

JOSEPHSON JUNCTION

力學類比實驗研究

(*EXPERIMENTAL STUDY OF MECHANICAL
ANALOG FOR JOSEPHSON JUNCTION*)

朱 邦 彥

(Pang-Yan Chu)

摘 要

本文旨在建立並探討 Josephson 效應的力學類比實驗。由此種經濟簡便的模型，我們不僅可對 Klein-Gordon 方程式非線性系統得一深入瞭解，並且可針對 Josephson 效應所產生的物理現象，如自我共振模型做最簡便直接的觀察。本文中將以自製的力學類比儀器來實驗說明在長 Josephson junction ($L \gg \lambda_j$) 中，小振幅波動，週期性波動，脈動與脈動間碰撞。最主要於本文中乃在於觀察 Vortex 之慣性運動情形，進一步證明 Fulton-Dyne 所提出在無外加磁場於 junction 時，自我共振模式的真確性。

I、導 論

由於 Josephson 效應⁽¹⁾在許多科學問題上與電子 Device 應用上均佔很重要的地位，所以近幾年來已成爲舉世科學家們研究的重要科題之一。在今天 Josephson 效應除了可以很精確的決定物理上的一些基本常數 (Fundamental constant) 如 $-\frac{e}{h}$ 值^(2,3)之外，也可引用其理論來設計製造一些靈敏度極高的 magnetometers⁽⁴⁾，Voltmeter⁽⁵⁾，electromagnetic radiation detector⁽⁶⁾和 computer elements⁽⁷⁾。由於這些廣泛的實用價值，因此很值得我們再進一步去瞭解 Josephson 效應。

今日，我們所知金屬中超導現象都是在極低溫度下發生的 (如鋁爲 $1.19^\circ K$ ，錫爲 $3.72^\circ K$ ，鉛爲 $7.18^\circ K$ ，最高爲鎳、鎳的合金爲 $22.3^\circ K$) 故欲研究此等超導體的問題，則須要很多經費來建立一個低溫物理實驗室才可，但是 1963 年 Anderson⁽⁸⁾ 首先指出了兩超導體間的 Josephson 效應與在重力場中物理擺 (pendulum) 的擺動有很類似的密切關係，其後許多科學家利用這種力學類比^(9~11) 來研究有關 Josephson 效應的各種現象。本實驗就是建造一個這種 Josephson 效應的力學模型 (非常經濟，所費只不過三仟臺幣而已)，由此模型我們可觀察並研究在長 Josephson junction 中小振幅的波動現象、週期性波動現象與脈動和脈動間碰撞現象等，最重要的是我們對於 Josephson 效應中的 Vortex 之慣性運動也可由此力學類比實驗得一瞭解，並且用來證實前年 Fulton-Dyne 所提出的自我共振模型的真確性。有關 Vortex 之慣性運動由來，將在第二章中討論。

在另一方面，現在一般學理工科的大學生，對於非線性方程式 (如 Klein-Gorden equation) 所顯示的物理現象都缺乏明確的觀念，可是現今許多物理上的問題都出現了這種非線性方程式所引出的現象 (如氣體與電漿中的 shock wave，固態物理學中晶體結構的變化⁽¹²⁾，與基本粒子學中許多的模型⁽¹³⁾ 等)，因此在大學課程裡似乎應讓理工科學生們也能對於非線性方程式有適當的認識。在本文第三章中我們將可看出研究 Josephson 效應的結果所得到的方程式就是非線性 Klein-Gorden 方程式。由本實驗的結果將對此方程式所顯示的物理現象得一較明確的認識。

總之，第二章中我們將討論有關超導體的一般理論，第三章將詳細解說 Josephson 效應的力學類比之實驗儀器，過程與實驗結果，第四章爲討論與結論。

II. Josephson效应的理論

許多金屬在低於其溫度時，常有超導性現象發生（即 $\sigma \rightarrow \infty$ ），其現象發生的主要原因直到1957年才由Bardeen, Cooper和Schrieffer三位所提出的BCS理論給予解說。

在1956年Cooper⁽¹⁴⁾發現在Fermi表面上附近的兩個電子，一在 (K, S) state，一在 (K', S') state， $(K$ —電子動量， S —電子自轉)無論兩電子間吸引力多微弱，這兩電子都會形成 bound pair，此乃著名的Cooper pair。電子間引力的來源，乃因電子通過晶格時，只要Lattice的質量非無窮大，則由於Lattice的正電荷與電子間引力而使得電子附近的晶格密度變大，所以當另一電子通過其附近時，就會被吸引，依量子場觀點言，此種引子乃因電子間交換虛聲子 (Virtual phonon)而來。BCS⁽¹⁵⁾為找尋超導體的ground state時，認為如果於 (K, S) state上有電子，在服從 Paul exclusion principle情況下，則另一個有關聯的 (K', S') state上也一定有電子而且，選擇此 electron pair時，其總動量恒保持不變，即 $K+K'=Q$ (要的是最低能階，所以 $Q=0$)，且兩電子於最低能階時，自轉方向並相反，因此超導體的 ground state 應該為 electron pairs $(K \uparrow, -K \downarrow)$ 之線性組合。且由於超導現象所須能量非常小，因此BCS假設除了產生超導現象所須那種具有決定性吸力外，其他電子間作用力和一般導體相同。根據以上原則，BCS用量子力學的variational method很成功地導出了電子能帶差距而解釋了超導現象。

上述BCS理論在巨觀的觀點看來，因一個Cooper pair伸張範圍 10^{-5} cm (Coherence length可由uncertainty principle 求出)比 electron-phonon 短距(約 10^{-8} cm)的交互作用大的太多，故於 10^{-5} cm半徑內含 Cooper pair約有 $10^6 \sim 10^7$ 對。這些Cooper pair均需具有同一質心動量，即每對 Cooper pair 波函數均須具有相同相位。設若有如此多這樣的球相重疊，則該基本的phase Coherence將伸展到整個導體上。換言之，若導體上任一點相位已定，則所有點相位於空間和時間上即能確立超導性現象。所有超導現象如 Meissener effect flux quantization等，均可用long-range coherence來解說。

1962年，Josephson 認為如果於兩超導體間隔了一層薄的氧化層如(圖一) (厚度約 $10 \text{ \AA} \sim 20 \text{ \AA}$)，則Cooper pair也能從一超導體穿過氧化層到另一超導體而產生超導 Josephson電流，此種現象稱為 Josephson效應。當該超導 Josephson電流穿透現象在零電位差發生時，此即 dc Josephson 效應。若有定值電位差 V_0 ，跨過隔離氧化層時，則此種超導體之穿越電流即以 $\omega = \frac{2e}{\hbar} V_0$ 的交流頻率來回振盪，此即 ac Josephson效應。

在理論上欲分析這些效應，我們可用下述簡單方法來解說⁽¹⁶⁾。令兩超導體之 Cooper pair波函數分別為 ϕ_1 和 ϕ_2 ，則於無磁場的情況下，兩者關係應為

$$\begin{cases} i \hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = U_1 \phi_1 + K \phi_2 \dots\dots\dots(1) \\ i \hbar \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = U_2 \phi_2 + K \phi_1 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

K 乃是此種 junction的性質常數。(如 $K=0$ 則兩超導體即無coupling，所以兩超導體

以能量 U 處於最低能階狀態) 其中 ϕ_1 和 ϕ_2 分別為

$$\phi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1} \dots \dots \dots (3) \quad \phi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2} \dots \dots \dots (4)$$

ϕ_1, ϕ_2 乃表示兩導體的相位 (phase), ρ_1, ρ_2 為其間的電子電荷密度 (如圖一)。於實際實用上 $\rho_1 \doteq \rho_2 = \rho_0$ 為兩相同超導金屬內電子電荷的正常狀態下密度。如於這兩導體間接一電位差 V , 則 $U_1 - U_2 = qV$, 為方便計, 我們定兩超導體間乃在氧化層之中線能量為零, 則, $U_1 = \frac{qV}{2}, U_2 = -\frac{qV}{2}$, 故(1), (2)可改寫成

$$\left\{ \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{qV}{2} \phi_1 + K\phi_2 \dots \dots \dots (5) \\ i\hbar \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= -\frac{qV}{2} \phi_2 + K\phi_1 \dots \dots \dots (6) \end{aligned} \right.$$

