

臺北上空電離層實高及有關特性之計算

黃鐘洺 李宏洋

交通部電波研究所

摘 要

本文敘述交通部電波研究所用於計算臺北上空電離層實高之方法，判讀數據之方法，以及試算結果。理論上假設電子密度之高度變化為單調增加，並考慮地球磁場之影響，將虛高之積分式變換為便於數值計算之矩陣形式，並導出係數方陣因素，實高，最大電子密度，層厚等之計算公式。實際方面，由虛高對頻率之觀測數據，判讀整理實高計算用數據，利用電子計算機計算實高及其他有關特性。計算結果與美國國家標準局所計算者一致。

一、緒 言

本所使用電離層觀測機測定頻率對反射虛高之變化，所謂虛高即為假設垂直入射電波以光速經電離層傳播時，於實際傳播時間內應達到之高度。由於在電離層內電波之進行有遲延，虛高較實高為大，尤其於臨界頻率，虛高增至無限大。因此電離層觀測機所測出之電離層高度變化與實際情形大不相同，而須要由虛高對頻率之變化曲線計算實高對頻率之關係，方能獲得正確的電離層變化情況，有利於電離層物理之研究。

計算實高之方法繁多，但通常可分為兩大類，其一為模型法（或比較法），另一即為積分法（或積分方程式法）。模型法假定電子密度對實高之變化函數，計算電子密度對虛高之變化曲線，再與觀測曲線比較，以決定所假設之電子密度分布之參數，如最大電子密度之實高，半層厚等。此法之代表性者為 Booker-Seaton 法 (Booker and Seaton, 1940)，其特點為簡便，缺點即為不包含地球磁場之影響及多數層併存時之誤差大。此法在 Budden 之積分法未發表以前，廣泛地被採用作實高之計算。

虛高對頻率之變化，除了可由觀測求得外，亦可用群折射指數關於實高之積分表示之。積分法即為將該積分反演後得實高對頻率之解折解或數值解。早在 1930 年 de Groot 就研究無地磁時之解折解，但實際上地磁之影響不可不計，因此很少採用該法作實際計算。1954 年 Budden 之矩陣反演法問世，一方面電子計算機之發展迅速，積分法終於再度受世人之注目。目前已有英、美、德等之國家利用略為不同之積分法經常計算電離層之實高。

電波研究所鑒於實高計算之重要性，決定自行計算臺北上空電離層之實高變化，其計算方法及計算結果之介紹即為本文之目的。吾人於第二節將虛高之積分方程式反演為易於電子計算機演算之矩陣方式，於第三節導出計算該矩陣因素所需要之公式。各實高之電子密度，最大電子密度及實高，拋物線層四分之一厚與總電子數等之計算方法敘述於第四節。虛高對頻率變化之判讀，虛高之月中位曲線之繪製分別說明於第五及第六節。電子計算機演算程序及其使用步驟附錄於最後。

二、積分方程式之變換

電離層虛高 h' 係為頻率 f 之函數，一方面由垂直入射觀測可得，另一方面可用群折射指數 μ' 表示如下 (Budden, 1961)：

$$h'(f) = \int_0^{h_0} \mu' dh$$

式中 h_0 為反射點高度， μ' 為頻率 f ，電子密度 N 及地球磁場強度 \vec{H} 之已知函數。若不計地球磁場之影響，則(1)式可變換為 Abel 積分方程式 (de Groot, 1930)，其解折解不難得之。相反地，地磁不可省略時，(1)式之解折解不易得之。Budden (1954) 假設 N 為 h 之單調函數，並假定 N 與 h 之增分間之適當關係獲得可供於實用之數值解。

若以電漿頻率 f_N 代替電子密度，並祇考慮地球上某一點之垂直方向變化，則 μ' 可視為 f 及 f_N 之函數，即

$$h'(f) = \int_0^{h_0} \mu'(f, f_N) dh \quad (2)$$

式中

$$f_N^2 = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0 m} \quad (3)$$

e 為電子電量， m 為電子質量， ϵ_0 為自由空間之介質常數。 f_N 為 h 之函數，若其函數於 $0 < f_N < f$ 之範圍內為單調增加，則

$$h'(f) = \int_0^f \mu'(f, f_N) \frac{dh(f_N)}{df_N} df_N \quad (4)$$

此式係為 Volterra 積分方程式。吾人將假定頻率每隔 Δf 有一虛高數據，並設

$$h'(n\Delta f) = h'_n \quad n \text{ 為整數} \quad (5)$$

因(4)式不易積分，故將其積分分成上下限間隔為 Δf 之積分之和，並假設在每間隔， dh/df_N 為常數，即

$$\frac{dh}{df_N} \doteq \frac{h_m - h_{m-1}}{\Delta f} = \text{常數} \quad (6)$$

式中 h_m 為頻率等於 $m\Delta f$ 時之高度。如此(4)式可化為

$$h_n' \approx \sum_{m=1}^n \frac{h_m - h_{m-1}}{\Delta f} \int_{(m-1)\Delta f}^{m\Delta f} \mu'(n\Delta f, f_N) df_N \quad (7)$$

設

$$\left. \begin{aligned} M_{nm} &= \frac{1}{\Delta f} \int_{(m-1)\Delta f}^{m\Delta f} \mu'(n\Delta f, f_N) df_N & m \leq n \\ M_{nm} &= 0 & m > n \\ M_{nm} &= 1 & m = 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

則 M_{nm} 即為下三角矩陣，而(7)式可變成

$$\begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \\ h_3' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & \cdot \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & \cdot \\ M_{21} - M_{22} & M_{22} & 0 & \cdot \\ M_{31} - M_{32} & M_{32} - M_{33} & M_{33} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (10)$$

或以矩陣記號表示如下：

$$\bar{h}' = \bar{M} \bar{D} \bar{h} = \bar{A} \bar{h} \quad (11)$$

此式可反演為

$$\bar{h} = \bar{A}^{-1} \bar{h}' \quad (12)$$

本所所採用之計算法，並不經過此矩陣倒換，而將(10)式直接寫成(Thomas, 1959)，

$$\left. \begin{aligned} h_1' &= A_{11} h_1 \\ h_2' &= A_{21} h_1 + A_{22} h_2 \\ h_3' &= A_{31} h_1 + A_{32} h_2 + A_{33} h_3 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由此式可得

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{A_{11}} h_1' \\ h_2 &= \frac{-A_{21}}{A_{22}} h_1 + \frac{1}{A_{22}} h_2' \\ h_3 &= \frac{-A_{31}}{A_{33}} h_1 - \frac{A_{32}}{A_{33}} h_2 + \frac{1}{A_{33}} h_3' \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14)式之各係數可用下列矩陣表示之

