蒙特卡羅法之應用

(二)數學問題之計算

The Applications of Monte Carlo Method

Part II: Calculation of Mathematical Problems

葛必昭　顏守謙

摘　要

本文之目的在於介紹蒙特卡羅法在數學方面之應用。先求重積分，以示蒙特卡羅法之優點，再研究反矩陣及偏微分方程式，以示各種數學問題均可以蒙特卡羅法求其解答。文中各例題均寫成計算機程序計劃，並用交大計算機IBM-1620電子計算機加以計算。

1. 重積分

關於一重積分之問題，已於前期（交大學刊第一卷第二期）中加以闡述且曾舉例說明過，並特別强調下式之重要性：

$$\sigma_{S/N}{}^2 = \frac{1}{N}(1-I)I \tag{1.1}$$

或

$$\sigma_{S/N} = \sqrt{\frac{1}{N}(1-I)I} \tag{1.2}$$

而其極大值爲；當$I=\frac{1}{2}$時，時

$$\sigma_{S/N} \leqq \frac{1}{2\sqrt{N}} \tag{1.3}$$

即若N=10000時，

$$\sigma_{S/N} \leqq \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200} = 0.005 \tag{1.4}$$

異言之，試行 10000 次於蒙特卡羅法之積分計算時，可得其標準離差 (Standard Error) 之值必不大於 0.005。上述情形實際上不僅實用於單重積分，也實用於雙重、三重甚至於多重積分。在數值分析 (Numerical Analysis) 裡有許多很好的解積分的方法，但也有許多意想不到的困擾。以10重積分爲例：

$$F = \int_{x_1'}^{x_1''}\int_{x_2'}^{x_2''}\int_{x_3'}^{x_3''}\cdots\int_{x_{10}'}^{x_{10}''} f(x_1,x_2,x_3\cdots x_{10})\,dx_1dx_2dx_3\cdots dx_{10} \tag{1.5}$$

將每一x_i'至x_i''之範圍粗分成10點，則共可得10^{10}點。雖用高速電子計算機計算，仍費時甚多且誤差亦甚大。但用蒙特卡羅法解之，則捷便多矣！

仿照單一積分，首先應將各積分之上下限全部改為從0至1，以應需要。例如：

$$I=\int_{z_1'}^{z_1''}\int_{z_2'}^{z_2''}\cdots\int_{z_k'}^{z_k''} f(z_1,z_2,\cdots z_k)dz_kdz_{k-1}\cdots dz_2dz_1 \tag{1.6}$$

令

$$X_i=\frac{z_i}{z_i''-z_i'}-\frac{z_i'}{z_i''-z_i'} \qquad i=1,2,\cdots k \tag{1.7}$$

則

$$(z_i''-z_i')dx_i=dz_i \qquad i=1,2\cdots k \tag{1.8}$$

故

$$I=\int_{z_1'}^{z_1''}\int_{z_2'}^{z_2''}\cdots\int_{z_k'}^{z_k''} f(z_1,z_2,\cdots z_k)dz_kdz_{k-1}\cdots dz_1$$

$$=(z_1''-z_1')(z_2''-z_2')\cdots(z_k''-z_k')\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{k's}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots x_k)dx_kdx_{k-1}\cdots dx_1 \tag{1.9}$$

或

$$I=\left[\prod_{i=1}^{k}(z_i''-z_i')\right]\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{k's} f(x_1,x_2,\cdots x_k)dx_kdx_{k-1}\cdots dx_1 \tag{1.10}$$

如此，則可以亂數之排列產生而得座標點$(x_1,x_2,\cdots x_k)$，然後再視此$(x_1,x_2,\cdots x_k)$點所對應之$f(x_1,x_2,\cdots x_k)$之值而決定該次試行應否屬於成功。照此相同步驟重覆試行N次後，取其成功次數S與N之比數S/N，即為I之近似值。此法所得之值雖不甚正確，但若試行次數N甚大時，其S/N與I之間之誤差應在可容忍範圍內。當然此時$f(x_1,x_2,\cdots x_k)$之值應於0與1之間，否則即為無意義，故於正式計算前需加以適當變形，即令

$$f(x_1,x_2,\cdots x_k)=10^n g(x_1,x_2,\cdots x_k) \tag{1.11}$$

上式中，n為正整數及$g(x_1,x_2,\cdots x_k)\leqq 1$

故

$$I=\left[\prod_{i=1}^{k}(z_i''-z_i')\right]\cdot 10^n\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{k's_s} g(x_1,x_2,\cdots x_k)dx_kdx_{k-1}\cdots dx_1 \tag{1.12}$$

例題：

1.試以蒙特卡羅法求

$$A=\int_2^5\int_3^7 (x^2+y^2)dydx \tag{1.13}$$

之值

解：令

$$x_1=\frac{y}{7-3}-\frac{3}{7-3}=\frac{y-3}{4} \tag{1.14}$$

$$x_2=\frac{x}{5-2}-\frac{2}{5-2}=\frac{x-2}{3} \tag{1.15}$$

則 $dx_1=\frac{1}{4}\,dy$ 或 $dy=4dx_1$ (1.16)

$dx_2=\frac{1}{3}\,dx$ $dx=3dx_2$ (1.17)

