The Journal of National Chiao Tung University
Vol. 7, April 1980, Supplement
pp. 1-13

經濟批量排程之研究
A Study on Economic Lot Scheduling Problem

陳文哲　楊銘賢 Wen-Cher Chen and Min-Hsieng Yang

Institute of Management Science, N. C. T. U.

(Received October 31, 1979)

Abstract — The production decision of a single-machine, multi-product system is a problem of deciding the time, the quantity and the sequence to produce. It is called Economic Lot Size Problem (ELSP). The decision of ELSP is directly concerned with the product cost. A method must be therefore properly selected.

This paper finds out several major factors which affect the decision of ELSP. It also proposes some decision methods as tools in practice. These methods will be developed under the common evaluating criterion of minimizing the total variable product cost and be discussed both in deterministic, constant demand case and stochastic demand case.

Finally, these methods will be practically applied in a plant to explain their decision procedure and to compare their effectiveness for the reference of decision-maker.

摘要：單一機器設備生產多種產品時的生產決策，包括生產時點、生產批量、生產順序等之決定，此即ELSP。ELSP的決策直接關係到產品成本之高低，因此，決策方法必須適當選取。

本文找出一些影響ELSP決策的主要因素，並針對肯定不變需求及隨機需求等兩種情形，在「使總變動成本為最小」的評估準則下，分別提出一些決策方法，作為實際問題的解決工具，同時也將這些方法實際應用到彩藝工廠中，比較其優劣，作為決策者之參考。

一、緒　論

單一機器設備生產多種產品時的生產決策，包括生產時點、生產批量、生產順序等之決定，此即經濟批量排程問題（economic lot scheduling problem，簡稱ELSP）（註一）。ELSP的決策直接關係到產品成本之高低，因此，決策方法必須適當選取。

研究ELSP的方法可分為兩種，一種是解析法，另一種是啓發法。解析法係對某一特殊假定的情況，利用數學的解析技巧，求得最適解，因為加上了某些假設，該最適解的適用範圍僅限於原問題轉變而成的一個特殊問題。啓發法並不改變原有的問題形式，而是運用啓發性的直覺方法，找出原問題的一個滿意解。本文以建立實用模式為主要目的，將對特殊情形進行解析的推演，同時也要尋求原問題的直覺解法。

本文找出一些影響ELSP決策的主要因素，並針對肯定不變需求及隨機需求等兩種情形，在「使總變動成本為最小」的評估準則下，分別提出一些決策方法，作為實際問題的解決工具，同時也將這些方法實際應用到彩藝工廠中，比較其優劣，作為決策者之參考。

註一：S.E.Elmaghraby, "The economic lot scheduling problem (ELSP): review and extensions", Management Science 24, No.6 (Feb., 1978): 587-598.

二、經濟批量排程問題的特性

經濟批量排程問題（ELSP），乃是針對工廠中生產數種產品之某一機器或生產設備，基於選定之評估準則，求出最適或近乎最適之排程的問題，此排程決策包括了各項產品開始生產時間、生產批量及生產順序等的決定。

(一) 評估準則的選定

在建立本文的模式之前，必須先選定基準，作為不同排程比較優劣之依據，當然決策者可主觀地選擇對其較具意義的評估項目，如生產的平滑度（smoothness of production）或改變計劃所發生的成本等，都可作為評估排程優劣的基準。

本文之研究，將選取總變動成本作為評估項目，其理由有三：

(1)在排程方法的推演過程中，較易於解析。

(2)總變動成本項目在工廠中很容易估計出。

(3)對於大多數決策者而言，成本是個較為具體且有顯著意義的項目。

選定評估項目後，我們的評估準則訂為「使總變動成本為最小」。

當排程開始實施後，就會陸續發生一些成本項目，包括製造成本、存貨成本及一些固定攤提費用在內，此處假定計劃不會改變或者改變計劃的成本可以忽略不計。

製造成本可分為因生產產品所直接發生的成本和機器更換產品時所發生的成本兩項，前者可稱之為直接生產成本，後者即更換成本。一般而言，直接生產成本在短期內不會改變，故當產品的期間需求量固定時，任一個排程計劃的總生產成本都會一樣，而在「使總變動成本為最小」的評估準則下，本文中的製造成本將僅考慮更換成本。

至於存貨成本，則可廣義地認為它包含庫存成本及缺貨成本，當存貨非負時所發生的存貨成本即庫存成本，而存貨為負時就是缺貨成本。在產能維持不變時，其他固定攤提費用對任一排程言皆為不相關成本，乃可不予考慮。

