想，但每人須等11.9分，則顧客早已等得不耐煩了。

結 論

(i) 解決問題之方法有二，一為將物理現象變成數學公式，然後解之，另一則反過來，將數學公式以物理現象模擬之，察其變化過程以歸納其結果，而解此問題。蒙特卡羅法屬於後者。

(ii) 蒙特卡羅法之原理甚為簡單，初看似為一極笨方法，但由於電子計算機之發展，而成為一解決問題之利器。

(iii) 蒙特卡羅法對於解決簡單問題，顯而易用，並不高明，其優點，乃在於繁雜問題之處理。

(iv) 長龍問題或等待線 (Waiting Line) 問題，由於所須考慮之因素極多，很難以數學式表示而加以解決。本文對於此類實際問題作一有系統之研究。

(v) 本文為研究蒙特卡羅法之第一部份，第二部份為較繁雜數學問題之處理，當另文介紹。

7. 申 謝

本文所有例題之計算均用交大 IBM 1620 電子計算機完成之。承蒙交大電子計算機中心，韓瓊媛、馬美滿兩位小姐幫忙甚多，在此謹致謝意。

8. 參考文獻

1. J.M.Hammerley, "Monte Carlo Methods"
2. 中山隆, "Monte Carlo Methods"
3. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Application"
4. W.W. Peterson, "Computing with the IBM 1620"

9. 附 錄

附錄一：求 π 的程序計劃

```

DORG16000,RANDOM NUMBER GEN.
RNG  NOP 11622,61467,2
      M   R,*-1
      SF  90
      TF  R,99
GB    BB  „7
R      DC  10,1162261467,16250
DORG402,CALCULATE THE VALUE OF PAI BY MONTE
CARLO METHOD

```

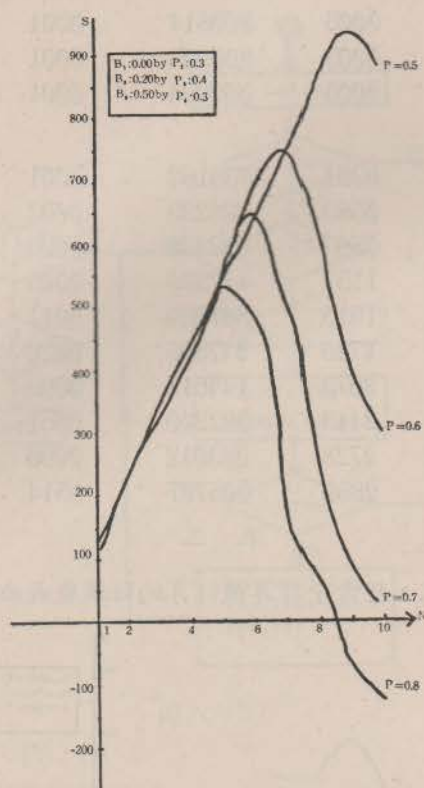


圖 十一

為各種不同或然率所得的各種曲線。從此等曲線可獲知，在何種情況下，商店應雇用多少服務小姐最為適宜，例如圖九 $P=0.5$ 之曲線，正在購物中之顧客離開的或然率為 0.5，如果不離開，則可使商店淨賺 \$ 0.0 (B_1)，\$ 0.2 (B_2)，\$ 0.5 (B_3) 之或然率分別為 0.3 (P_2)，0.5 (P_3)，0.2 (P_4) 時，該商店應雇九位服務小姐最為理想，可賺 781.40 元。

此問題採用蒙特卡羅法，不但可獲得滿意的結果，且可知曉顧客與服務小姐交易情形。上例用電子計算機模擬計算，其經過情形如表三。第一行， $N=1$ 表示服務小姐 1 人， $TIME=1$ 表第一分鐘， $COME=9$ ，表示來了顧客 9 人， $NOWAIT=1$ ，表示 1 人在購物， $LINE=8$ ，表其餘 8 人排隊等待， $S=-30$ ，表商店此日須付給服務小姐薪金 30 元，還沒賺錢，如此下去，可觀察每分鐘商店中交易情況，為數學公式所不能做到者。且一日統計下來，可獲得 1 日來了多少顧客，等待了多少人分，進而求得每人前來購物平均必須等待多少分鐘，以與一個人的忍耐能力多少作一比較，以便增減服務小姐的人數。因此上例計算之結果，雖以服務小姐 9 人最為理想，但每人須等 11.9 分，則顧客早已等得不耐煩了。

結 論

(i) 解決問題之方法有二，一為將物理現象變成數學公式，然後解之，另一則反過來，將數學公式以物理現象模擬之，察其變化過程以歸納其結果，而解此問題。蒙特卡羅法屬於後者。