將(3), (4)兩式代入(5), (6)且令每一式子等號兩邊之實數部份及虛數部份分別相等, 且令 $\phi_2 - \phi_1 = \phi$ (兩導體波函數的相位差) 即可得

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= +\frac{2}{\hbar} K\rho_0 \sin \phi \dots \dots \dots (7), & \left\{ \begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= +\frac{K}{\hbar} \cos \phi - \frac{qV}{2\hbar} \dots \dots \dots (9) \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K\rho_0 \sin \phi \dots \dots \dots (8), & \left\{ \begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= +\frac{K}{\hbar} \cos \phi + \frac{qV}{2\hbar} \dots \dots \dots (10) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

穿過氧化層間 Josephson current, 由(7), (8)式可知為 $\dot{\rho}_1$ (或 $-\dot{\rho}_2$), 即 $I = \frac{2K}{\hbar} \rho_0 \sin \phi$,

令 I_0 為最大 Josephson current 則 $I_0 = \frac{2K\rho_0}{\hbar}$

$$\therefore I = I_0 \sin \phi \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{又 } \phi = \phi_2 - \phi_1, \quad \therefore \dot{\phi} = \frac{qV}{\hbar} \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{由(12)式可求得 } \phi = \phi_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt \dots \dots \dots (13)$$

令 $t=0$ 時, $\phi = \phi_0$, 且 q 乃 Cooper pair 之電荷量, 即 $q=2e$, 則於(11), (13)兩式我們可得 Josephson junction 理論的一些重要結果。

首先我們於兩超導體供應 -dc 電壓, 令 $V = V_0$, 則 $\phi = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t$, 當 $V_0 = 0$

, 則 $\phi = \phi_0$ 故 $I = I_0 \sin \phi_0$ 可得一 dc 電流, 其值介於 I_0 與 $-I_0$ 之間 (視 ϕ_0 值決定) 此乃 dc Josephson 效應, 如 (圖二) 乃 Josephson $S_n - S_n O - S_n$ Junction 的 $I-V$ 特性曲線圖⁽¹⁷⁾, 其 input source 乃用三角波形的 current source 於圖中可見當電流增加到 dc Josephson current 之臨界值 I_0 時, 超導電流中 Cooper pair 就變成自由電子, 形成普通電流由 $V=0$ 跳到 $V=2e\Delta$ 處, Δ 乃是超導體 energy gap。當 $V_0 \neq 0$ 則 $I = I_0 \sin (\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t)$ 可得一 ac 電流, 此電流之正弦振動頻率 $\omega = \frac{2eV_0}{\hbar}$, 因 \hbar 很小, 故頻率極高, 由(11), (13)兩式得知其平均淨電電流為零, 此乃 ac Josephson 效應。

如果我們於兩邊超導體除供應 V_0 電壓外, 再加上一高頻率電壓, 即 $V = V_0 + v \cos \omega t$, $v \ll V$

$$\text{則 } \phi = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2e}{\hbar} \frac{v}{\omega} \sin \omega t \text{ 將此代入 } I = I_0 \sin \phi, \text{ 再以}$$

Fourier-Bessel 級數展開

$$I = I_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(2ev/\hbar\omega) \sin\{(m\omega + 2eV/\hbar)t + \phi_0\} \text{ 如 } \frac{2eV_0}{\hbar\omega} = n \text{ (} n \text{ 乃整數) 則}$$

I 有一 dc 分量

$$(I)_{dc} = (-1)^n I_0 I_n(2ev/\hbar\omega) \sin\phi$$

即

$$(I)_{dc} = (-1)^n I_0 I_n(nv/V_0) \sin\phi,$$

故 $I-V$ 特性圖即顯示 step structure 如(圖三)。此種 resonance 效應乃由 Shapiro⁽¹⁸⁾ 首先發現。故若 Junction 以 ω_0 之頻率輻射電磁波，則 ω_0 必為入射 ac 信號頻率之整數倍，即 $\omega_0 = n\omega$ ，因此在 $V = \frac{n\hbar}{2e}\omega$ 時，即有 current step 出現。如(圖三)。

當外加磁場時，由安培定律得知 ϕ 的空間變化為

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2ed}{\hbar} H_y \dots\dots\dots (14)$$

H_y 為外加均勻磁場， $d = 2\lambda + t$ ， λ ，為倫敦穿透係數，約為 500\AA ， t

為氧化層厚度約 20\AA 。在(12)與(14)式中，既然 ϕ 隨時間或空間而改變，由(11)式中可知 Josephson 電流成正弦波在氧化層中進行，如(圖四)，同時有電磁波放出。若此電磁波的波長 λ 剛好與寬度 (L) 有下列關係時，即有共振現象產生

$$L = \frac{n\lambda}{2} \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots) \dots\dots\dots (15)$$

當該電磁波與 Josephson current wave 波動的速度 \bar{c} 相等時，即得最大共振振幅。

由 $\bar{c} = \nu\lambda$ ， ν 為頻率與(15)式和 $h\nu = 2eV$ 中得 $V = \frac{h\nu}{2e} = \frac{h\bar{c}}{2e\lambda}$

$$V = \frac{h\bar{c}}{4eL} \cdot n \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots) \dots\dots\dots (16)$$

由(16)式所得共振現象在 $I-V$ 特性曲線上，此即為所謂 Fiske mode⁽¹⁹⁾，如(圖五)。

在1971年，Chen et. al⁽²⁰⁾ 首先發現，如無外加磁場時，有一長 Junction ($L \gg \lambda_j$ ； λ_j 乃 Josephson penetration depth) 也有 $I-V$ step structure 出現，然與 Fiske mode 不同，因在(16)式中 mode n 只能為偶數。1973年 Fulton⁽²¹⁾ 等人曾用 vortex 慣性運動來說明該現象的發生，當 vortex 移到 junction 邊緣時，則 vortex 可被反射而形成 Antivortex，此 vortex 也會具有電磁波放出，故發生有如 Fiske mode 共振現象。但我們亦可由下列的 vortex 運動模型，得知為何 n 只能為偶數。因從(12)式

$$\frac{2e}{\hbar} \langle V \rangle = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

這裡倘若 $\Delta x = L$ ， $\Delta\phi = 2\pi$ ，故 $\langle V \rangle = \frac{\Phi_0}{L} v$ ，其中 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 乃量子通量，

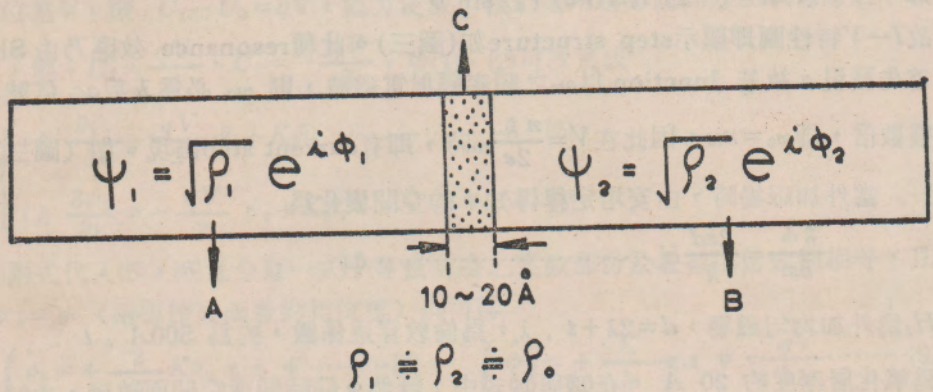
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 為 vortex 移動速度。當共振現象最大振幅 $v = \bar{c}$ 發出與(16)式相比時，