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & - & - & - & B_{1m} & - & - & B_{1n} & - \\ B_{21} & B_{22} & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & - & - & - & - & - \\ B_{n1} & B_{n2} & - & - & - & B_{nm} & - & - & B_{nn} & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad (15)$$

方陣中

$$\left. \begin{aligned} B_{nm} &= -\frac{A_{nm}}{A_{nn}} \quad m \neq n \\ &= \frac{1}{A_{nn}} \quad m = n \\ &= 0 \quad m > n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

如此 h_1, h_2, \dots, h_n 之值可自 $n=1$ 起按順序由下式計算：

$$h_{n+1} = \sum_{m=1}^n B_{n+1,m} h_m + B_{n+1,n+1} h'_{n+1} \quad (17)$$

三、 \bar{B} 矩陣之計算

\bar{B} 矩陣之計算可歸納為 \bar{M} 方陣各因素(Element)之計算。但於(8)式 $m=n$ 時， $\mu'(n\Delta f, f_N)$ 取無窮大，而積分值產生很大誤差。為避免此異點，設

$$u = \sqrt{1 - \frac{f_N}{n\Delta f}}$$

則(8)式可化為

$$M_{nm} = 2n \int \frac{\sqrt{1 - (u-1)^2/n}}{\sqrt{1 - m/n}} \mu' u du \quad (19)$$

被積分函數可變換為

$$\mu' u = \mu' \sqrt{1 - \sqrt{x}} = \mu \mu' \sqrt{1 - \sqrt{x/\mu}} = \mu \mu' t \quad (20)$$

式中

$$x = \frac{f_N^2}{f^2} = \frac{f_N^2}{(n\Delta f)^2}$$

若電離層內之碰撞頻率可不計，則由Magneto-ionic Theory，層內電磁波之波極化 R 可表示如下(Huang, 1963)：

$$jY \cos\phi R^2 - \frac{Y^2 \sin^2\phi}{1-X} R + jY \cos\phi = 0 \quad (21)$$

式中 ϕ 為傳播方向與地球磁場方向所夾之角， Y 為

$$Y = \frac{f_H}{f}, f_H \text{ 爲迴旋頻率}$$

折射係數 μ 與 R 之關係爲

$$\mu^2 = 1 - \frac{X}{1 - jRY \cos \phi} \quad (22)$$

將(22)式之 R 值代入(21)式，經化簡後可得

$$A\mu^4 + 2B\mu^2 + C = 0 \quad (23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - x - y^2 + xy^2 \cos^2 \phi \\ 2B &= -2(1-x)(1-x-y^2) + xy^2 \sin^2 \phi \\ C &= (1-x)[(1-x)^2 - y^2] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(23)式之 t 滿足相似之方程式，即

$$c't^4 + 2B't^2 + A' = 0 \quad (25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c' &= (1 + \sqrt{x})[(1-x)^2 - y^2] \\ 2B' &= -2(1-x)(1-x-y^2) + xy^2 \sin^2 \phi \\ A' &= (1 - \sqrt{x})(1-x-y^2) + xy^2 \cos^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

由(25)式得

$$t^2 = \frac{-B' - \sqrt{B'^2 - A'C'}}{C'} = \frac{A'}{-B' + \sqrt{B'^2 - A'C'}} \quad (27)$$

(27)之兩式中應選用分母較大者，以避免計算除法時產生較大誤差。

群折射指數爲

$$\mu' = \mu + f \frac{\partial \mu}{\partial f} \quad (28)$$

ϕ 爲常數時， $\mu\mu'$ 可計算如下：

$$\begin{aligned} \mu\mu' &= \mu^2 + f\mu \frac{\partial \mu}{\partial f} \\ &= \mu^2 + f\mu \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{dx}{df} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{dy}{df} \right) \\ &= \mu^2 - x \frac{\partial \mu^2}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (29)$$

設

$$\mu^2 = 1 + qx \quad (30)$$

則
$$\mu\mu' = 1 - x^2 \frac{\partial q}{\partial x} - xy^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (31)$$

而q即滿足

$$aq^2 + 2bq + c = 0 \quad (32)$$

式中
$$\left. \begin{aligned} a &= A = 1 - x - y^2 + xy^2 \cos^2 \phi \\ 2b &= 2(1-x) - y^2 \sin^2 \phi \\ C &= 1-x \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

將q關於x及y²微分後，代入(31)式經化簡得

$$\mu\mu' = 1 - \frac{x}{2d} [(1+q)^2 - xy^2 q^2 \cos^2 \phi] \quad (34)$$

式中

$$q = \frac{-b+d}{a} = -\frac{c}{b+d}$$

與(20)式相同，吾人應選用(35)式中分母較大者。μμ' 值有時取很大之數值，故宜按下列順序計算（但計算機程序使用指數形式時，不在此限。）

$$q, t, (1+q)^2 t, txyq^2 \cos^2 \phi, \frac{tx(1+q)^2 - tx^2 y^2 q \cos^2 \phi}{2d} \mu\mu' t$$

求得各點之μμ't後，M_{nm}值，即(19)式之積分，可用Guass之積分公式行之(Kunz,)。n=m時使用其十點公式，而n≠m時使用四點公式。

按照此法計算M⁻方陣之各因素M_{nn}, M_{n,n-1} 一直到m=n_ℓ+1為止，n_ℓ為f_{-min}/Δf而f_{-min}係為最低頻率1.0兆週。算出M⁻矩陣後，A⁻及B⁻矩陣可由(10)及(14)式計算。(14)式對任何之虛高曲線均可應用，且1.0兆週以下之觀測虛高均可視為等值。因此，於(14)式，設觀測所得之每一頻率之虛高均為相等，即可知B⁻方陣之剩餘因素B_{n,mℓ}}應為}

$$B_{n,m\ell} = 1 - \sum_{m=n\ell+1}^n B_{nm} \quad (36)$$

臺北上空300公里高之f₁₁為1.07兆週，磁傾為34°。此兩數據用於矩陣因素之計算。若採用Δf=0.1 mc/s，計算F₂層臨界頻率為16兆週之電離層實高，則B⁻方陣因素數目需要多至11500個，即使利用電子計算機費時亦多達200小時。因此吾人將矩陣分為兩種，臨界頻率不超過8兆週者，使用Δf=0.1兆週之方陣，超過8兆週者，使用Δf=0.2兆週之方陣，而將方陣因素減至5000個。Δf=0.1兆週時之B⁻方陣之一部份列於第一表。