∴

$$A=\int_2^5\int_3^7 (x^2+y^2)dydx$$

$$=\int_0^1\int_0^1 [(3x_2+2)^2+(4x_1+3)^2](4dx_1)(3dx_2)$$

$$=12\int_0^1\int_0^1 (9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13)dx_1dx_2 \tag{1.18}$$

為欲上式中$(9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13)$之值能介0與1之間，再令

$$9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13=100\left(\frac{9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13}{100}\right) \tag{1.19}$$

故

$$A=12\int_0^1\int_0^1 (9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13)dx_1dx_2$$

$$=12\int_0^1\int_0^1 100\left(\frac{9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13}{100}\right)dx_1dx_2$$

$$=1200\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{9x_2^2+16x_1^2+12x_2+24x_1+13}{100}\right)dx_1dx_2 \tag{1.20}$$

得流程圖(Flow—Chart)如下：

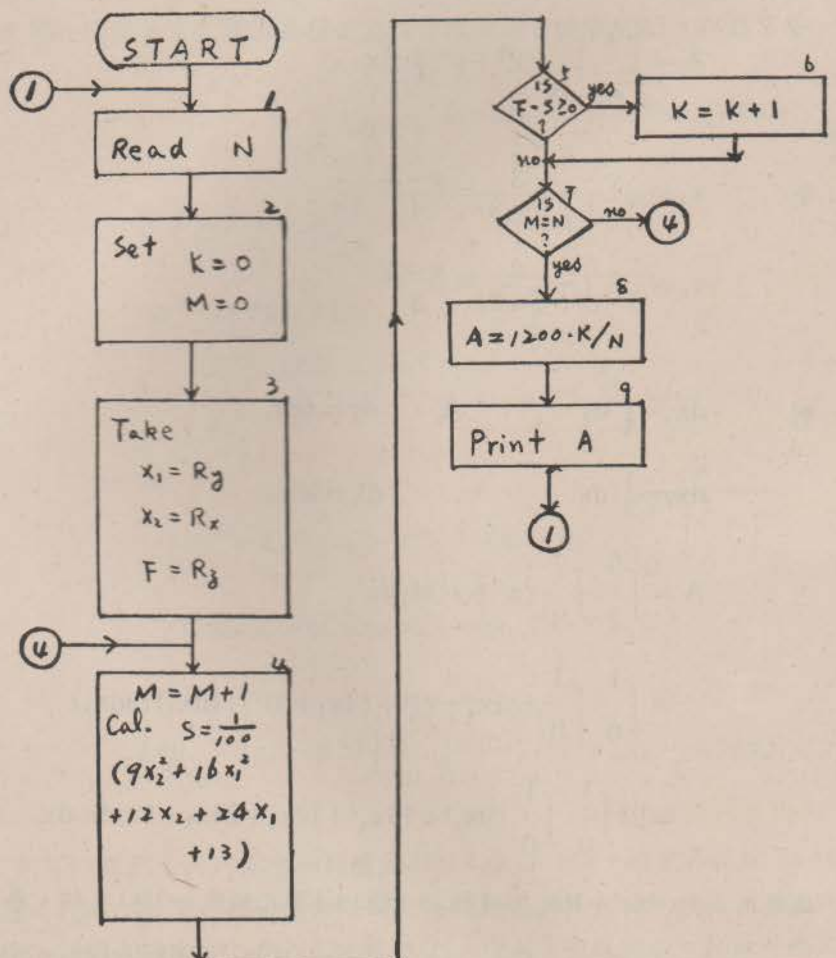

圖　一

程序計劃(Program)見附錄一，求得以下各N時之A之值：

N	A
100	464.2
500	465.8
1000	469.6

而根據筆算 A之實際值應爲 472，可見誤差並不很大。又若 N 再繼續增大

，則所得A值將更為接近A之眞值472。

上例並不足以顯示蒙特卡羅法之神奇優異，茲再舉一二十重積分之例：

2.試求

$$B=\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{20's}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)dx_{20}dx_{19}\cdots dx_1 \tag{1.21}$$

之值

解：

$$B=\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{20's}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)dx_{20}dx_{19}\cdots dx_1$$

$$={}_{10^2}\overbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}^{20's}\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots x_{20}^2}{100}\right)dx_{20}dx_{19}\cdots dx_1 \tag{1.22}$$

而得

N	B
100	95
500	93.6
1000	92.7

其程序計劃見附錄二。

2. 反矩陣

如欲求N階矩陣(Matrix)〔A〕之反矩陣(Inverse Matrix)〔A〕$^{-1}$，以蒙特卡羅法(Mante-Carlo Method)解之，令I表單位矩陣（除對角線上每一元素為1外其餘各元素均為0之矩陣），則使

$$B=I-A \tag{2.1}$$

或

$$A=I-B \tag{2.2}$$

$$\therefore A^{-1}=(I-B)^{-1}=I+B+B^2+B^3+\cdots \tag{2.3}$$

故

$$[A^{-1}]_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}[B^k]_{ij} \tag{2.4}$$

解此過程猶如一精彩有趣之遊戲，首先準備N個小罐子 u_1，u_2，u_3，$\cdots u_N$；於每一罐中再貯放N+1個小球，各標以1，2，3…，N及N+1之記號，其中除第N+1個