$$\langle V \rangle = \frac{\Phi_0 \bar{c}}{L} \text{ 則得知剛好 } n = 2$$

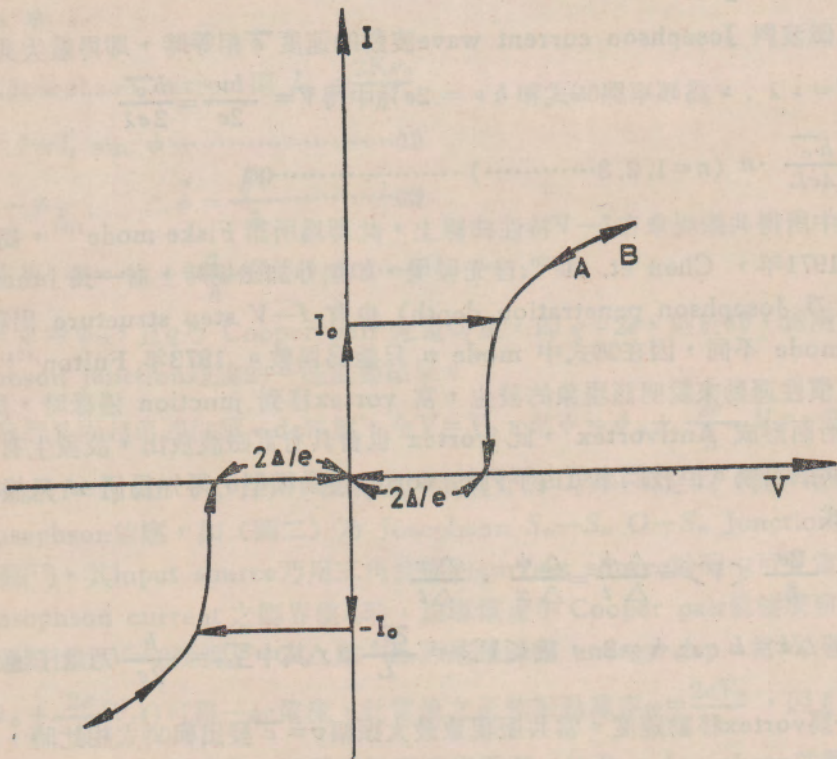
由此可知，若有共振現象發生時，則在(16)中 n 必為偶數。

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}$$

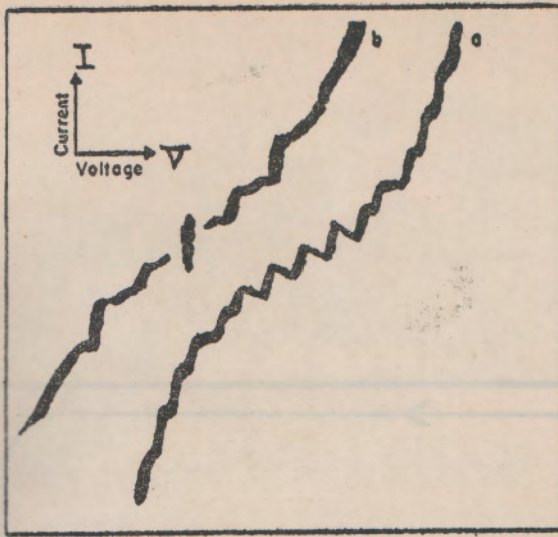
$$\Psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}$$



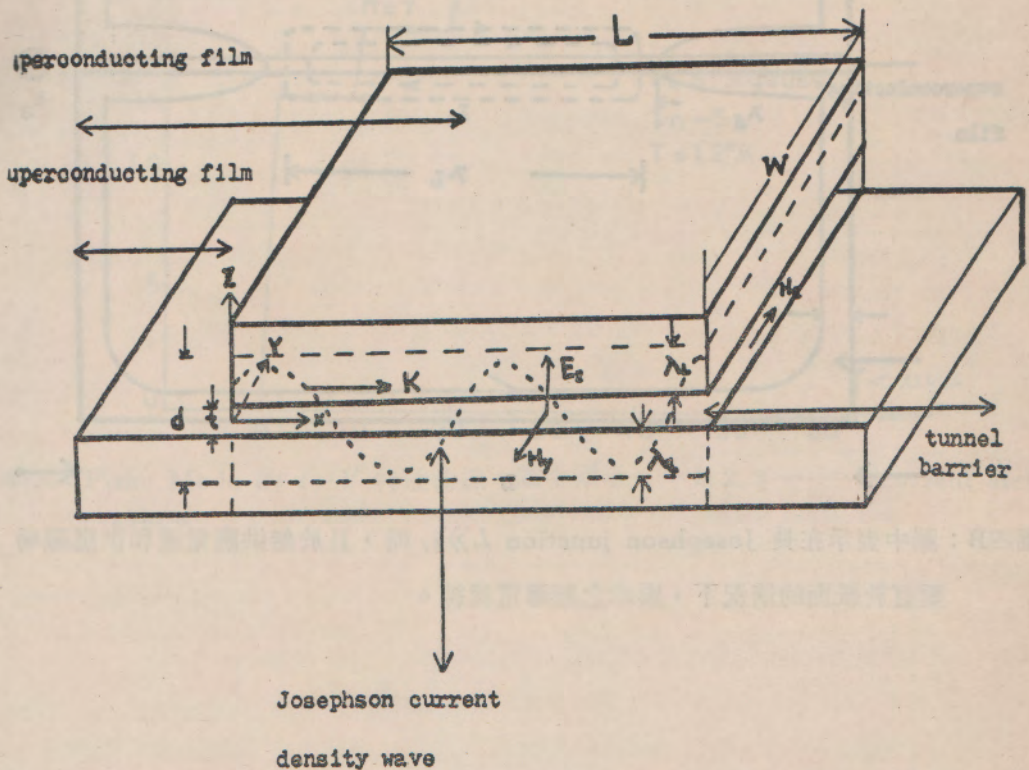
圖一：為 Josephson junction，A、B為兩超導體的金屬，中間C為絕緣的氧化層厚度，約為10~20 Å。圖上所顯示為兩超導體中的波動方程式 ϕ_1 、 ϕ_2 。 ρ_1 、 ρ_2 乃電子電荷密度。



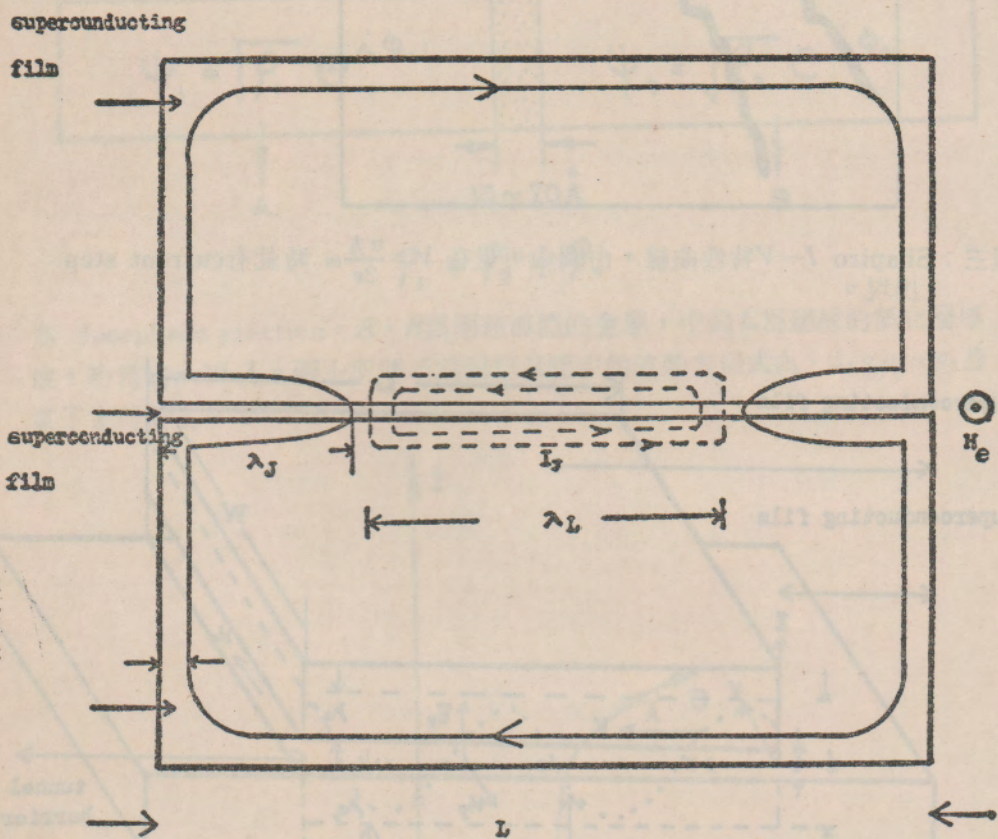
圖二：Josephson S_n-S_n $O-S_n$ junction 的 $I-V$ 特性曲線。 I_0 為 dc Josephson 電流的臨界值（在 $V=0$ ） AB 線段的斜率為該氧化層當通過正常電流時所呈現的電阻。其中 Δ 為Energy Gap。