(二) 影響經濟批量排程決策的因素

決策者的價值觀，或者其偏好的評估準則，固然是經濟批量排程決策的重要因素，此外尚有許多因素影響經濟批量排程的決策；當這些因素改變時，雖然用來作決策的方法不變，亦常會出現不同的最適決策。因此，在研究ELSP的決策方法時，應先了解這些因素，才能作好這項研究；同時，這些因素的了解，也可幫助決策者選取較合適的經濟批量排程方法。

ELSP的決策過程中，除了決策者的價值觀外，所需考慮的主要因素尚有機器的產品更換時間與生產順序之相關性、更換成本費率、生產週程（production cycle）的性質、機器設備的產能、各項產品的需求形態、存貨成本費率及產品售價等。

三、肯定不變需求時的經濟批量排程方法

所謂肯定不變的需求，乃產品的需求率為已知常數，也即是單位時間的產品需求量為已知固定值。此種情形下，就無限長的期間而言，工廠的生產設備應已調整至恰能滿足產品需求的規模，缺貨供應的現象不會發生，因此，總變動成本僅考慮更換成本及庫存成本即可。

(一) 循環週程假設下的簡單求解

1.單一產品：

此時用存貨模式中的經濟批量公式即可求解。假定產品的需求率為已知常數 d，生產率為已知常數 p，存貨成本費率為 h，更換時間為 S，更換成本費率為 σ。我們的目的在求最適生產批量 q 或週程時間 T 使得單位時間的總變動成本 TC 為最小，TC 等於更換成本與存貨成本和。

因單位時間內的更換次數為 d/q，故更換成本為 $\sigma S d/q$；又因一週程內的生產時間為 q/p，存貨的增加量乃為 $(p-d)q/p$，平均存貨即為 $(p-d)q/2p=q(1-\rho)/2$，其中 $\rho=d/p$ 表示機器的利用率，故單位時間的存貨成本即為 $hq(1-\rho)/2$。

綜合上述，$TC=\sigma S d/q+hq(1-\rho)/2$ (1)

對(1)式微分，解得最適批量

$$q^*=\sqrt{2\sigma S d/h(1-\rho)} \tag{2}$$

但是(2)式的解並未考慮機器的負荷狀況，事實上，在一個週程時間（$T=q/d$）內，機器的利用時間與更換時間不能大過週程時間，即

$$\rho T+S\leqq T \tag{3}$$

或 $$(1-\rho)q/d\geqq S \tag{4}$$

$$\therefore\ q\geqq dS/1-\rho \tag{5}$$

由(2)式與(5)式，可得較完整的解，即（註一）最適批量 $q^*=\max\left(\sqrt{2\sigma S d/h(1-\rho)},\ dS/1-\rho\right)$ (6)

或最適週程時間 $T^*=q^*/d=\max\left(\sqrt{2\sigma S/hd(1-\rho)},\ S/1-\rho\right)$ (7)

2.多種產品：

假設該機器能生產 n 種不同的產品，其符號與單一產品時相同，但以 i 作為產品的指標。例如產品 i 的需求率為 d_i。此處討論的是更換時間與生產順序無關的情形，亦即產品 i 生產後的更換時間與接著要生產的產品無關，而可以用 S_i 表示之。

與單一產品時一樣，可得最適週程時間，即（註二）：

$$T^*=\max\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i S_i\Big/\sum_{i=1}^{n}h_i d_i(1-\rho_i)},\ \sum_{i=1}^{n}S_i/1-\rho\right) \tag{8}$$

(二) 循環週程假設下更換時間與生產順序有關的推廣模式

當生產週程是循環週程且機器的產品更換時間和生產順序有關時，產品 i 的更換時間僅以 S_i 不足表達，應與接在產品 i 後面生產的產品 j 有關，故以 S_{ij} 表示之，若產品數為 n，則更換時間不再是一組 n 維向量（n-dimensional vector），而是一個 n 階方陣〔S_{ij}〕，稱之為更換時間矩陣。

生產決策中必須要訂出各項產品的生產順序，而生產順序的選擇與更換時間矩陣及更換成本費率有關，這恰好就是旅行的銷貨員問題（traveling salesman problem）之研究範圍（註三）。