球加附"停止"(STOP)標誌外，其餘N個小球均各有其被罐中取出之或然率爲$P_{ij}(j_j=1.2\cdots N)$，P_j爲第j罐中"停止"球被取出之或然率，且能滿足以下二條件：

$$0\leq P_{ij} \qquad 及 P_i+\sum_{j=1}^{N} P_{ij}=1 \tag{2.5}$$

時，再另取V_{ij}，使

$$B_{ij}=P_{ij}\ V_{ij} \tag{2.6}$$

即

$$V_{ij}=B_{ij}/P_{ij} \tag{2.7}$$

開始時，先從u_i中取出一球，視其編號如爲$i_1(1\leq i_1\leq N)$，則從u_{i1}中再取一球而再視其編號如爲$i_2(1\leq i_2\leq N)$，則再從u_{i2}中再取一球，直至從u_k中取出"停止"球時，再檢視k之值而可得G_{ij}之值如下：

$$G_{ij}=\left\{\begin{array}{l} o \quad \text{if} \quad j\neq k \\ V_{ii_1}\ V_{i_1i_2}\cdots V_{i_{k-1}j}\ P_j^{-1}\ \text{if}\ j=k \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

於此，$i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_{k-1}\to j$表從i至j所經之路線，或以$\rho$表之。我們可得以下很奇妙之結果：

因爲沿ρ路線行進而停於j之或然率應爲

$$P\rho P_j=P_{ii_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{k-1}j}\ P_j \tag{2.9}$$

則預計之全程之計算爲

$$E(G_{ij})=\sum_{\rho}(P\rho P_j)(V\rho P_j^{-1})=\sum_{\rho}P\rho V\rho \tag{2.10}$$

但因$P_{ij}\ V_{ij}=B_{ij}$(2.6式)

故

$$\begin{aligned} E(G_{ij}) &=\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{i_1=1}^{N}\ \sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{N} B_{ii_1}\ B_{i_1i_2}\cdots B_{i_{k-1}j} \\ &=I_{ij}+\sum_{k=1}^{\infty}(B^k)_{ij} \\ &=(A^{-1})_{ij} \end{aligned} \tag{2.11}$$

易言之，預料中之G_{ij}之值正好爲$(A^{-1})_{ij}$之近似值，若試驗回數甚多，其平均值當更爲理想。

以上計算之差異數爲

$$\sigma_{ij}^2=H_{ij}P_j^{-1}-(A^{-1})_{ij}^2 \qquad H=(I-B)^{-1} \tag{2.12}$$

若利用IBM－1620電子計算機計算時，遊戲者本身即爲計算機。它之所以能從i到i_1，而到i_2，……而直到j爲止，都完全是由亂數(Random Number)來指揮，且計算時可以一次同時求得整列之結果而不須每一元素每一元素去計算，僅畫得其計算過程之流程圖如下：

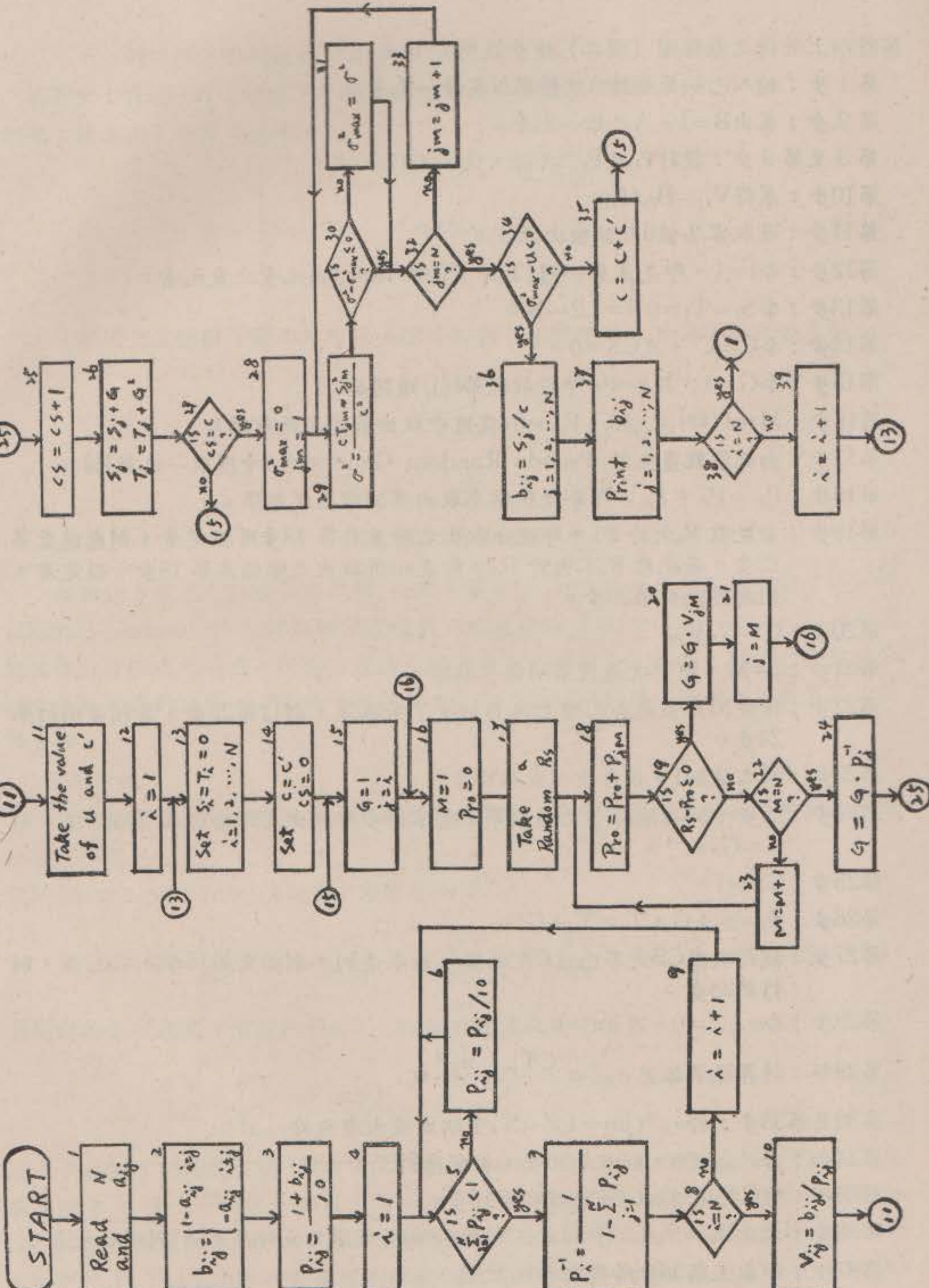
START
Read N and aij
Pij = Pij /10
i = i + 1
Take the value of u and c'
i = 1
Set Si = Ti = 0 i=1, 2, …, N
Set c = c' cs = 0
G = 1 j = i
M = 1 Pro = 0
Take a Random Rs
Pro = Pro + PjM
G = G · VjM
j = M
M = M + 1
G = G · Pi-1
cs = cs + 1
c = c + c'
jm = jm + 1
Print bij j = 1, 2, …, N
yes
no