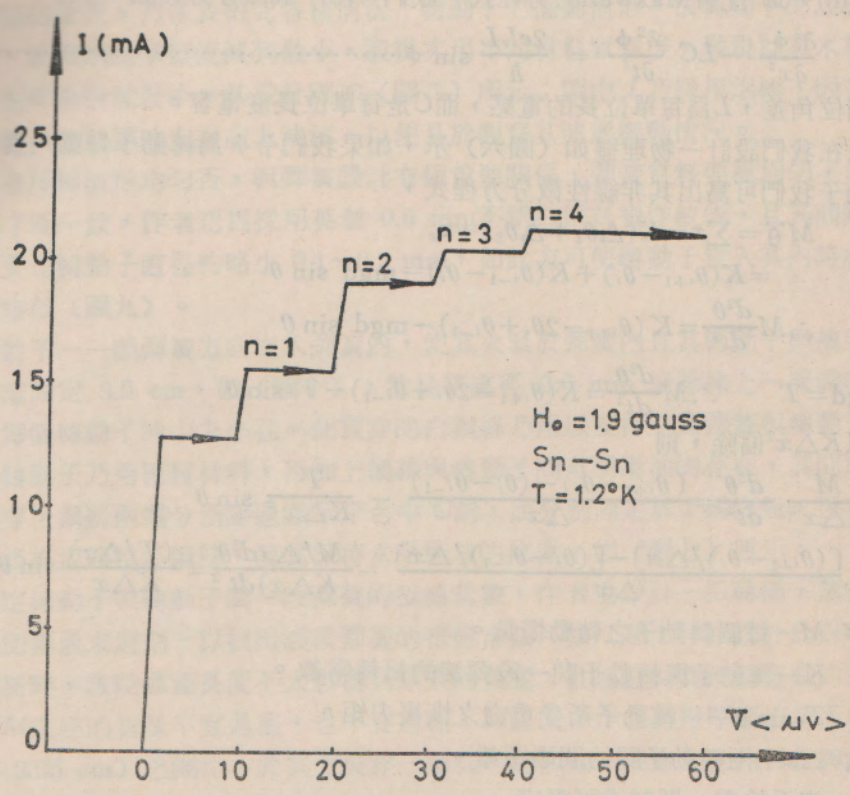
圖三：Shapiro $I-V$ 特性曲線，由圖中可見在 $V = \frac{n\hbar}{2e}\omega$ 時就有 current step 出現。



圖四A：圖中表示 Fiske mode 的 tunnel junction 的情形。於兩超導薄膜之 barrier 的寬度 W ，長度 L ，厚度 t 。且沿着 y 軸方向供應於穩度磁場 H_y 平行於 junction 的一邊。至於 W 、 L 、 t 的值與 Josephson 的穿透深度 λ_j 比較均甚小



圖四B：圖中表示在長 Josephson junction $L \gg \lambda_J$ 時，且於無供應電流和供應磁場垂直於紙面的情況下，顯示之超導電流線。



圖五：Fiske Mode 的 $I-V$ 特性曲線。圖中顯示 $n = 1, 2, 3, \dots$ 等 current step 的結構。

$I = I_0 \sin(\phi)$	$I = I_0 \sin(\phi)$
$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$	$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$
$\dot{\phi} = \frac{2e}{\hbar} V$	$\dot{\phi} = \frac{2e}{\hbar} V$
$I = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V t\right)$	$I = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V t\right)$
$\langle I \rangle = I_0 \frac{2e}{\hbar} V$	$\langle I \rangle = I_0 \frac{2e}{\hbar} V$
$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}$	$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}$
$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V$	$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V$
$I = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V t\right)$	$I = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V t\right)$
$\langle I \rangle = I_0 \frac{2e}{\hbar} V$	$\langle I \rangle = I_0 \frac{2e}{\hbar} V$

III. JOSEPHSON JUNCTION的力學類比

A. 理論

每單位面積的 Josephson 電流與兩超導體間電壓能以上兩式表示：

$$I = I_c \sin \phi \dots\dots\dots(17) \quad V = \left(\frac{\hbar}{2e}\right) \frac{d\phi}{dt} \dots\dots\dots(18)$$

ϕ 乃氧化層兩邊超導體之量子相位差，且 $\frac{\hbar}{2e}$ 稱為量子通量 (flux quantum)，而 I_c 乃最大 Josephson 電流。

由(17)，(18) 配合 Maxwell 的方程式，我們可得一偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{2eI_c L}{\hbar} \sin \phi \dots\dots\dots(19)$$

ϕ 乃相位角差， L 為每單位長的電感，而 C 是每單位長度電容。

現在我們設計一物理擺如(圖六)示，如果我們令 ϕ 為轉動子轉動角度，則第 i 個轉動子我們可寫出其非線性微分方程式，

$$\begin{aligned} M\ddot{\theta} &= \sum \tau = K(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \tau_g \\ &= K(\theta_{i+1} - \theta_i) + K(\theta_{i-1} - \theta_i) - mgd \sin \theta \\ \therefore M \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= K(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - mgd \sin \theta \end{aligned}$$

令 $mgd = T \quad \therefore M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - T \sin \theta$

每項以 $K\Delta x^2$ 偏除，則

$$\begin{aligned} \frac{M}{K\Delta x^2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i) - (\theta_i - \theta_{i-1})}{\Delta x} - \frac{T}{K\Delta x^2} \sin \theta \\ \therefore \frac{[(\theta_{i+1} - \theta_i)/\Delta x] - [(\theta_i - \theta_{i-1})/\Delta x]}{\Delta x} &- \frac{M/\Delta x d^2 \theta}{(K\Delta x) dt^2} = \frac{(T/\Delta x)}{K\Delta x} \sin \theta \dots\dots(20) \end{aligned}$$

- 此處
- M —每個轉動子之轉動慣量。
 - K —轉動子與轉動子間一段彈簧的扭轉常數。
 - $T \sin \theta$ —轉動子所受重力之恢復力矩。
 - Δx —兩轉動子間的時間距離。

如令 Δx 趨近於零，則(20)式可寫成

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{(M/\Delta x)}{(K\Delta x)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{(T/\Delta x)}{(K\Delta x)} \sin \theta \dots\dots\dots(21)$$

將(21)式與(19)式做一比較：

Josephson junction	mechanical analog
ϕ = 量子相位差	θ = 角位移
$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) V = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) \cdot$ 電壓	$\frac{d\theta}{dt}$ = 角速度
I_c = 最大 Josephson 電流	$T/\Delta x = mgd/\Delta x$ = 每單位長度物理擺所受之重力矩
$\frac{\hbar}{2e} \cdot C = \frac{\hbar}{2e} \cdot$ (單位長度容電量)	M = 物理擺轉動子的轉動慣量
$\frac{\hbar}{2e} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\hbar}{2e} \cdot$ (單位長度的電感) ⁻¹	K = 轉動子與轉動子間一段彈簧的扭轉常數
λ_j = Josephson 穿透深度	$l = \left(\frac{K}{T}\right)^{1/2} \Delta x$

B. 實驗

※ 儀器裝置

自製鐵架平台如(圖七),欲使其重心低,穩度大, A 乃採用實心較重的鋼鐵做底, V 乃垂直支持架,欲使 V 能垂直於平台 A ,以 B 鐵棒兩端銲接 V ,且令 B 與 A 平台平行。圖中 H 乃調整平台水平測定儀。離平台 A 等高處之 V 上分別各鑽一孔,即圖六之 C ,用以穿越支持轉動子重量的鋼絲。 P 乃固定鋼絲兩端之螺旋扭, S 乃特別設計之螺旋轉動盤,如(圖七)之附圖,其具有拉緊或放鬆支持轉動子的鋼絲設備。

物理擺的設置,乃在於研究各種情況下轉動子的擺動情形,故轉動子的設計,宜採用質輕,使與鋼絲摩擦能減到最小,經幾次用不同材料實驗後,發現以電木製作的轉動子產生摩擦情況最小,其設計圖如(圖八)所示;圖中 L 乃採用鋁棒,因其質輕且不易生銹。並於鋁棒末端塗上油漆,以便易於觀察其波形擺動情況。