四、實高及其他特性之計算

每一記錄之虛高對頻率變化之數據，按照第二表之順序讀入電子計算機。該表之虛高數據末位上面有橫號(一)者。

第二表 虛高數據

數據	說明
18	地方時
58	最高觀測頻率
375	每隔 Δf 之虛高
351	
334	
322	
314	
306	
300	
295	每隔 $5\Delta f$ 之虛高
290	
277	
262	
256	
252	
248	每隔 Δf 之虛高
245	
245	
245	
245	
245	
1.0	最低頻率

與其下一數據之頻率間隔為 $5\Delta f$ 而非 Δf ，但計算實高以前，要先用下式內插求每隔 Δf 之虛高。

$$h' = af^3 + bf^2 + cf + d \quad (37)$$

依照(17)式計算各頻率(間隔為 Δf)之實高後由

$$N = 0.124f^2 \quad (38)$$

求算各實高之電子密度 N ，再應用直線內插求實高為10公里之整數倍時之電子密度。

由於偏向吸收或干擾之影響，不易讀出準確之 F_2 層臨界頻率，故若欲得最高電子密度及其高度，吾人必須由計算式求算(Howe, 1964)。假設 F_2 層之最大密度附近之密度分布為拋物線，即

$$\frac{N}{N_m} = \left(\frac{f_N}{f_m} \right)^2 = 1 - \left(\frac{h_m - h}{2S} \right)^2 \quad (39)$$

式中 N_m 為最高電子密度， f_m 為正常波臨界頻率， f_N 為 h 公里高之電漿頻率， S 為拋物線層厚之四分之一。將(39)式關於微分得，

$$\frac{2f_N}{f_m^2} \frac{df_N}{dh} = \frac{h_m - h}{2S^2}$$

或

$$\frac{(h_m - h)z}{f_N} = \frac{4S^2}{f_m^2}$$

式中

$$z = \frac{dh}{df_N}$$

於拋物線區域之任何一點，(41)式右邊為常數，故取該區域內之兩點 h_1, h_2 時，

$$\frac{(h_m - h_1)z}{f_{N1}} = \frac{(h_m - h_2)z_2}{f_{N2}}$$

由此得

$$h_m = \frac{f_{N2} z_1 h_1 - f_{N1} z_2 h_2}{f_{N2} z_1 - f_{N1} z_2} \quad (43)$$

但有時判讀誤差或其他原因使 z_1, z_2 或 $(f_{N1} z_2 - f_{N2} z_1)$ 取不合理之負值。遇有此種現象時不能以(43)式計算 h_m ，計算機應打出 $h_m = h_M$ (h_M 為最高觀測頻率之實高)， $N_m = 0.124 f_M$ (f_M 為最高觀測頻率) 及 $S = 0$ ，而不作下述之步驟。

至於 z_1, z_2 之計算，吾人可用多次式近似 $h-f$ 變化後，求取微分係數。設 $f_{N1} = f_M - \Delta f$ ， $f_{N2} = f_M - 2\Delta f$ ， $f_{N3} = f_M - 3\Delta f$ 及 $f_{N4} = f_M - 4\Delta f$ ，由 (f_{M1}, h_{M1}) ， (f_{N1}, h_{N1}) ， (f_{N2}, h_{N2}) ， (f_{N3}, h_{N3}) 及 (f_{N4}, h_{N4}) 之五點求下列四次多項式之係數 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 及 ϵ 。

$$h = \alpha f^4 + \beta f^3 + \gamma f^2 + \delta f + \epsilon \quad (44)$$

由此式可求任意一點之微分係數。為期準確，吾人求得 f_N 與 f_{N2} ， f_N 與 f_{N3} ，及 f_{N1} 與 f_{N3} 三組之微分係數後由(43)式計算各組之 h_m ，再取三者之平均，其值即為最高電子密度之實高 h_m 。

其次，於(39)式設 $h = h_M$ ， $f_N = f_M$ 得

$$S^2 = \frac{f_m^2 (h_m - h_M)^2}{4(f_m^2 - f_M^2)}$$

於(39)式分別設 $f_N = f_M$ ， $h = h_M$ 及 $f_N = f_{N3}$ ； $h = h_{N3}$ 求 S^2 ，再設該兩 S^2 為相等，即可得

$$f_m^2 = f_M^2 + \frac{(f_M^2 - f_{N3}^2)(h_m - h_M)^2}{(h_m - h_{N3})^2 - (h_m - h_M)^2} \quad (46)$$

此兩式用於計算臨界頻率 f_m 及拋物線層之四分之一厚 S ，求得 f_m 後，即可用 $N_m = 0.124f_m^2$ 計算最高電子密度。

最高電子密度下面之單位柱子內總電子數 Sh 分為兩段計算， f_m 以下用 Simpson 之三分之一公式，但若 10 公里間隔有單數個時，最高 10 公里內之電子密度用梯形公式計算。自 f_m 至 f_m 之電子密度變化已假設為拋物線變化，故積分(39)式得

$$\int_{h_M}^{h_m} Ndh = N_m (h_m - h_N) \left[1 - \frac{(h_m - h_M)^2}{12S^2} \right] \quad (47)$$

總電子數即為

$$Sh = \int_0^{h_M} Ndh + \int_{h_M}^{h_m} Ndh \quad (48)$$

顏守謙、陳雲宗兩先生將第二至第四節之計算公式，寫成電子計算機程序，其全部程序收錄於附錄一及附錄二。

五、虛高對頻率變化之判讀

本所為進行實高的計算工作，除把原有判讀工作桌上的幻燈機，改為由上而下的投影方式外，並依據電離層記錄片縱橫坐標的比例，設計了兩種同格式的圖表，一為每日繪製虛高曲線的普通表，另一為繪製月中位觀測曲線的透明紙。以便於電離層虛高曲線的描繪，其格式如圖二。

曲線的繪製，首先把上述的圖表放置於幻燈機下，把圖中的高度及頻坐標，與電離層記錄上投影的高度，頻率坐標對齊，然後用細硬的鉛筆，把虛高曲線描下來。

計算整個電離層之電子密度對實高之變化時，虛高曲線，自 E 層之最低頻率至 f_0F_2 為止，應完整而連續。由於散射回波，斜方向回波及干擾等，往往不易得完整之虛高曲線，但吾人可應用已知之知識，盡量使虛高曲線完整。下列各項即為本所繪製虛高曲線時所依據之規定：

① 虛高曲線之描繪，只限於 E , E_2 , F_1 , 及 F_2 各層之正常波， E_s 層及所有異常波則不予描入，其原因是第二節之積分方程式之變換，第三節之 B 矩陣之計算，均針對 E_s 以外之正常波而作的。 E_s 層因通常無遲延現象，故對實高之計算並無影響。