圖 二

茲將以上所得之流程圖（圖二）逐步說明於下：

第1步：輸入已知原矩陣A之階數N及每一元素a_{ij}。

第2步：求出B=I−A之每一元素。

第3至第9步：設計p_{ij}及P_i^{-1}之值，使滿足(2.5)式。

第10步：求得$V_{ij}=B_{ij}/p_{ij}$。

第11步：選取容忍值u及試驗次數C′。

第12步：令i=1，即先求第一列(The First Row)各元素之反元素。

第13步：令$S_i=T_i=0$ i=1,2…N。

第14步：令C=C′，及CS=0。

第15步：令G=1，及j=i，即遊戲從第i(j)罐開始。

第16步：M=1(即i_1之值)，$P_{ro}=0$(從罐中取出各球之或然率)

第17步：由近亂數產生器(Pseudo Random Generator)中攫取一亂數Rs。

第18步：$P_{ro}=P_{ro}+p_{jM}$，即令或然率爲取出第M球之或然率。

第19步：若亂數R_s大於P_{ro}，即表示取出之球並非第18步所假定者，則應跳至第22步。若亂數R_s不大於P_{ro}，即表示所取出之球恰爲第18步所假定者，則應再跳至第20步。

第20步：$G=G\cdot V_{jM}$

第21步：j=M，即下次應從第M罐中取球。

第22步：檢查M之值是否已增至與N相等？若不等，則行第23步，若相等則行第24步。

第23步：M之值加1，後再重回至第18步。

第24步：22步中M之值與N之值相等，表示18步所取出之球恰好爲"停止"球，則$G=G\cdot p_j^{-1}$。

第25步：CS加1。

第26步：$S_j=S_j+G$，$T_j=T_j+G^2$。

第27步：試行次數CS是否已達C之極限？若未達到，則回至第15步，若已滿，則行第28步。

第28步：令$\sigma_{max}^2=0$，及jm=1。

第29部：計算標準離差$\sigma_{jm}^2=\dfrac{CT_{jm}-S_{jm}^2}{C^2}$。

第30至第33步：於σ_{jm}^2(jm=1.2…N)中取出最大者放於σ_{max}^2。

第34步：若$\sigma^2_{max}<u$，則跳至36步，否則應行35步。

第35步：讓C之值增加C′，然後回至15步。

第36步：求出$B_{ij}=S_j/C$ (j=1.2…N)此即爲所欲求之反矩陣之第i列之各元素。

第37步：印出上第36步所得之各B_{ij}之值。

第38步：是否每一列均已求出？若均已求出，則回至第1步，準備計算下一個新

的矩陣，否則就行第39步。

第39步：將i值加1（即求下一列之各值）後再回至第13步。

例題：試求出下矩陣之反矩陣

$$A=\begin{pmatrix} 0.80 & -0.10 & -0.05 \\ -0.20 & 0.80 & -0.05 \\ -0.10 & -0.01 & 1.15 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

根據上流程圖（圖二）可得一程序計劃（見附錄三），而計算出結果爲：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1.26 & 0.00 & -0.39 \\ 0.00 & 0.01 & 0.22 \\ 0.00 & 0.05 & 0.94 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

3. 偏微分方程式

偏微分方程式之解法雖有數種，但多繁雜。近代吾人多利用數值電子計算機 (Digital Computer) 以解偏微分方程式。數值分析 (Numerical Analysis) 乃成爲解偏微分方程式之利器，但觀其方法，仍然有多處難以令人滿意，因此乃將數值分析賦予或然率的性質，以蒙特卡羅法解之，則可縮短解問題之時間，並避免不必要的步驟。