物理擺扭轉波形均勻否,與彈簧設計有極重要關係,彈簧質料要極均勻,則各處扭轉係數才能一致,作者認為採用英製 0.6 mm 不銹白鋼絲製作較佳,且其間距要相等,直徑要比轉動子直徑約略小 0.1~0.2 mm,如此方可使轉動子旋入其內時夾緊,其製後規格如(圖九)。

將轉動子一一順彈簧方向旋入彈簧內,使其夾緊於彈簧內且其轉動子與轉動子間の間隔距離固定 3.0 cm,如(圖十),然後將直徑 0.6 mm 鋼絲抹上一層潤滑油,再行貫穿每個轉動子的中央小孔。此貫穿的白鋼絲乃用以支持整條彈簧與轉動子的重量,由於轉動子乃用極輕材料,再加上鋼絲與轉動子間有潤滑油的存在,其間摩擦甚小。將貫穿後鋼絲兩端分別穿過鐵架平台中 C 洞,而分別固定於 P 螺旋扭,再將螺旋轉動盤往後旋退而拉緊鋼絲,使其保持水平橫放的位置,如(圖七)所示。

欲測定轉動子與轉動子間一段彈簧的扭轉常數,作者也設計一扭轉擺,然後於暗室中配合測頻儀求週期,以找出該段彈簧的扭轉常數。如(圖十一)設計此扭轉擺,欲使其平衡時,該段彈簧長度不太影響到原來的長度,且須達到其扭轉擺動的穩定性,故圖中 M 底座的質量不宜過重,也不宜過輕, M 底座,作者乃用厚度較薄而半徑稍大(半徑 2.05 cm)之銅片,於其中央穿一細孔,將彈簧一端穿入孔內再行銲接,另一端則夾於鋼夾 N (圖中之 N)。

首先我們需要知道該 Josephson 力學類比儀器中所欲知的參數(l)是否小於其長度 L ,因為這乃是長的 Josephson junction 所需要的條件。

※ 方法與結果

由上述設計扭轉擺如(圖十一),以測求轉動子與轉動子間一段彈簧的扭轉常數(K)。先將扭轉擺輕微扭轉一小角度後釋放,任其扭轉擺動,視其擺動平穩後,將暗室中燈关掉,調整測頻儀的頻率,直到當測頻儀閃亮時,見扭轉擺上記號均出現於同一位置,此乃同步現象,由此可測得扭轉擺週期 t 。令 m 為扭轉擺底座質量, R 表示底座半徑,為 I 其轉動慣量, K 乃彈簧扭轉常數。

$$I = \frac{MR^2}{2}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \therefore K = \frac{4\pi^2}{T^2} \times \frac{MR^2}{2} = \frac{2\pi^2 MR^2}{T^2} (nt \cdot m)$$

$$M = 1.35 \times 10^{-2} \text{ kg}, \quad R = 2.05 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad t = 2.8 \times 10^{-1} \text{ sec}$$

$$\therefore K = 1.4 \times 10^{-3} \text{ nt} \cdot m$$

則 Josephson junction 的單位長度 $l = (K/T)^{1/2} \Delta x$ ，參數就可求得。在此力學類比儀器上， m 乃轉動子質量， d 乃轉動子質心離轉軸距離， Δx 為轉動子之間的時間距離， K 為上述所求彈簧的扭轉常數， M 為轉動子的整體轉動慣量。

$$m = 1.8 \times 10^{-8} \text{ kg}, \quad d = 1.23 \times 10^{-2} \text{ m},$$

$$\Delta x = 2.8 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad K = 4 \times 10^{-3} \text{ nt} \cdot \text{m},$$

$$T = mg \quad d = 1.8 \times 9.8 \times 1.23 \times 10^{-3} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ (nt} \cdot \text{m)}$$

$$M = 6.27 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\therefore l = \left(\frac{K}{T}\right)^{1/2} \Delta x m$$

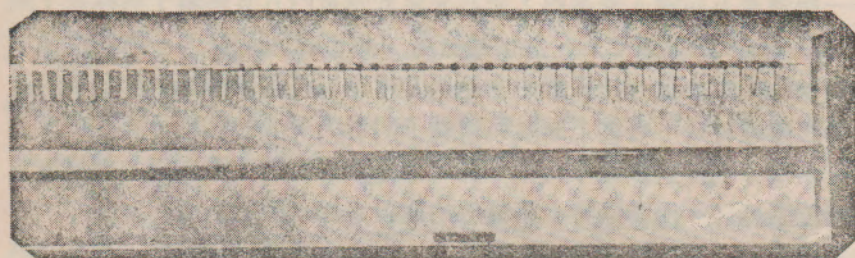
$$= 0.12 m$$

力學類比儀器長度因為 1.5 m 而 l 僅為 0.12 m ，此即合乎長 Josephson junction 的條件也就是 $(\lambda_j \ll L)$ 。

下面我們將列出該 Josephson 力學類比儀器（在 Damping 摩擦力非常小的情況下）所做的實驗：

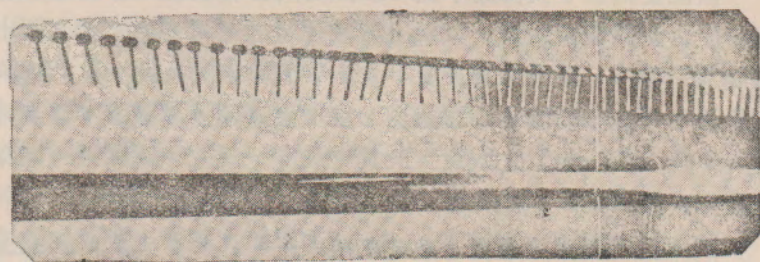
(1) 小振幅的波形

將彈簧旋轉一小角度 θ ，令 $\theta < 5^\circ$ ，則可由照像方法，攝得其波形相片。



圖十二A

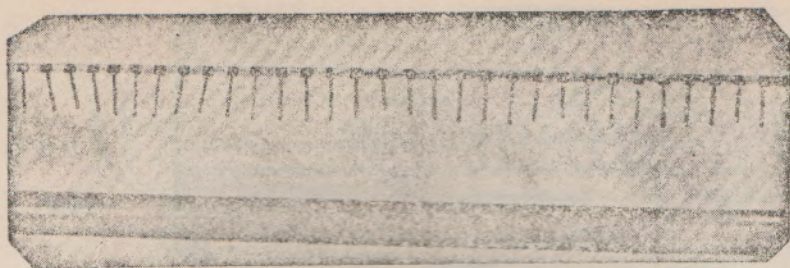
圖十二B



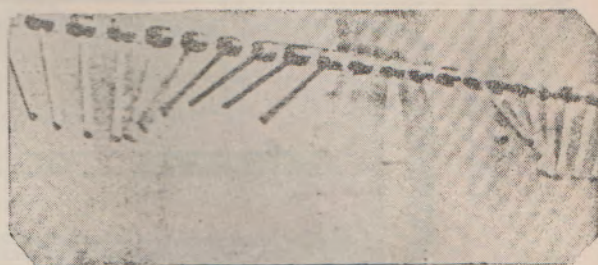
當物理擺擺動的頻率低於某一定值時，則此物理擺之擺動呈現一致化，如（圖十二A）。但如頻率增加時，則波長愈短，就有類似電漿橫波出現，如（圖十二B）此即所謂 Dispersion relation。

(2) 週期波動

當振幅增大時，而 θ 在 $0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$ 條件下，可攝得相片其波形相片如圖。（圖十三A）我們可見到明顯的週期波動，（圖十三B）為一週期波動的放大圖形。