② E 層或 F_1 層之一部份因 E_s 之遮蔽作用不能看見時，或 f_0E 附近及 F_1 層較低部份因偏向吸收而不出現時，須要補畫其缺少部分。此時應知各層臨界頻率附近之電子密度之高度變化為拋物線，並應參考同日同一鐘點之完整之虛高曲線以補畫缺口部分。

③ 夜晚 f_0E 通常低於 IMC ，此時祇描繪 F 層部分。但在日間 E 層及 F_1 層較低部份由於某種原因不出現時，應參考同月同鐘點之記錄加以外插。第二、三項之規定似

太不準確，但研討計算方法（第二～四節）即可知E層及F₁層較低部份之虛高之誤差，對計算F₂層之實高所產生之誤差甚微，反而虛高曲線未補完時實高計算值比實際實高值高出甚多。

④若有第二次或三次反射存在時，可由該反射換算一次反射之虛高，插補第一次反射之缺少部份。

⑤E_s之第二次反射時常出現於F層之高度，而兩者不易分別。對此種情形必須特別留意，不要誤E_s以層之二次反射當作F層反射。如若F層虛高隨頻率之變化較慢時，可外插其被E_s層所遮蔽部份。但虛高變化率大時，則不要外插。

按上述之規定將虛高曲線描完後，先將識別欄，如電臺名(STA)，年(YR)，月(MO)，鐘點(TIME)，f₁F₂等，逐一填明。f₁F₂為須要讀虛高之最高頻率，當該頻率超過8兆週時，吾人應用間隔為0.2兆週之B矩陣計算實高，因此f₁F₂為比最高觀測頻率低，但最靠近該頻率，且為0.2兆週之倍數者。f₁F₂小於8兆週時，所應用之矩陣為間隔0.1兆週者，其f₁F₂之定義可類推。其餘虛高數據之讀取按照下列規定行之。第四節之fm即為本節之f₁。

①f₁F₂大於(小於)8兆週者，每隔0.2兆週(0.1兆週)讀取一虛高。由f₁F₂而下至少讀過5個數據，且最後之數據之頻率為1.0兆週(0.5兆週)之倍數時，可依據下列規定改為每1.0兆週(0.5兆週)讀一虛高。

②若(a)二個頻率f₂及f₁為1.0兆週(0.5兆週)之倍數，

(b)f₂與f₁之差數至少有3.0兆週(1.5兆週)，

(c)較高之頻率f₂至少低於f₁F₂ 1.0兆週(0.5兆週)，

(d)自f₂+1.0兆週至f₁-1.0兆週(自f₂+0.5兆週至f₁-0.5兆週)之虛高曲線之高度變化不大，並且無尖點，

(e)f₁至少比f₁-min大1.0兆週(0.5兆週)時，f₂與f₁之間可改為每1.0兆週(0.5兆週)讀取一虛高數據，但在較高頻率之虛高數據末位上面付(-)號，以便使電子計算機識別間隔之大小。

③不合第二項規定者，一律每隔0.2兆週(0.1兆週)讀一虛高數據。

④在日出日沒無E層時，h'F往往在低頻率端最高，而隨頻率之增加而減少，此為臨界頻率低於1.0兆週之層所引起者。若將該部份算入，則實高誤差即較大。因此有這種情形發生時，小於最低h'F之頻率之虛高數據，均改用h'F最低值。

⑤在曲線中E層至F₁層之會合處，或臨界週率剛好與圖表上之週率標相合時，虛高曲線可能近於垂直，而難於讀出其正確之虛高，在這種情況下，則以其虛高可能範圍的中位值，為其虛高。

六、月中位觀測曲線之繪製

本所實高計算工作，目前只作月中位觀測曲線的計算。上節所述曲線圖描好後

·把一個月內同一鐘點的曲線，另用張同一大小格式的透明圖表，覆在上面，對好坐標，逐一用細硬的鉛筆把曲線描下來。如此每月可繪得24張透明圖表，而每一圖表內約有近三十條曲線。

上述工作完成後，我們取其一張，試繪一線(直線或曲線均可)穿過所有的曲線，當可發現該線與每一曲線均有一交點(也只是一交點)，再在該線上依其交點的上下位置求得中位點M，利用此法，在那複合虛高曲線上繪多條線(為方便計，用直線)以求得不同的M點，連接所有的M點，即為月中位觀測曲線。

理想的月中位觀測曲線，必須要有代表性，而與其同一鐘點上的主要個別曲線，應該是相似的。但如全靠M點繪製月中位觀測曲線，往往由於虛高曲線之數目有限，而發生不規則，或不合理的現象。故除M點外，月中位曲線的繪製，尚得參改個別曲線的斜率變化，加以修正，尤以 F_2 層臨界頻率及 f_{min} 附近為主要。所得之中位虛高線，如尚有不完整之部份，仍按照上一節之方法補畫後，再判讀虛高數據。

圖一為求月中位虛高曲線之一例，於圖一a中，由五條虛高曲線求中位點後，連接各中位點所得之中位曲線以點線表示。在圖一b內，參考各虛高曲線修正後，獲得可用於實高計算之中位曲線。

七、試算結果

按照上述之方法，本所曾計算五十三年八月份之實高並與美國ITSA所計算者比較(圖二)。由圖可知每10公里之電子密度相差微小，除了幾個點以外，其差異幾乎分不出來。另外最大電子密度之高度平均相差4公里(約1.3%)最大電子密度相差約 0.08×10 每立方公分(約1.4%)。拋物線層之四分之一厚(S)平均相差為3.5公里(約8%)，其百分率誤差相當大。 F_2 層臨界頻率端虛高之微小誤差影響S值甚大。若該端因干擾而不完整或判讀有微小誤差等情形均使S值變化相當大。因此S值之誤差並不是因計算公式或程序之錯誤而發生的。

圖三為本年元月份臺北上空之實高變化情形，圖中之參數為實高。討論實高變化並不是本文之目的，但吾人可很明顯地看出：

①Sh(h_m 下面之單位柱內之總電子數)之變化比 N_m (最大電子密度)或 f_oF_2 平滑。在11時 N_m 取最小值，但Sh即無此種現象，其原因即為層厚之膨脹(S值大)於17時即有相反之情形。