(a)數學分析：

試以橢圓偏微分方程式爲例，解釋此種問題。其他偏微分方程式可按照此種方法獲得解答。

設Poisson's equation 以二度空間表示如下：

$$\beta_{11}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\beta_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\beta_{22}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+2\alpha_1\frac{\partial V}{\partial x}+2\alpha_2\frac{\partial V}{\partial y}=F(x,y) \tag{3.1}$$

爲使討論方便起見，可將Poisson's equation簡化如下：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=F(x.y) \tag{3.2}$$

以上式爲例，則高度空間 (Higher Dimensional Space) 之方程式，也可摸擬其步驟而解之。圖三平面爲一網目式間隔，平行線間之距離爲 h，設 D 爲 Poissons equation之區域(region)，Γ爲D之邊界曲線，區域D可以各平行線之交叉點表示之。如P,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5等。Γ 曲線則以最接近 Γ 曲線之平行線交叉點表示之，如 Q_1, Q_2,Q_3等。如果要提高其準確度，須將網目變小，亦即減小h之值。

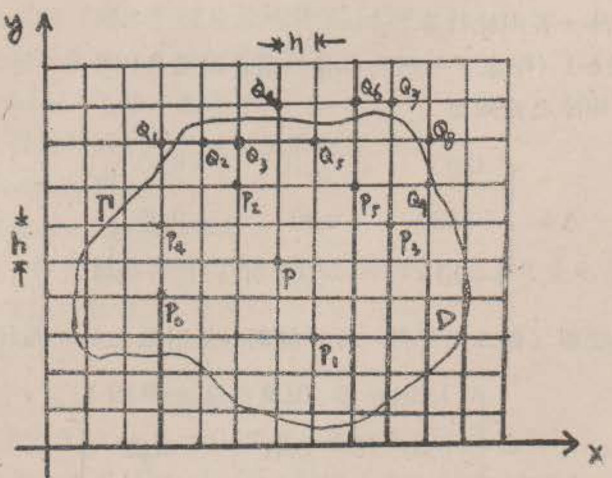

圖　三

因
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{V(x,y+h)-V(x,y)}{h} \tag{3.4}$$

若h值很小，則其接近方程式爲

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x+\frac{h}{2}}=\frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h} \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x-\frac{h}{2}}=\frac{V(x,y)-V(x-h,y)}{h} \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y+\frac{h}{2}}=\frac{V(x,y+h)-V(x,y)}{h} \tag{3.7}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y-\frac{h}{2}}=\frac{V(x,y)-V(x,y-h)}{h} \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x}=\frac{\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x+\frac{h}{2}}-\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x-\frac{h}{2}}}{h} \tag{3.9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y} = \frac{\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y+\frac{h}{2}} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y-\frac{h}{2}}}{h} \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|_{x,y} = \frac{\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x+\frac{h}{2}, y=y+\frac{h}{2}} - \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x+\frac{h}{2}, y}}{h} \tag{3.11}$$

設 $v(p)=v(x,y)$，$v(p_1)=v(x+h,y)$，$v(p_2)=v(x,y-h)$, $v(p_3)=v(x-h,y)$，$v(p_4)=v(x,y+h)$，$v(p_5)=v(x+h,y+h)$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 v(p)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}[v(p_1)+v(p_3)-2v(p)] \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 v(p)}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}[v(p_2)+v(p_4)-2v(p)] \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 v(p)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h^2}[v(p_5)+v(p)-v(p_1)-v(p_4)] \tag{3.14}$$

將方程式(3.12)，(3.13)代入(3.2)式，獲得：

$$v(p) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} v(p_i) - \frac{1}{4}h^2F(p) \tag{3.15}$$

將方程式(3.12)，(3.13)，(3.14)代入(3.1)式，得

$$v(p) = \sum_{i=1}^{5} p_i(p)\ (p_i) - \frac{h^2 F(p)}{D(p)} \tag{3.16}$$

p_i之係數如下：

$$p_1(p) = \frac{1}{D}(\beta_{11}-2\beta_{12}+2h\alpha_1) \tag{3.17}$$

$$p_2(p) = \frac{1}{D}(\beta_{22}-2\beta_{12}+2h\alpha_2) \tag{3.18}$$

$$p_3(p)=\beta_{11}/D \tag{3.19}$$

$$p_4(p)=\beta_{22}/D \tag{3.20}$$

$$p_5(p)=2\beta_{12}/D \tag{3.21}$$

$$D(p)=2\beta_{11}+2\beta_{22}-2\beta_{12}+2n(\alpha_1+\alpha_2) \tag{3.22}$$

調整 p_i，使 $\sum_{i=1}^{5} p_i(p)=1$

方程式 (3.15)及(3.16) 爲差分方程式(Difference equation)，當h趨近於零時，則可獲得方程式(3.1)及(3.2)之答案。

(b)亂步過程：

按照亂步過程(Random walk procedure)可解方程式(3.15)，(3.16)如下：

如圖三，若要求偏微分方程式P_o點之數值，可假設有一質點由P_o出發在網目中作亂步，設此質點已到達某一位置 p，它走向 p_1，p_2，p_3，p_4及p_5位置之或然率各爲 $p_1(p)$，$p_2(p)$，$p_3(p)$，$p_4(p)$及$p_5(p)$，當此質點到達邊界點(Boundary point)Q_i，此質點則停止不動。設$\phi(Q_i)$爲此邊界點之V(x,y)之函數，$F(p_i)$爲質點經過各交叉點之F(x,y)函數，則方程式(3.15)可由下式推得之：

$$Z_i=-\sum_j \frac{1}{4}h^2[F(p_j)]+\phi(Q_i) \tag{3.23}$$

方程式(3.16)可由下式推得：

$$Z_i=-\sum_j \frac{h^2F(p_j)}{D(p_i)}+\phi(Q_i) \tag{3.24}$$

則$V(p_o)$之數值可爲許多Z_i值之平均值

$$V(p_o)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i \qquad (N\to\infty) \tag{3.25}$$