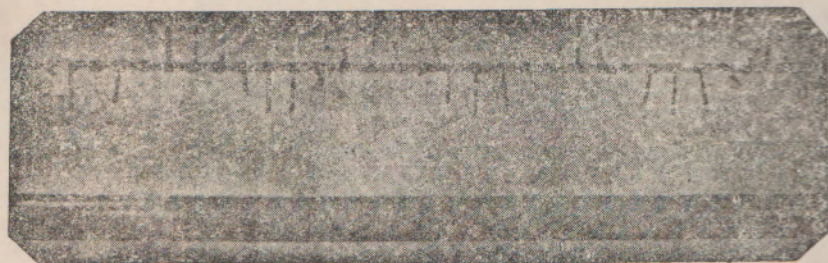
圖十三A



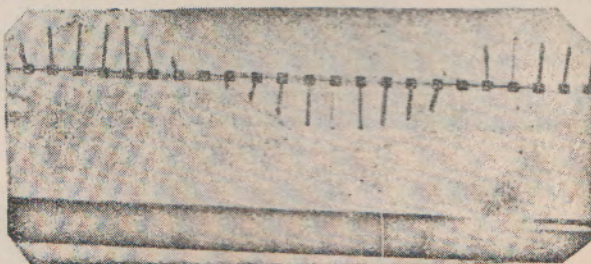
圖十三B

(3) 大振動幅度

當 θ 角轉動大於 $\frac{\pi}{2}$ 時則得如下圖形。(圖十四) A、B) 乃是大振動時 $\theta > \frac{\pi}{2}$ ，所呈現週期波動。



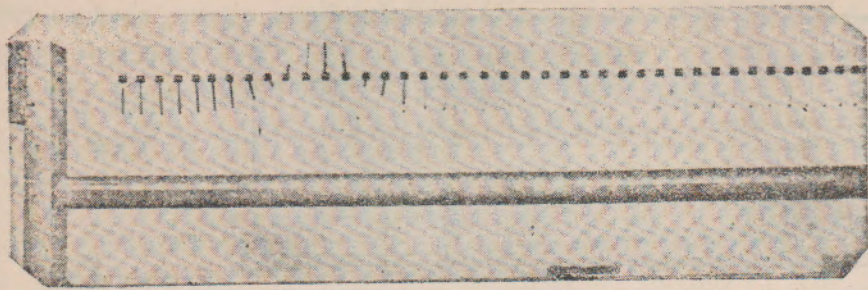
圖十四A



圖十四B

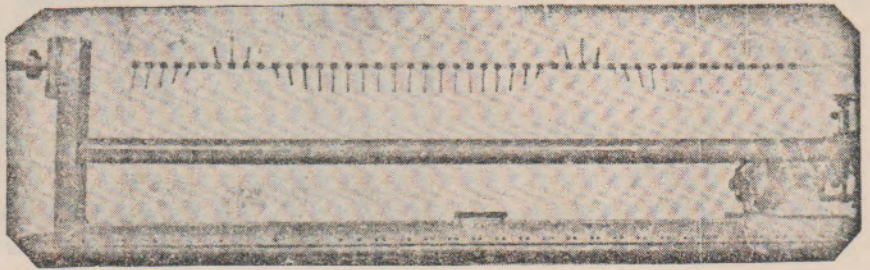
(4) 脈動與脈動間碰撞

將彈簧旋轉一 360° 角，使其得一脈動 p 前進到某位置令其平衡靜止，如(圖十五 A)，再以同轉向旋轉另一脈動 q ，當此 q 前進脈動如(圖十五 B) 碰撞到 p 靜止脈動時，則能量傳給該 p 靜止脈動使其等速前進，而原 q 前進脈動取代該靜止脈動呈現靜止狀態。但當 p 前進到自由端返回時，即得另一反向之反射脈動返回。



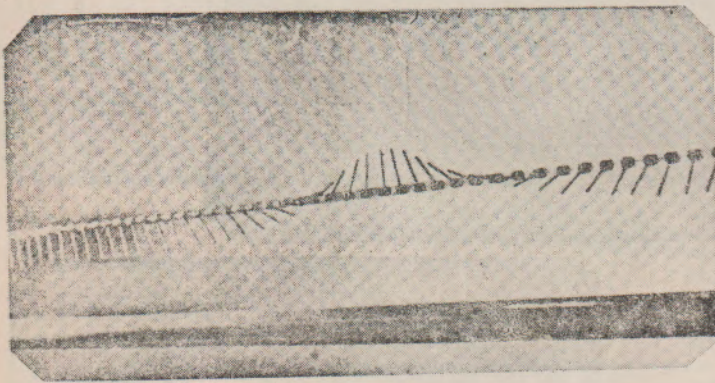
圖十五 A

圖十五 B



(5) **非線性脈動**

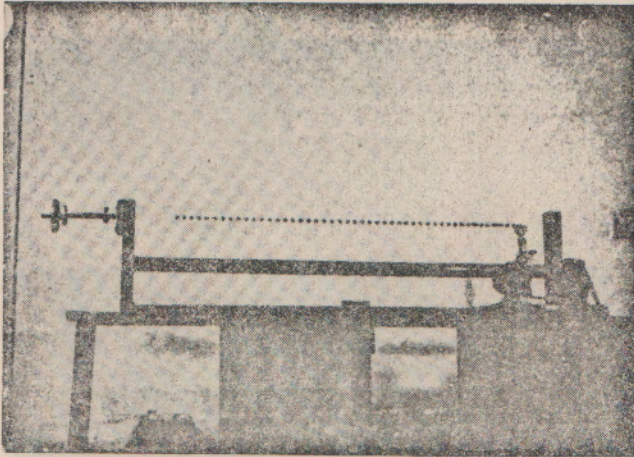
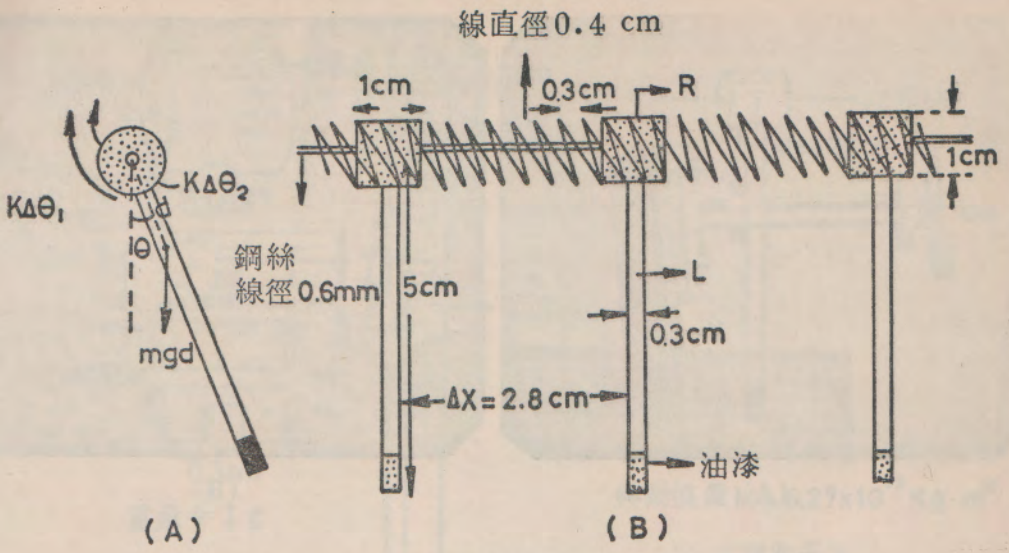
(圖十六A) 乃令一旋轉 360° 之脈動前進，則在damping (摩擦) 很小時，則此脈動以反轉向反射回來，如此來回反射結果形成 (圖十六B) 所示。



圖十六 A

圖十六 B



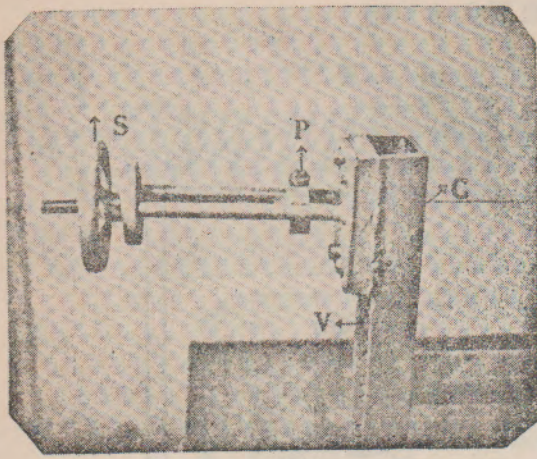


圖六：L為鉛釘，尾端塗上油漆。R乃由電木做成的轉動子。

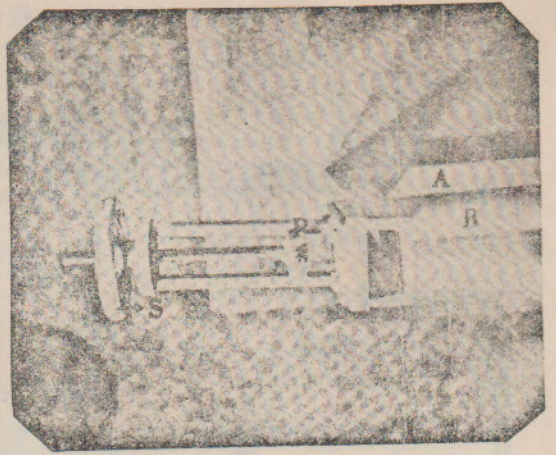
(A) 表示轉動子轉動角 θ 時所受的恢復力矩 $\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_g$ ，其 $\tau_g = mg d \sin \theta$ ， $\tau_1 + \tau_2 = K\Delta\theta_1 + K\Delta\theta_2$ 。