②在210~220公里高電子密度於17時最大，但在更高地方電子密度最大之時間即移到14時。

八、結 言

本文申述之積分法，雖較比較法為優，但仍然免不了種種之誤差。吾人曾經假

設三點：(1)電子密度對實高之變化為單調增加，(2) f_{min} 之高度以下無電子，(3) $\frac{dN}{dh}$ 為常數。假設(1)產生比實際較低之實高，假設(2)(3)即相反，使計算結果較實際實高為高。此外判讀誤差亦可影響準確性。總括起來 F_2 層及 F_1 層較高部份之實高誤差約 ± 10 公里以內， F_1 層較低部份即較差，其誤差可能超過 ± 10 公里。

雖然如此電離層實高之計算，不但可發現尚未知道之各種現象，並且可使電離層動態變化及其他電離層物理之研究向前邁進一步。前節後半所說明之現象即為其一例。至於計算方法之不完善，尤其是 s 值之計算，吾人可繼續研究改良，以便獲得更準確之實高數據。又因電離層觀測臺已於本年六月底遷址中壢，故干擾所引起之虛高曲線之不完整以後可大大地改善。

最後著者對本所繆所長、王副所長之指導和鼓勵，及陳雲宗、顏守謙兩位先生在電子計算機程序計劃方面之幫助表示深忱之謝意。

參 考 文 獻

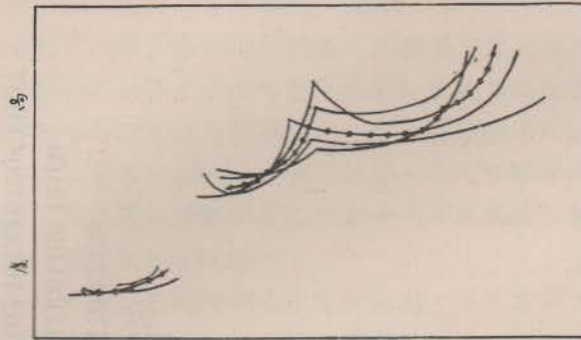
- Booker, H.G. and Seaton S. L. Relation between actual and virtual ionospheric height. *Phys. Rev.*, 1940, 57, 87.
- Budden, K.G. A method for determining the variation of electron density with ($N(h)$ curves) from curves of equivalent height versus frequency. *Rep. Camb. Conf. Ionosph. Phys.* (Phys. Soc. Lond.), 1954, p. 332.
- Budden, K.G. *Radio Waves in the ionosphere*, Camb. Univ. Press, 1961, p.149.
- de Groot, W. Some remarks on the analogy of certain cases of propagation of electromagnetic waves and the motion of a particle in a potential field. *Phil. Mag.*, 1930, 10, 521
- Howe, H.H. The method of computing electron density profiles which is now in use by the United States National Bureau of Standards, Private communication.
- Huang, C.M. *Radio Wave Propagation*, Radio Wave Research Laboratories. 1963, p. 174.
- Thomas, J.O. The conversion of ionospheric virtual height-frequency curves to electron density-height profiles, *Radio Research Special Report No. 28*, Dept. of Scientific and Industrial Res., London. 1959.
- Wright, J.W. and Norton, R.B. *Analysis of ionospheric vertical soundings for electron density profile data. Part I*, NBS Technical Note No. 14, Part II, NBS Technical Note No. 19, 1959.

Wright, J.W. Analysis of ionospheric vertical soundings for electron density profile data. Part III, NBS Technical Note No. 146, 1962.

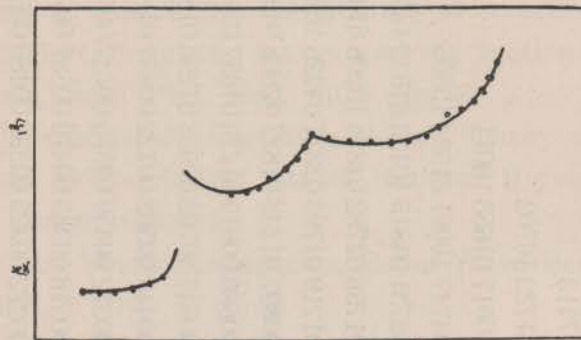
註：本表是 $\Delta f=0.1$ 兆週時之B矩陣之一部份全部因素共有2556個

10	1.00000
11	81776 18223
12	20797 61788 17413
13	11645 09928 61723 16702
14	07584 04668 10017 61658 16071
15	05387 02673 04747 10091 61594 15505
16	04057 01713 02731 04815 10153 61532 14996
17	03186 01187 01756 02782 04874 10206 61473 14533
18	02581 00872 01219 01793 02827 04926 10251 61416 14110
19	02141 00669 00897 01248 01827 02868 04972 10290 61363 13722
20	01809 00531 00689 00919 01273 01857 02904 05012 10323 61312 13364
21	01552 00433 00547 00706 00938 01296 01885 02937 05049 10353 61264 13033
22	01348 00361 00447 00562 00722 00957 01317 01910 02966 05082 10378 61219 12725
23	01183 00306 00372 00459 00575 00737 00973 01336 01932 02993 05111 10401 61176 12438
24	01048 00263 00316 00383 00470 00587 00750 00988 01354 01953 03018 05138 10421 61136 12169
25	00934 00229 00272 00325 00392 00480 00598 00762 01002 01370 01972 03040 05162 10439 61098 11917
26	00839 00201 00237 00280 00333 00401 00489 00608 00773 01014 01385 01989 03061 05185 10455 61061 11680
n/m	10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