誤差可由Variance σ^2估計之：

$$\sigma^2(V(p_o))=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^2-V^2(p_o) \tag{3.26}$$

因此，方程式(3.2)之解可由流程圖（圖四）表示之

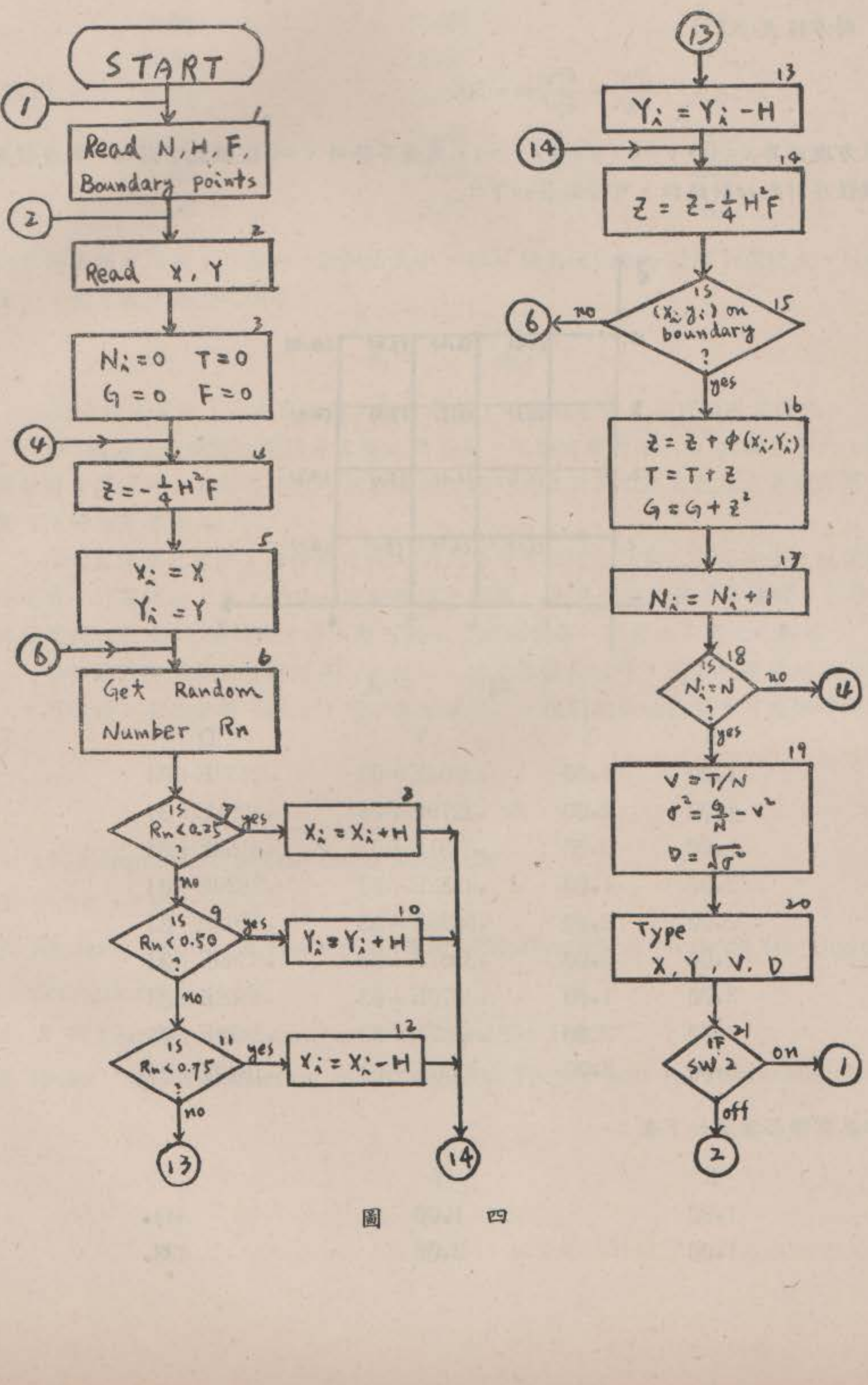
START
Read N, H, F, Boundary points
Read X, Y
Ni = 0 T = 0
G = 0 F = 0
Z = -1/4 H²F
Xi = X
Yi = Y
Get Random Number Rn
IS Rn < 0.25 ?
yes
no
Xi = Xi + H
IS Rn < 0.50 ?
Yi = Yi + H
IS Rn < 0.75 ?
Xi = Xi - H
Yi = Yi - H
Z = Z - 1/4 H²F
IS (Xi, Yi) on boundary ?
Z = Z + φ(Xi, Yi)
T = T + Z
G = G + Z²
Ni = Ni + 1
IS Ni = N ?
V = T/N
σ² = G/N - V²
D = √σ²
Type X, Y, V, D
IF SW 2
on
off