(ii) 蒙特卡羅法之原理甚為簡單，初看似為一極笨方法，但由於電子計算機之發展，而成為一解決問題之利器。

(iii) 蒙特卡羅法對於解決簡單問題，顯而易用，並不高明，其優點，乃在於繁雜問題之處理。

(iv) 長龍問題或等待線 (Waiting Line) 問題，由於所須考慮之因素極多，很難以數學式表示而加以解決。本文對於此類實際問題作一有系統之研究。

(v) 本文為研究蒙特卡羅法之第一部份，第二部份為較繁雜數學問題之處理，當另文介紹。

7. 申 謝

本文所有例題之計算均用交大 IBM 1620 電子計算機完成之。承蒙交大電子計算機中心，韓瓊媛、馬美滿兩位小姐幫忙甚多，在此謹致謝意。

8. 參考文獻

1. J.M.Hammerley, "Monte Carlo Methods"
2. 中山隆, "Monte Carlo Methods"
3. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Application"
4. W.W. Peterson, "Computing with the IBM 1620"

9. 附 錄

附錄一：求 π 的程序計劃

```

DORG16000,RANDOM NUMBER GEN.
RNG  NOP 11622,61467,2
      M   R,*-1
      SF  90
      TF  R,99
GB    BB  „7
R      DC  10,1162261467,16250
DORG402,CALCULATE THE VALUE OF PAI BY MONTE
CARLO METHOD

```

```

START AM GB+11,1,10
      BTM RNG,*
      M R-6,R-6
      TF XY,99
      CF XY-7
      BTM RNG,*
      M R-6,R-6
      A XY,99
      C XY,ONE
      BP *+24
      AM PAI,1,10
      TFM XY-7,,10
      CM GB+11,10000,7
      BNZ START
      MM PAI,4,10
      SF 95
      TF PAI,99
      WATYHEAD
      WNTYPAI-4
      H
PAI DC 5,0
    DC 1,@
XY DC 9,0
ONE DC 9,1000000000
HEAD DAC 18,THE VALUE OF PAI=@
      DEND SSTART

```

附錄二：求 $\int_0^1 y^2 dy$ 之程序計劃

```

DORG 402,SOLVE THE INTEGRAL BY MONTE CARLO
METHOD
START WATYHEAD
      RCTY
      AM N,1,10
      WNTYN-2

```

```

BTM  RN,*
TF  RANX,R-6
WATYSP
WNTYRANX-3
M  RANX,RANX
TDM  91,,11
TF  F,95
WATYSP
WNTYF-3
BTM  RN,*
TF  RANY,R-6
WATYSP
WNTYRANY-3
C  RANY,F
BP  TEST
WATYO
AM  SN,1,10
WNTYSN-1
B  RET
TEST  WATYX
RET  CM  N,100,9
      BNZ  START+12
      H
SP  DAC  3, .1@
N  DC  4,0
   DC  1,@
RANX  DC  5,0
      DC  1,@
F  DC  5,0
   DC  1,@
RANY  DC  5,0
      DC  1,@
SN  DC  3,0
      DC  1,@
O  DAC  9, O @

```

```

X      DAC  11, X -@
RN     DS   0,16000
R      DS   0,16250
HEAD   DAC  32, N RANX F(X) RANY Y=F(X) SN@
        DORG 16000,RANDOM NUMBER GEN.
        NOP  11622,61467,2
        TEM  79,,7
        M    A,*-13
        TDM  89,,11
        TF   A,99
        BB
A      DC    11,01162261467,16250
        DEND START

```

附錄三：五位數字全不同之可能率之程序計劃

```

DORG 402,OCCURRANCE OF ALL DIFFS
TART  BTM  RNG,*
        TD  A,R-9
        TD  B,R-8
        TD  C,R-7
        TD  D,R-6
        TD  E,R-5
        C   A,B
        BE  S
        C   A,C
        BE  S
        C   A,D
        BE  S
        C   A,E
        BE  S
        C   B,C
        BE  S
        C   B,D
        BE  S
        C   B,E

```

```

      BE    S
      C     C,D
      BE    S
      C     C,E
      BE    S
      C     D,E
      BE    S
      AM    M,1
S      SM    N,1
      BNZ   START
      WNTYM-4
      H
N      DC    5,10000
M      DC    5,0
      DC    1,@
A      DC    2,0
B      DC    2,0
C      DC    2,0
D      DC    2,0
E      DC    2,0
RNG    DS    0,16000
R      DS    0,16250
      DEND

```

附錄四：賭博問題之程序計劃

```

      DORG 402, THE PROBABILITY FOR BET
WA    WATYHEAD
      RCTY
START AM    N,1,10
      AM    G,1,10
      BTM   RN,*
      CM    R-8,35,9
      BP    KO
      AM    M,1,10
      CM    M,5,10