表一、B 矩 陣



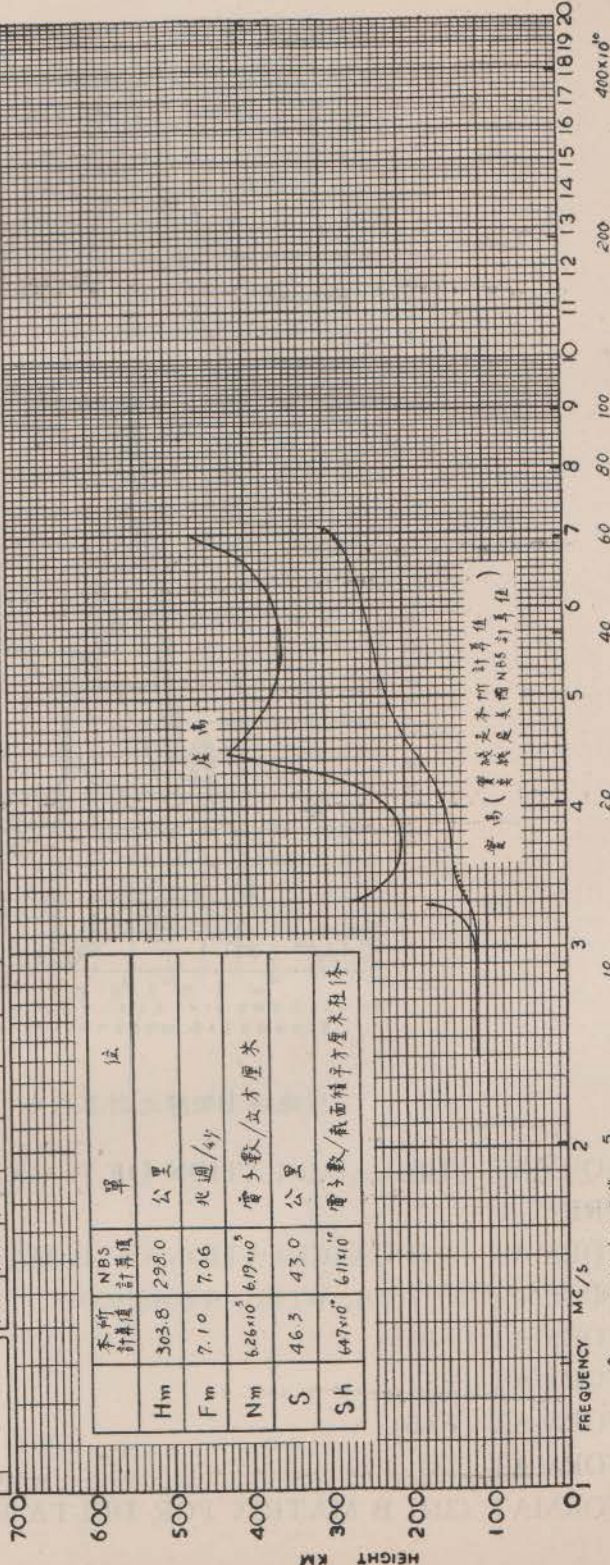
圖一甲 中位屋高曲线之決定
實線為觀測屋高曲线，虛線為中位屋高曲线。



圖一乙 中位屋高曲线之修正
實線為未修正前之中位曲线，虛線為修正後之中位曲线。

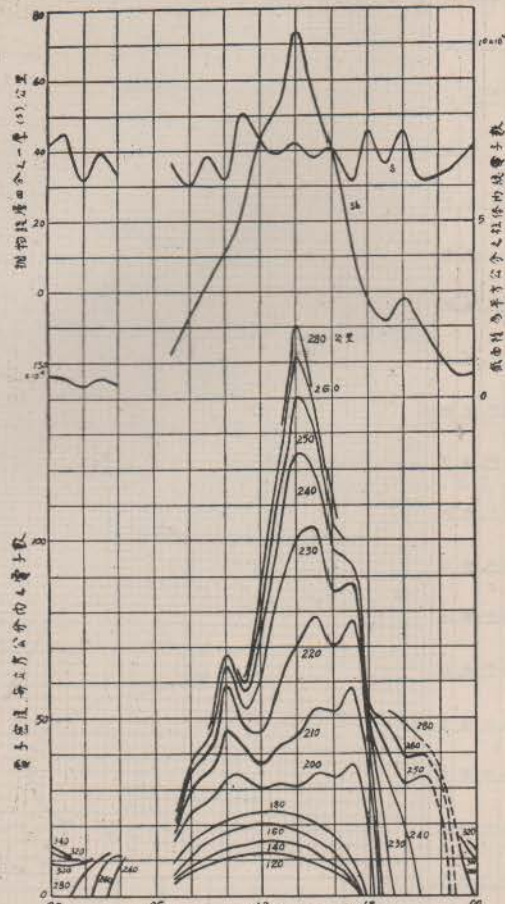
IONOGRAM TRACING

STA	YR	MO	DAY	TIME	f-min	f _o F ₂	f _o F ₁	f _o F ₂	h'p	SCALED BY	CHECKED BY
T.P.	64	8		1210	10	70					
TRACING COUNT										17	22
RECORDS LOST BECAUSE OF										18	23
B										19	24
C										20	25
S										21	



本所計算值	NBS計算值	單位
Hm 303.8	298.0	公里
Fm 7.10	7.06	兆週/秒
Nm 6.26x10 ⁵	6.19x10 ⁵	電子數/立方厘米
S 46.3	43.0	公里
Sh 6.47x10 ⁷	6.11x10 ⁷	電子數/截面積厘米厘米

圖二 台北上空電離層虛高及實高變化之比較 (民國五十六年八月十二時)



图二 台北上空電離層五十四年元月份不同高度之電子密度，單位每立方公分電子數，虚拟高度四分之一層之变化。

附錄一 B矩陣之計算程序

陳雲宗

```

1 FORMAT (36H CALCULATION OF B MATRIX Y. T. CHEN)
  PRINT 1
1 FORMAT (36H CALCULATION OF B MATRIX Y. T. CHEN)
  DIMENSION U(10), W(10), ABM(100)
11 FORMAT (F10.8)
12 FORMAT (F3.1)
13 FORMAT (F8.5)
14 FORMAT (I3)
100 FORMAT (31H B MATRIX FOR DELTA F=0.2MC)
  
```



```
50 FORMAT (31H B MATRIX FOR DELTA F=0.1MC)
62 FORMAT (2H)
   DO 2 IN=1,100
20 ABM(IN)=.0
   DO 21 I=1.100
21 ACCEPT TAPE 11,U(I)
   DO 23 J=1.10
23 ACCEPT TAPE 11,W(J)
   DA=34./18. *3.14159
   SN=(SIN(DA))**2
   CN=(COS(DA))**2
22 ACCEPT 12, DELF
   NL=1./DELF
   NLI=NL+1
   IF(0.2-DELF)87, 87, 88
87 PRINT 1
   PUNCH TAPE 1
   GO TO 89
88 PRINT 5
   PUNCH TAPE 5
89 ACCEPT 14, NTEM
   DO 91 N=NTEM, 100
   DN=N
   F=DN*DELF
   Y=1.07/F
   YY=Y*Y
   DO 33 M=NL,N
   DM=M
   SPT=SQRT(1.-DM/DN)
   SQT=SQRT(1.-(DM-1.)/DN)
   UP=.5*(SPT+SQT)
   UC=.5*(SQT-SPT)
   AB=.0
   DO 31 K=1,10
   UQ=UC*U(K)
```

```

UT=UP+UQ
WW=UC*W(K)
FO=(1.-UT*UT)*F
X=(FO/F)**2
CS=1.-X
AS=CS-(1.-X*SN)*YY
A=(1.-SQRT(X))*AS
B=X*YY*CN*.5-CS*(CS-YY)
C=(1+SQRT(X))*(CS*CS-YY)
T=SQRT((-B-SQRT(B*B-A*C))/C)
BS=CS-(YY*CN)*.5
DS=SQRT(BS*BS-AS*CS)
QS=(DS-BS)/AS
UINT=T*WW*(1.-X/(2.*DS))*((1.+QS)**2-X*YY*SN*QS*QS))
31 AD=AB*UIWT
33 ABM(M)=AB*2.*DN
   NS=N-1
   DO 41 LA=NL,NS
41 ABM(LA)=ABM(LA)-ABM(LA+1)
   DO 51 LB=NL,NS
51 ABM(LB)=(-ABM(LB))/ABM(N)
   ABM(N)=1./ABM(N)
   ABM(NL)=1.
   DO 71 NBR=NL1,N
71 ABM(NL)=ABM(NL)-ABM(NBR)
   DO 81 MN=NL,N
81 PRINT 13,ABM(MN)
   PRINT 62
   IF(SENSE SWITCH 2)91,99
99 DO 91 MN=NL,N
   PUNCH TAPE 13,ABM(MN)
91 CONTINUE
   GO TO 22
200 STOP
   END