(B) 表示轉動子旋入彈簧內的情況。

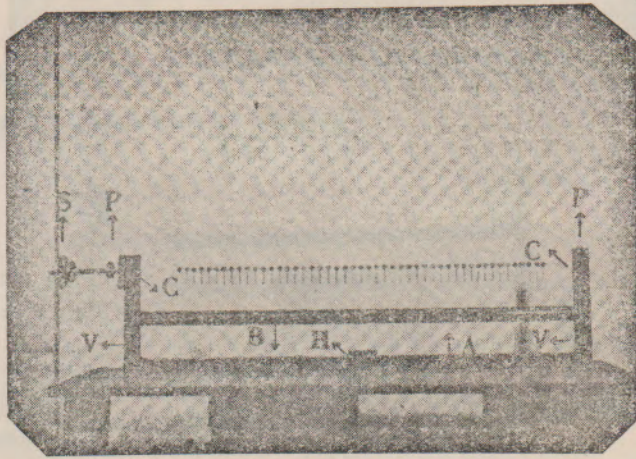
(C) 為整套力學類比儀器裝置。



(A)



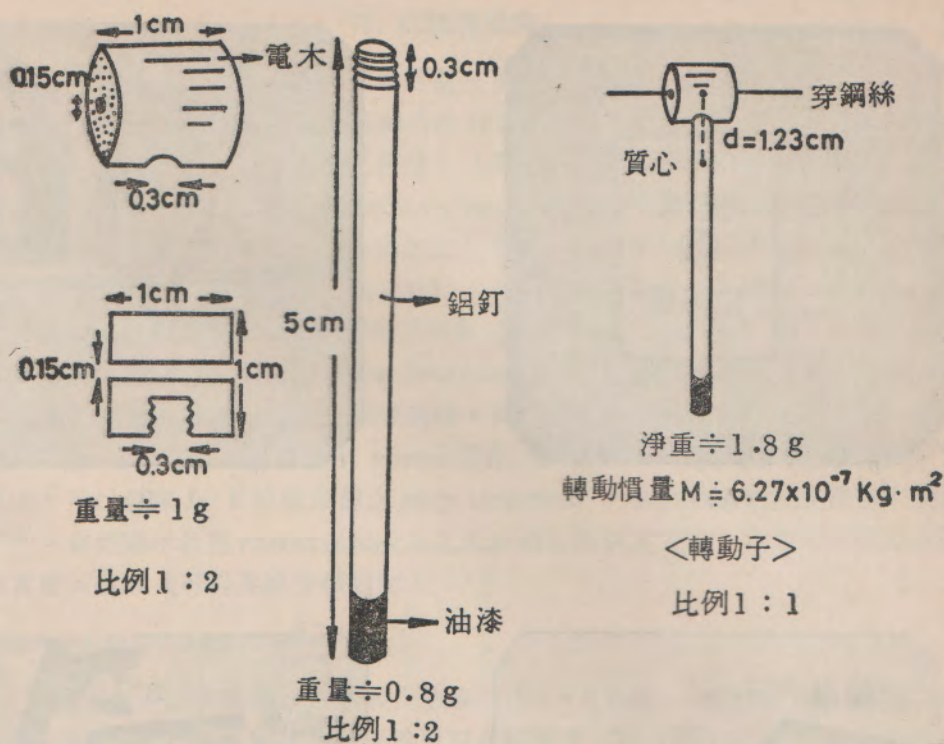
(B)



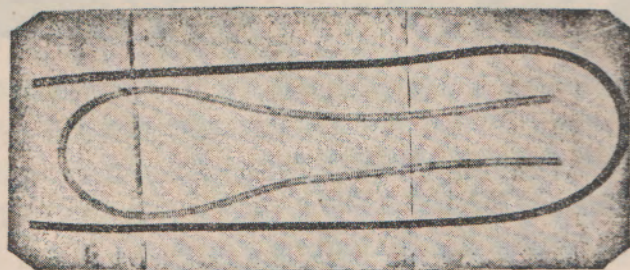
(C)

圖七：(A, B)乃附圖，表示螺旋轉動盤，至於(C)為整個鐵架平台圖形。於(C)圖中各英文字母表示部份如下：

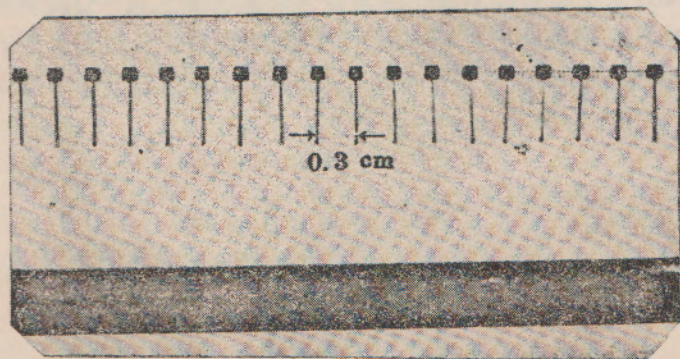
A—實心較重的鋼鐵底座。	B—平行底座，兩端鐸接於垂直支架。
C——穿越鋼絲細孔。	P—固定鋼絲兩端之螺旋扭。
S—為螺旋轉動盤。	H—水平測定儀。



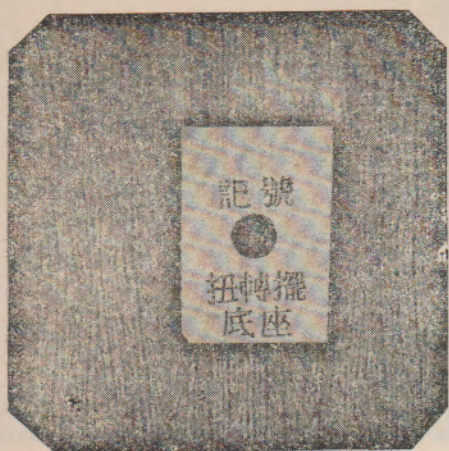
圖八：物理擺轉動子之製作設計圖。



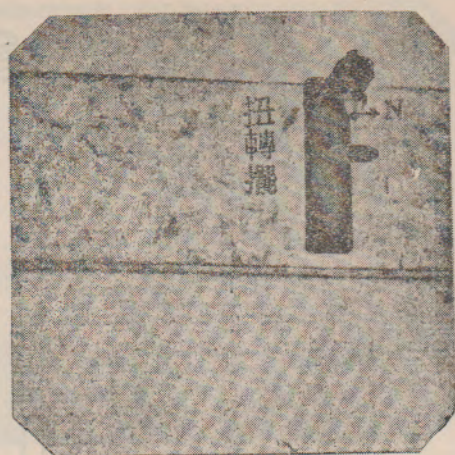
圖九：製作後彈簧圖形。



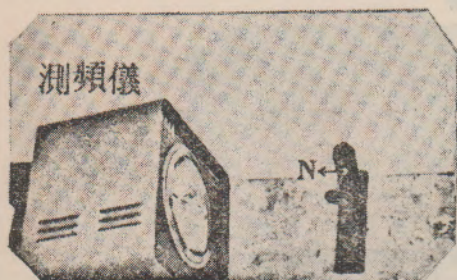
圖十：轉動子旋入彈簧內之間隔距離圖形。



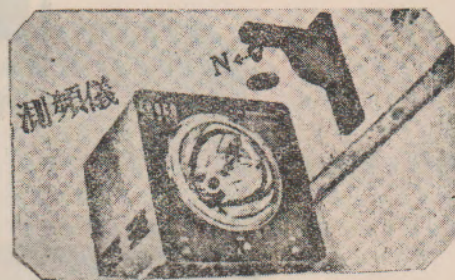
(A)