圖 四

(C)例題：

解方程式(3.27)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-500 \tag{3.27}$$

在方塊邊界x=0，y=0，x=4，y=4，其邊界條件v=0按照流程圖四，寫成計算機程序計劃如附錄四，可得解答如下：

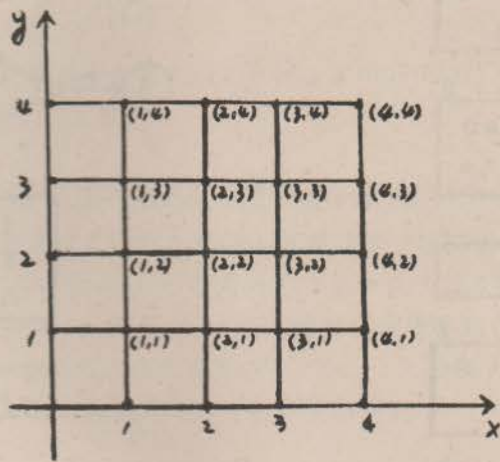

圖　　五

X	Y	V	D
1.ØØ	1.ØØ	.3364E+Ø3	.2633E+Ø3
1.ØØ	2.ØØ	.4279E+Ø3	.4291E+Ø3
1.ØØ	3.ØØ	.3431E+Ø3	.3168E+Ø3
2.ØØ	1.ØØ	.4382E+Ø3	.2829E+Ø3
2.ØØ	2.ØØ	.5835E+Ø3	.3762E+Ø3
2.ØØ	3.ØØ	.3967E+Ø3	.3389E+Ø3
3.ØØ	1.ØØ	.387ØE+Ø3	.4389E+Ø3
3.ØØ	2.ØØ	.4337E+Ø3	.348ØE+Ø3
3.ØØ	3.ØØ	.3357E+Ø3	.184ØE+Ø3

但其實際答案應如下表：

X	Y	V
1.ØØ	1.ØØ	344.
1.ØØ	2.ØØ	438.

1.ØØ	3.ØØ	344.
2.ØØ	1.ØØ	438.
2.ØØ	2.ØØ	563.
2.ØØ	3.ØØ	438.
3.ØØ	1.ØØ	344.
3.ØØ	2.ØØ	438.
3.ØØ	3.ØØ	344.

比較兩表頗有誤差，乃由於所取N值太小，而H值太大之故。若將N值變大，H值變小，當可獲得滿意之結果。

結　論

(i)蒙特卡羅法，主要在於解決繁雜問題，問題越繁雜才越可顯現其優點。

(ii)數值分析裡對於重積分之解法雖甚多，但均需費時很多，且誤差亦大，但用蒙特卡羅法時，其計算過程即較爲單純，同時其差異數之範圍也很容易被容忍，實可省時省事甚多。

(iii)反矩陣之求法，若階數很大，引用普通方法時往往令人畏而却步，既使用高速電子計算機爲工具，仍爲一頭痛厭煩之問題。但若利用蒙特卡羅法時，只要u之值選得理想及c之值够大，吾人即可於短時間內獲得一誤差並不甚大之解答。

(iv)若只要求偏微分方程式一數值時，採用數值分析時，需將所有數值求出後，才可獲得。若用蒙特卡羅法，可以直接求得之，與別的數值無關，可縮短時間不少。

參 考 文 獻

1. J.M.Hammerley,"Monte Carlo Methods"
2. 中山隆，"モンテカルロ法"
3. Anthony Ralston & Herbert S. Wilf, "Mathematical Methods for Digital Computers"
4. W.W.Peterson, "Computing with the IBM 1620"
5. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Application"

附　　錄

附錄一：重積分例題一程序計劃

```
C       MULTIPLE INTEGRAL WITH MONTE CARLO METHOD
        OF EX.1 BY P. C. KO
  201   FORMAT (2HV=,E14.8)
  202   FORMAT (I4)
    1   ACCEPT 202,N
        K=0
        M=0
        W=0.
    4   M=M+1
        X=ATAN(W)
        Y=ATAN(W)
        Z=ATAN(W)
        S=(9.*X*X+16.*Y*Y+12.*x+24.*Y+13.)/100.
        IF(Z-S)2,3,3
    3   K=K+1
    2   IF(M-N)4,5,4
    5   AK=K
        AN=N
        V=1200.*AK/AN
        PRINT 201,V
        GO TO 1
        END
```

附錄二：重積分例題二程序計劃

```
C       MULTIPLE INTEGRAL WITH MONTE CARLO METHOD
        OF EX.2 BY P.C.KO
  401   FORMAT (2HV=,E14.8)
  402   FORMAT (I4)
        DIMENSION X(100)
    1   ACCEPT 402,N
        K=0
        M=0
```

```
      W=Ø.
    4 M=M+1
      DO 6 I=1,2Ø
    6 X(I)=ATAN(W)
      Y=ATAN(W)
      S=Ø.
      DO 7 I=1,2Ø
    7 S=S+(X(I)**2)/1ØØ.
      IF(Y-S)2,3,3
    3 K=K+1
    2 IF(M-N)4,5,4
    5 AK=K
      AN=N
      V=1ØØ.*AK/AN
      PRINT 4Ø1,V
      GO TO 1
      END
```