```

Note:

- 1) Read Data: U(10), W(10), Gaussian weights, '10' is Gaussian abscissa
- 2) Type in Δf : e.g. 0.1 or 0.2 in F3.1
- 3) Type in N: N is the number of matrix row. For example, if finishing N is 50, then start from N=51. In this case type in 051.
- 4) Ans. in F8.5
- 5) Data conversion from F8.5 to $\bar{x}xxxx$
- 6) Program: Type $N+1-1/\Delta f$.

附錄二 實高，最大電子密度等之計算程序

顏守謙

```

08300 C    CAL.N(H) PROF ILE BY S.C. YEN
08300      DIMENSION BM(2800), H(80), F(80), A(80), E(5), G(5),
          B(5), X(4,4)
08300 301  FORMAT(16HIDENTIFICATION)
08356 302  FORMAT(F5.4)
08378 303  FORMAT(14)
08400 304  FORMAT(2F4.1)
08428 305  FORMAT(F4.0)
18450 306  FORMAT(2F7.2)
08478 C    READBMATRIX
08478 310  ACCEPT TAPE 303,N
08502      N=N*(N+1)/2
08562      DO 311 I=1,N
08574 311  ACCEPT TAPE 302,BM(I)
08658 C    READ DATA
08658      FN=1.
08682 312  ACCEPT TAPE 301
08706 313  ACCEPT TAPE 304,FM,FD
08742      I=0
08766 314  ACCEPT TAPE 305,DATA
08790      IF(DATA)315,316,315
08846 315  I=I+1
08882      A(I)=DATA
08930      GO TO 314

```

08938 C DIVIDED H1 IN STEPS
 08938 316 FM1=FN-FD
 08974 J=0
 08998 K=0
 09022 322 FM1=FM1+FD
 09058 J=J+1
 09094 K=K+1
 09130 335 IF(A(J))321, 321, 320
 09210 320 H(K)=A(J)
 09282 F(K)=FM1
 09330 IF(FM1-FM)322, 325, 325
 09398 321 FM2=FM1FD
 09434 J1=J-1
 09470 G(1)=A(J1)
 09518 X(1,3)=FM2
 09542 JD=0
 09566 DO 323 L=1,3
 09578 JL=J1+L
 09614 IF(A(JL))326, 326, 327
 09694 326 A(JL)=-A(JL)
 09778 FM2=FM2+5.*FD
 09826 X(L+1,3)=FM2
 09874 FM3=FM2
 09898 GO TO 323
 09906 327 FM3=FM3=FD
 09942 X(L+1,3)=FM3
 09990 JD=JD+1
 10026 323 G(L+1)=A(JL)
 10134 J=JL-JD+1
 10182 C CAL.H1=AX3+BX2+CX+D
 10182 C CAL.A,B,C AND D
 10182 DO 330 M=1,4
 10194 X(M,1)=X(M,3)**3
 10278 X(M,2)=X(M,3)**2
 10362 330 X(M,4)=1.

```

I0446      N=4
I0470      NM1=N-1
I0506      DO 356 L1=1,N
I0518      A11=X(1,1)
I0542      DO 354 JA=1,NM1
I0554      354 B(JA)=X(1,JA+1)/A11
I0698      B(N)=1./A11
I0758      DO 359 IA=1,NM1
I0770      IP1=IA1
I0806      AIP11=X(IP1,1)
I0854      DO 355 JA=1,NM1
I0866      355 X(IA,JA)=X(IP1,JA+1)-AIP11*B(JA)
I1106      359 X(IA,N)=-AIP11*B(N)
I1274      DO 356 JA=1,N
I1286      356 X(N,JA)=B(JA)
I1466      DO 360 IA=1,N
I1478      B(IA)=0.
I1526      DO 360 JA=1,N
I1538      360 B(IA)=B(IA)+X(IA,JA)*G(JA)
I1790      336 IF(FM2-FM1)335, 334, 334
I1858      334 F(K)=FM1
I1906      H(K)=B(1)*FM1**3+B(2)*FM1**2+B(3)*FM1+B(4)
I2098      FM1=FM1+FD
I2134      K=K+1
I2170      GO TO 336
I2178      325 IF(SENSE SWITCH 1)337, 338
I2198      337 DO 339 N=1,K
I2210      339 TYPE 306, F(N), H(N)
I2330 C    COMBINE B AND H
I2330      338 I1=0
I2354      DO 341 I=1,K
I2366      HIJ=0.
I2390      DO 340 J=1,I
I2402      I1=I1+1
I2438      340 HIJ=HIJ+H(J)*BM(I1)

```

I2570 341 $H(I) = HIJ$
 I2654 IF(SENSE SWITCH 1)342, 343
 I2674 342 DO 344 N=1,K
 I2686 344 TYPE 306, F(N), H(N)
 I2806 C CAL. HM. FM AND S
 I2806 343 $HN = 0.$
 I2830 DO 5 I=1,K
 I2842 IF($H(I) - HN$)5, 5, 6
 I2934 6 $HN = H(I)$
 I2982 M=I
 I3006 5 CONTINUE
 I3042 L=M
 I3066 DO 4 J=1,5
 I3078 $E(J) = F(L)$
 I3150 $G(J) = H(L)$
 I3222 4 $L = M - J$
 I3294 L=5
 I3318 200 DO 212 J=1,5
 I3330 212 $B(J) = G(J)$
 I3438 J2=0
 I3462 J1=4
 I3486 DO 210 J3=1,4
 I3498 DO 211 J=1,J1
 I3510 J4=J2+J
 I3546 211 $B(J) = (B(J+1) - B(J)) / (E(J4+1) - E(J))$
 I3786 J2=J3
 I3810 210 J1=J1-1
 I3882 $A(L) = B(4) + (E(5) - E(4)) * (B(3) + (E(5) - E(3)) * (B(2) + (E(5) - E(2)) * B(1)))$
 I4086 L=L-1
 I4122 IF(L)9, 8, 9
 I4178 9 $A(7) = E(5)$
 I4202 $A(8) = G(5)$
 I4226 $E(5) = E(L)$
 I4274 $G(5) = G(L)$