(B)



(C)



圖十一：扭轉擺

- (A) 乃扭轉擺底座穿入彈簧圖形。
- (B) 此擺之一端插入鋼夾之圖形。
- (C) 乃以測頻儀求其週期之情形。

IV. 討論與結論

由前章之力學類比實驗，使我們能更進一步地認識 Klein-gorden 方程式所顯示之物理現象— Josephson 效應。如小振動於此力學類比儀所顯示之波形〔圖十二(A) ~ (圖十二 B)〕即表示了電漿橫波之傳遞。(圖十三)到(圖十四)之大振幅波動與週期性波動，乃表示了在 long Josephson junction 中量子通量(flux)之運動情況。(圖十五 A)到(圖十五 B)代表脈動之交互作用，由圖中可以很明顯的看出，當一運動之脈動碰撞到另一靜止之同轉向脈動時，則前者即將能量傳給靜止之脈動，使其以等波速前進，此結果與 Scott⁽¹¹⁾ 所得之結果完全相符。

本實驗最主要的乃在於解說 long Josephson junction 中 vortex 慣性運動現象。因本力學類比儀之設計相當無外加磁場時，符合了 long Josephson junction 之要求 ($l \approx 0.12 m$ ，即 $L \gg l$)。超導體中 vortex 慣性運動現象於 1973 年首先由 Fulton⁽²¹⁾ 等人提出，用以解釋 $I-V$ 特性曲線之 step structure，且這些已在許多實驗中發現^(16, 19, 20)。當然顯示此種 vortex 運動現象之最經濟而簡便之方法，乃是用力學類比儀器來做實驗。由(21)式可得非線性脈動解：

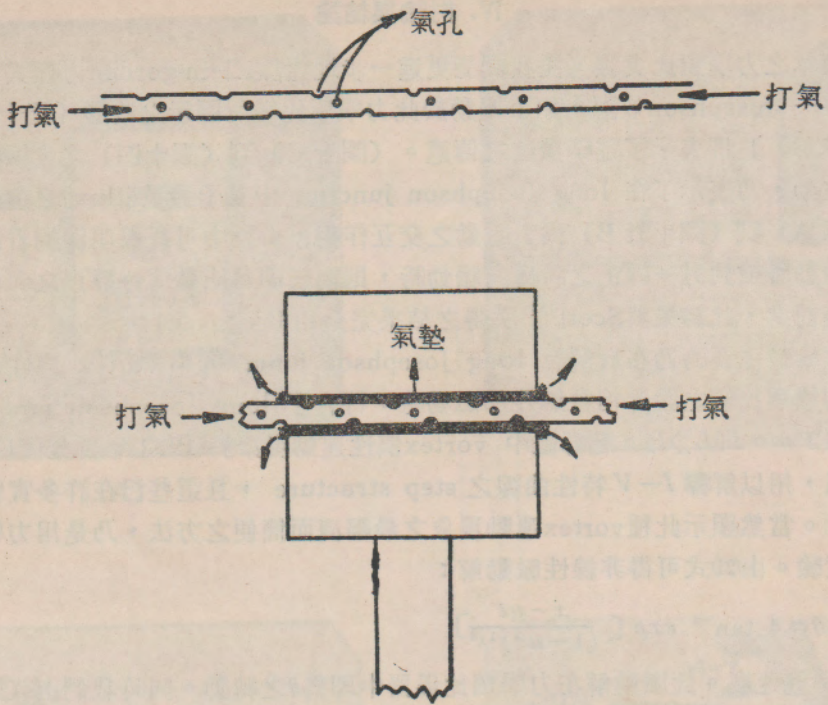
$$\theta = 4 \tan^{-1} \exp \left[\frac{x-ut}{(1-u^2)^{1/2}} \right]$$

u 為波之傳遞速度。此脈動解在力學類比儀器中即為 θ 之轉動。同時我們由(圖十五 A、B)中得知，當 vortex 相碰撞時能量可以互相傳遞，在(圖十六)中 vortex 在邊緣時亦可反射產生 Antivortex，由上述兩種現象，由此實驗我們敢進一步大膽的確認 Fulton 和 Dyne 對 Josephson junction 在無外加磁場所產生的自我共振模式 (Self-resonance mode) 是對的。然由於 damping 不夠小，即轉動子與穿越轉動子間之鋼絲摩擦乃稍大，故此結果仍有待改進。

欲使其間摩擦幾近於零，作者認為可將穿越轉動子之鋼絲改成細鋼管，然後於此鋼管中貫穿一些細孔，於鋼管兩端連通稍大馬力 ($\frac{1}{4} HP$) 之壓縮打氣唧筒，則轉動子與鋼管間即可形成一層氣墊，則此於轉動子於轉動時必形成無摩擦存在，如(圖十七)，不過壓縮打氣唧筒之馬力不宜過大，否則氣墊流速太快會使轉動子有振顫現象發生，但馬力也不宜太小，否則形成氣墊不足於支持轉動子重量，這些均有待於實驗者的改進。

作者認為經過小心的改進 Damping 情形，將可進一步探求 Josephson junction 共振時電流強度與 Q 一值之間的關係。並且在小振幅的情形下求取 ω 與 k 的關係。

最後，作者希望以此文做為拋磚引玉引起國人對 Josephson effect 的瞭解之外，並促使一般大學生能對此 Klein-Gordon 非線性方程式的物理現象有一直覺的觀念。



圖十七：欲減少轉動子與鋼絲間摩擦所設計之穿孔細鋼管與轉動子和細鋼管間所形成氣墊圖。

本文承蒙國立交通大學郭義雄博士及韓建珊博士兩位教授的指導，在此誌謝。更感謝郭義雄博士准予採用其博士論文中部份的圖形，且深深感謝兩位在實驗中及討論時不惜犧牲寶貴時間來協助。

參 考 文 獻

1. B. D. Josephson, Phys. Let. 1, 251 (1962).
2. W. H. Parker, D. N. Langenberg A. Denenstein and B. N. Taylor, Phys. Rev. 177, 639 (1967).
3. J. Clarke Am. Jou. of Phys. 38, 1071 (1970).
4. R. L. Gorgaes and A. Warnik Rev. Sci. Instrum. 38, 214 (1967).
5. J. Clarke. Phil. May. 13. 115 (1963).
6. B. Ulrick, in Proc. of 12th International Conf. on Low Temp. Phys. edited by Eiza Kanda. (Academi. of Japan Kyoto, 1971).
7. J. Matisoo, Appl. Phys. Letter, 9. 167 (1966).
P. W. Anderson, R. C. Dynes and T. A. Fulton Bule. Am. Phys. Soc. 16, 399 (1971).
8. P. W. Anderson, Lecture on the Many-Body Prob. edited by E. R. Cainello, (Academic. N. Y. 1964) Vol. 2, p. 113.
9. A. C. Scott, Am. Jou. of Phys. 37, 52 (1969).
10. D. B. Sullivon and J. E. Zimmerman, Am. Jou. of Phys. 39, 1504 (1971)
11. G. Rochlin and P. K. Hansma. Am. Joul. of Phys. 41, 878 (1973).
12. A. Kochendorfer, A. Seeger and H. Donth. Z. Physik 127, 533 (1950), 134, 173 (1953).
13. T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Sor. (London) A232, 237 (1951) U. Enz. Phy. Rev.131, 1392 (1963).
14. L. N. Cooper, Phys. Rev. 104, 1181 (1955).
15. J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer. Phys. Rev. 103, 1175 (1957).
16. Feynman Lectures on Phys. Vol. 3 (1965).
17. Y. S. Goa Ph. D Thesis SUNY atBuffalo Unpublished (1913).
18. S. Shapiro. A. R. Ganus and S. Holly. Rev. Mod. Phys. 36, 223 (1964).
19. M. D. Fiske, Rev. Mod. Phys. 36, 221 (1964).
20. J.T. Chen, T. F. Finnegau and D. N. Langenberg, Proceedings of the International Conferen ce on Superconducting, Amesterdon 1971, P. 413.
21. T. A. Fultno and R. C. Dynes, Solid State Commu. 12, 1, 57 (1973)