```

	BNZ	START+12
	AM	P,1,10
	TFM	M,3,10
TEST	CM	N,1000,8
	BNZ	START
	WNTYN-3	
	SPTY	
	SPTY	
	WNTYP-2	
	SPTY	
	SPTY	
	WNTYG-3	
	TFM	N,,7
	TFM	P,,7
	TFM	G,,7
	B	START-12
KO	SM	M,1,10
	BNZ	START+12
	B	TEST-12
M	DC	2,3
N	DC	5,0
	DC	1,@
P	DC	5,0
	DC	1,@
G	DC	5,0
	DC	1,@
RN	DS	0,16000
R	DS	0,16250
HEAD	DAC	15, N P G@
	DENDWA	

附錄五：長龍問題之程序計劃 (a)

DORG 402, PROGRAMMED BY P.C.KO.CHECKED BY
S.C.YEN.

START	RNPT	A-4
	RCTY	
	WATY	HEADER
	RCTY	
	WNTY	A-4
	A	P3,P2
	RCTY	
	WATY	HEAD
	TF	N,ZEROS-8
F	AM	N,1,10
	TF	N1,ZEROS-8
	M	A,N
MODI	SF	93
	SF	99
	TF	S,99
	TF	NPI+9,ZEROS
	CF	NPI
T	AM	TIME,1,10
	A	WAIT,LINE
	BTM	RNG,*
	TF	M,R-9
	A	COME,M
	TF	MODI+11,H+23
H	AM	N1,1,10
	BNF	P,NPI,7
	BTM	RNG,*
	C	R-6,P1
	BP	D
	AM	GO,1,10
	CF	H+23,,6
	CM	LINE,,10
	BZ	W
	SF	H+23,,6
	SM	LINE,1,10
D	BTM	RNG,*

	C	R-6,P2
	BNP	XEB2
	C	R-6,P3
	BNP	XEB2
	TF	X,B3
	B	SPX
XEB1	TF	X,B1
	B	SPX
XEB2	TF	X,B2
SPX	A	S,X
	B	B
P	CM	LINE,,10
	BNZ	Q
W	CM	M,,10
	BZ	E+12
	SF	H+23,,6
	AM	NOWAIT,1,10
	SM	M,1,10
	B	B
Q	SF	H+23,,6
	SM	LINE,1,10
B	C	NI,N
	BZ	E
	AM	H+23,1,10
	B	H
E	A	LINE,M
	TF	NI,ZEROS-8
	TF	H+23,MODI+11
	BC1	TEST
	RCTY	
	WNTY N-1	
	SPTY	
	WNTY TIME-3	

SPTY
 WNTY COME-3
 SPTY
 WNTY GO-3
 SPTY
 WNTY WAIT-5
 SPTY
 SPTY
 WNTY NOWAIT-3
 SPTY
 SPTY
 WNTY LINE-3
 SPTY
 WNTY S-6
 TEST CM TIME,600,9
 BNZ T
 RCTY
 WNTY N-1
 SPTY
 WNTY TIME-3
 SPTY
 WNTY COME-3
 SPTY
 WNTY GO-3
 SPTY
 WNTY WAIT-5
 SPTY
 SPTY
 WNTY NOWAIT-3
 SPTY
 SPTY
 WNTY LINE-3
 SPTY
 WNTY S-6
 TF TIME,ZEROS-6

	TF	COME,ZEROS-6
	TF	GO,ZEROS-6
	TE	WAIT,ZEROS-4
	TF	NOWAIT,ZEROS-6
	TF	LINE,ZEROS-6
	TF	RX,RNGX
	TF	RY,RNGY
	TF	R,ZERO
	CM	N,10,10
	BNZ	F
	B	START
ZERO	DC	11,0
X	DS	3
M	DS	2
NI	DS	2
ZEROS	DC	10,0
NPI	DS	1
	DS	9
A	DS	5
B1	DS	3
B2	DS	3
B3	DS	3
P1	DS	4
P2	DS	4
P3	DS	4
P4	DS	4
	DC	1,@
N	DS	2
	DC	1,@
TIME	DC	4,0
	DC	1,@
NOWAIT	DC	4,0
	DC	1,@

WAIT	DC	6,0
	DC	1,@
LINE	DC	4,0
	DC	1,@
COME	DC	4,0
	DC	1,@
GO	DC	4,0
	DC	1,@
S	DC	7,0
	DC	1,@
RNG	DS	0,16000
R	DS	0,16250
RNGX	DC	10,1162261467
RNGY	DC	10,1111111111
RX	DS	0,16195
RY	DS	0,16205
HEAD	DAC	42,N TIME COME GO WAIT NOWAIT LINE S@
HEADER	DAC	29,A B1 B2 B3 P1 P2 P3 P4@
	DEND	START 00402