I4322 E(L)=A(7)
 I4370 G(L)=A(8)
 I4418 GO TO 200
 I4426 8 FZ=E(3)/A(4)-E(5)/A(1)
 I4522 IF(SENSE SWITCH 1)206, 232
 I4542 232 IF(A(3))205, 233, 233
 I4598 233 IF(A(1))205, 234, 234
 I4654 234 IF(FZ)205, 206, 206
 I4710 206 I=0
 I4734 L=5
 I4758 N=1
 I4782 10 B(I+1)=E(I+2)*A(N)*G(L)-A(I+3)*E(L)*G(I+2)
 I5070 B(I+1)=B(I+1)/(E(I+2)*A(N)-A(I+3)*E(L))
 I5322 I=I+1
 I5358 GO TO (10, 11, 12),I
 I5438 11 L=1
 I5462 N=2
 I5486 GO TO 10
 I5494 12 HM=(B(1)+B(2)+B(3))/3.
 I5554 B(5)=(HM-H(M))**2
 I5626 FM=SQRT(E(5)**2+(E(5)**2-E(3)**2)*B(5)/((HM-G(3)
)**2-B(5)))
 I5866 S=SQRT(FM**2*B(5)/(4.*(FM**2-E(5)**2)))
 I6046 FM1=.124*FM**2
 I6094 GO TO 110
 I6102 205 HM=H(M)
 I6150 FM=F(M)
 I6198 FM1=.124*FM**2
 I6246 S=O.
 I6270 C LINEAR INTERPOLATION AND INTERGRATION
 I6270 110 DO 55 I=1,K
 I6282 55 F(I)=.124*F(I)**2
 I6414 H1=HM/10.
 I6450 N1=H1
 I6486 H1=N1*10

I6534 H3=H1
 I6558 IF(S)61, 62, 61
 I6614 62 I=0
 I6638 GO TO 22
 I6646 61 I=0
 I6670 21 IF(H3-H(M))22, 22, 23
 I6762 23 I=I+1
 I6798 $A(I) = FM1 * (1 - ((HM - H3) / (2 * S)) ** 2)$
 I6954 H3=H3-10.
 I6990 GO TO 21
 I6998 22 N3=I+1
 I7034 H5=H3
 I7058 H3=H3+10.
 I7094 J=0
 I7118 69 J=J+1
 I7154 IF(H(1)-H(J))64, 63, 63
 I7246 63 N5=J
 I7270 64 IF(J-K)69, 24, 69
 I7338 24 H3=H3-10.
 I7374 IF (H3-H(N5)) 27, 36, 36
 I7466 36 N8=N5-1
 I7502 DO 33 J1=1,K
 I7514 J=N8+J1
 I7550 IF (H3-H(J))31, 32, 33
 I7642 33 CONTINUE
 I7678 32 I=I+1
 I7714 A(I)=F(J)
 I7786 GO TO 24
 I7794 31 I=I+1
 I7830 $A(I) = F(J-1) + (F(J) - F(J-1)) * (H3 - H(J-1)) / (H(J) - H(J-1))$
 I8142 GO TO 24
 I8150 27 H3=H3+10.
 I8186 IF(S)65, 66, 65
 I8242 66 SHM3=(A(N3)+F(M))*(H(M)-H5)*.5


```

I8410      GO TO 70
I8418      65 IF(HM-H(M))71, 66, 72
I8510      71 SHM3=(HM-H5)*(FM1+A(N3))*0.5
I8630      GO TO 70
I8638      72 SHM3=FM1*(HM-H(M))*(1-(HM-H(M))**2/(12.*S**2))
I8878      SHM3=SHM3+(A(N3)+F(M))*(H(M)-H5)*0.5
I9058      70 ND=(H5-H3)/10.
I9118      ND1=ND/2+ND/2
I9202      AN=1.
I9238      IF(ND-ND1)42, 41, 42
I9306      41 SHM1=(A(I)+F(1))*H3-H(1))*0.5
I9426      N5=N3
I9450      GO TO 44
I9458      42 SHM1=((A(1)+F(1))*(H3-H(1))+(A(N3+1)+A(N3))*10.
           )*0.5
I9686      N5=N3+1
I9722      44 K10=ND1-1
I9758      SHM2=0.
I9782      DO 48 K1=1,K10
I9794      AN=-AN
I9830      K11=N5+K1
I9866      48 SHM2=SHM2+(AN+3.)*A(K11)
I9986      SHM=SHM3+SHM1+10.*SHM2+A(1)+A(N5))/3.
20154     101 FORMAT(/3HHO=F8.2,/3HNO=F8.2)
20218     401 FORMAT(///)
20250     102 FORMAT(3HHM=F8.2)
20286     103 FORMAT(3HFM=F3.2,/3HNM=F8.2,/2HS=F9.2)
20366     104 FORMAT(3HSH=F8.2)
20402     105 FORMAT(1HHF8.2,3H TOF8.2)
20452     106 FORMAT(3H F8.2)
20488     TYPE 401
20512     TYPE 301
20536     TYPE 101, H(1), F(1)
20572     TYPE 102, HM
20596     TYPE 103, FM, FM1, S

```

20644 TYPE 104, SHM
 20668 TYPE 105, H1, H3
 20704 DO 107 K3=1,I
 20716 107 TYPE 106, A(K3)
 20800 IF(SENSE SWITCH 3)310, 312
 20820 END

Note:

- 1) Read Loader
- 2) Read Object Program
- 3) Read Subroutine
- 4) Read 0.1 Mc or 0.2 Mc B matrix data
- 5) Read data in the form;

$\frac{TP6504M010000077}{16, \text{ identification}}$ $\frac{00770001}{f_M \Delta f}$ $\neq 0109 \neq \dots 0109 \neq 0110 \neq \dots 0333 \neq$
 $-330 \neq -339 \neq -357 \neq -380 \neq 0387 \neq 0394 \neq 0400 \neq 0409 \neq 0420 \neq 0437$
 $\neq 0460 \neq 0000 \neq$

- 6) Sw 1 on; Type testing data
 off; Type result
- 7) Sw 3 on; Read B matrix data
 off; Read data

L