附錄三：反矩陣例題一般性程序計劃

```
C     FIND THE INVERSE MATRIX WITH MONTE CARLO
      METHOD BY P.C.KO
  1Ø1 FORMAT (I2)
  1Ø2 FORMAT (F4.2)
  1Ø4 FORMAT (F5.2,2XF5.2,2XF5.2)
      DIMENSION A(3Ø,3Ø),B(3Ø,3Ø),P(3Ø,3Ø),V(3Ø,3Ø),PI(3Ø),S(3Ø),T(3Ø)
    1 ACCEPT TAPE 1Ø1,N
      DO 2 K=1,N
      DO 2 L=1,N
    2 ACCEPT TAPE 1Ø2,A(K,L)
      DO 81 K=1,N
   81 PRINT 1Ø4,A(K,1),A(K,2),A(K,3)
      DO 3 K=1,N
      DO 3 L=1,N
      IF(K-L)5, 4, 5
    4 B(K,L)=1.-A(K,L)
```

```
      GO TO 3
    5 B(K,L)=-A(K,L)
    3 CONTINUE
      DO 6 K=1,N
      DO 6 L=1,N
    6 P(K,L)=(1.+B(K,L))/1Ø.
      DO 7 K=1,N
    9 PI(K)=1.
      DO 1Ø L=1,N
   1Ø PI(K)=PI(K)-P(K,L)
      IF(PI(K))8,8,7
    8 DO 11 L=1,N
   11 P(K,L)=P(K,L)/1Ø.
      GO TO 9
    7 PI(K)=1./PI(K)
      DO 12 K=1,N
      DO 12 L=1,N
   12 V(K,L)=B(K,L)/P(K,L)
      U=3Ø.
      CP=3.
      W=Ø.
      RS=Ø.
      DO 37 I=1,N
      DO 13 K=1,N
      S(K)=Ø.
   13 T(K)=Ø.
      C=CP
      CS=Ø.
   38 G=1.
      J=I
   16 M=1
      PRO=Ø.
      RS=ATAN(W)
   23 PRO=PRO+P(J,M)
      IF(RS-PRO)25,25,26
```

```
25  G=G*V(J,M)
    J=M
    GO TO 16
26  IF(M-N)27,42,27
27  M=M+1
    GO TO 23
42  G=G*PI(J)
43  CS=CS+1.
    S(J)=S(J)+G
    T(J)=T(J)+G*G
    IF(CS-C)38,29,38
29  SMAX2=Ø.
    JM=1
34  SMAX=(C*T(JM)-S(JM)**2)/(C*C)
    IF(SMAX-SMAX2)3Ø,3Ø,31
31  SMAX2=SMAX
30  IF(JM-N)32,33,32
32  JM=JM+1
    GO TO 34
33  IF(SMAX2-U)35,36,36
36  C=C+CP
    GO TO 38
35  DO 45 L=1,N
45  B(I,L)=S(L)/C
37  PRINT 1Ø4,B(I,1),B(I,2),B(I,3)
    GO TO 1
    END
```

附錄四：偏微分方程式例題程序計劃

```
C       S.C.YEN
C       ELLIPTIC PARTIAL EQ. BY MONTE CARLO METHOD
        DIMENSION RAND(1ØØ)
      1 FORMAT (I4,2F6.2)
      2 FORMAT (2F6.2)
      3 FORMAT (4F6.2)
```

```
 4  FORMAT (2X1HX,8X1HY,8X1HV,8X1HD)
 5  FORMAT (F7.2,1XF7.2,1XE1Ø.4,1XE1Ø.4)
 6  FORMAT (3F5.Ø,2F7.2,3E1Ø.4)
    RX=Ø.
11  ACCEPT 1,N,H,F
    ACCEPT 3,XP,XN,YP,YN
    TYPE 4
12  IF(SENSE SWITCH 1)13,14
13  ACCEPT TAPE 2,X,Y
    GO TO 15
14  ACCEPT 2,X,Y
15  NW=Ø
    G=Ø.
    T=Ø.
    FF=Ø.
16  Z=-F*H*H/4.
    S=Ø.
    XI=X
    YI=Y
23  RY=ATAN(RX)
    S=S+1.
    IF(RY-Ø.25)17,18,18
18  IF(RY-Ø.5)19,2Ø,2Ø
2Ø  IF(RY-Ø.75)21,22,22
17  XI=XI+H
    GO TO 24
19  YI=YI+H
    GO TO 24
21  XI=XI-H
    GO TO 24
22  YI=YI-H
24  Z=Z-F*H*H/4.
    IF(XI-XP)25,26,25
26  Z=Z+FF
    GO TO 27
```

```
25  IF(XI-XN)28,26,28
28  IF(YI-YP)29,30,29
30  Z=Z+FF
    GO TO 27
29  IF(YI-YN)23,30,23
27  T=T+Z
    G=G+Z*Z
    NW=NW+1
    IF(N-NW)33,32,33
33  IF(SENSE SWITCH 3)34,16
34  TYPE 6,S,X,Y,XI,YI, Z,T,G
    GO TO 16
32  WN=N
    V=T/WN
    D=SQRT(G/WN-V*V)
    TYPE 5,X,Y,V,D
    IF(SENSE SWITCH 2)11,12
    END
```