1.旅行的銷貨員問題：

有一位銷貨員在一個城市裡，他想到另外 N－1 個城市去旅行訪問，每個城市需恰好訪問一次，待全部訪問完畢後要再回到原來出發的城市，則這位銷貨員應如何安排訪問的先後次序，才會使全部的旅行距離為最短，這就是旅行的銷貨員問題，過去十數年間，已有許多學者提出解法，伊斯特曼（Eastman）提出的方法，則是用支限法（Branch and Bound Technique）求解的。（註四）

令D（I，J）表示從城市I到城市J的距離，I、J＝1，2，……，N，D（I，I）＝∞，並將經過此n城市恰各一次的完整路線（route）稱為一個環遊（tour），若銷貨員訪問某個城市後再回到該城市，則包含這些城市的路線稱為一個次環遊（subtour）；如果稱一個包含各城市恰一次的路線為可行的路線（feasible route），顯然次環遊是不可行的。

本問題求解的方法是利用較簡單的任用問題（assignment problem）（註五）推演而得的。先允許次環遊的存在，再有系統地將次環遊在子問題中轉化成環遊，最後得到的環遊就是最佳的旅行路線（總距離最小）。

2 更換時間與生產順序有關時的ELSP：

此處討論的仍是循環週程的情形，但更換時間（以n階方陣〔S_{ij}〕$_{n\times n}$表示）與生產順序有關，即存在有 i ， j ≠K 使得 $S_{ij} = S_{ik}$ 。與旅行的銷貨員問題一樣， S_{ii} 可令為∞，除了更換時間外，對應於 S_{ij} 的更換成本費率令為 σ_i ， σ_i 與生產完的產品 i 有關而與將投入的產品 j 無關，其餘的變數則採用本章第(一)節的符號。

因為更換成本也和生產順序有關，它可寫成〔C_{ij}〕$_{n\times n}$的矩陣形式，其中 $C_{ij} = S_{ij}\sigma_i$ ，而更換成本矩陣就有如旅行的銷貨員問題中之距離矩陣〔D_{ij}〕$_{N\times N}$一般。

假定在某一個生產順序下，產品 i 的下一個產品為 i′ ，則單位時間的總變動成本TC可以寫成：

$$TC = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i S_{ii'} / T + T \sum_{i=1}^{n} h_i d_i (1-\rho_i)/2 \tag{9}$$

或 $$TC = \sum_{i=1}^{n} C_{ii'} / T + T \sum_{i=1}^{n} h_i d_i (1-\rho_i)/2 \tag{10}$$

使總成本TC為最小的問題乃包括了T及 i′（ i ＝1，2，……，n）等變數之決定；換句話說，最適排程決策可以用週程時間及生產順序來表示。

首先，用旅行的銷貨員問題之解法，求出使 $\sum_{i=1}^{n} C_{ii'}$ 為最小的生產順序（用｛ $i \to \bar{i}$ ｝表示之），這剛好是一個循環週程。其次，若不考慮機器可供利用時間的限制，由(11)式可得週程時間 T_1 使TC（T_1）為最小，即

$$T_1 = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} C_{i\bar{i}} / \sum_{i=1}^{n} h_i d_i (1-\rho_i)} \tag{12}$$

若再加上機器可供利用時間的限制時，

可得 $T_1 \geqq T_2$ 的限制式，其中

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} S_{i\bar{i}} / 1-\rho \tag{13}$$

最後來考慮最適週程時間 T^* 之選取：

(1)若 $T_1 \geqq T_2$ ，則 T_1 即為 T^* ，TC（T_1）為最適成本。

(2)若 $T_1 < T_2$ ，再用旅行的銷貨員問題之解法，求出使 $\sum_{i=1}^{n} S_{ii'}$ 為最小的生產順序，用｛ $i \to \bar{\bar{i}}$ ｝表示之，此時又可分兩種情形討論：

① ｛ $i \to \bar{i}$ ｝與｛ $i \to \bar{\bar{i}}$ ｝為相同的生產順序，此時 T_2 即為 T^* ，而TC（T_2）為最適成本。

② ｛ $i \to \bar{i}$ ｝與｛ $i \to \bar{\bar{i}}$ ｝為不同的生產順序，則最適解無法求得，祇能求得近似解。令

$$T = \max\left(\sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} C_{ii} / \sum_{i=1}^{n} h_i d_i (1-\rho_i)},\ \sum_{i=1}^{n} S_{ii} / 1-\rho\right) \tag{14}$$

再將⒀式與⒁式分別代入⑼式或⑽式，求出TC（T_2）與TC（T）的值，比較其大小。如果TC（T_2）≦TC（T），則取 $\{i \rightarrow \bar{i}\}$ 為生產的順序，T_2 為週程時間，否則便取 $\{i \rightarrow \bar{\bar{i}}\}$ 為生產的順序，而令T為週程時間；如此所得之解在實際應用中也能獲得令人滿意之結果。

㈢ 非循環週程情形的探討

雖然循環週程的假設簡化了排程決策，對於工廠排程問題之處理有很大助益，但非循環週程的排程却可節省不少的成本支出。有很多研究ELSP的學者都注意到這一點，如馬琦（Magee）（註六）、馬迪耿（Madigan）（註七）、多爾及懷巴克（Doll and Whybark）（註八）等人就都曾探討此種情形，並提出他們的方法。

馬琦所用的ELSP決策參數是每年的生產週程數N，如果用本章第二節的變數符號表示，則最適生產週程數N*為：

$$N^*=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i h_i\left(1-d_i / P_i\right) / 2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i S_i} \tag{15}$$

其中，d_i，p_i，h_i 分別為產品i每年的需求量、生產量、單位存貨成本，與本章第㈠節略異。

對每項產品根據⒂式求出個別的週程數（去掉Σ），如果其中至少有一產品之週程數小於 $N^*/2$，則這幾種產品不必每週程生產一次，排程時宜特別考慮：「先將其他產品合併成一組，用⒂式求出週程數N′，而將這些週程數小於N*（n種產品全部考慮時之週程數）一半值之產品安排在週程數N′的循環週程中」。因為安插進特殊考慮部份的產品，故所得排程決策不再為循環週程，但其總變動成本却可降低。

馬琦的方法是一種經驗法則，接著將介紹兩種更具體有效的方法，即馬迪耿的方法與重複法。

1.馬迪耿的方法：

馬迪耿（Madigan）提出了一個解決無限長期間ELSP的方法，這個排程方法主要是由艾倫（Eilon）提出的方法（註九）發展而成的，它與馬琦的方法同樣都由循環週程出發，再修正為非循環週程的情形而達到降低成本之目的，其中，馬琦修正每年的生產週程數，而馬迪耿修正的為生產批量，但後者使得排程較易求得，且可獲致較低的成本。

這裡仍沿用本章第㈠節的變數符號，但令 $K_i=h_i(1-\rho_i)/2d_i$。求解方法如下：

⑴對個別產品 i＝1，2，……，n，分別求經濟批量 q_i^* 及經濟的變動成本 C_i^*，即

$$q_i^*=\sqrt{S_i\sigma_i / K_i} \tag{16}$$

$$C_i^*=2 d_i \sqrt{K_i S_i \sigma_i} \tag{17}$$

⑵將全部產品合併考慮，求出最適週程時間T*及各產品相對應的生產批量 q_i、變動成本 C_i，可得

$$T^*=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i\sigma_i / \sum_{i=1}^{n} d_i^2 K_i} \tag{18}$$

$$q_i=d_i T^* \tag{19}$$

$$C_i=S_i\sigma_i / T^*+T^* d_i^2 K_i \tag{20}$$

其中，i＝1，2，……，n。

⑶以上兩個步驟屬於循環週程的討論，接著便要修正生產批量，同時打破最初作的循環週程假設。首先比較上兩個步驟中的批量 q_i^*、q_i 及成本 C_i^*、C_i，假如有某個產品i的成本 C_i

顯著地大於經濟成本C_i^*，則修正該產品的生產批量 q_i 使其接近q_i^*。由下面的關係式

$$p_i = C_i / C_i^* = (q_i / q_i^* + q_i^* / q_i) / 2 \tag{21}$$

當修正 q_i 使之接近 q_i^* 時，p_i 值會接近1，亦即 C_i 會逼近其下限值C_i^*，而達到降低總變動成本的效果。為排程上之方便，修正後的批量應使其為修正前的批量 q_i 放大或縮小整數倍。

(4)當生產批量完成時，要檢查一下更換時間及生產時間之總和是否會超過機器的可用時間（available time），如果超出可用時間，則上個步驟得到的修正批量必須重新修正。

(5)最後一個步驟就是排程的工作，下面之方法對於因生產批在需要以前就先完成所導致之額外庫存成本，能予極有效之降低：

①按各產品之一個批量（修正完成的生產批量）的單位時間庫存成本大小，由大而小排列。

②在時間間隔為T^*的排程圖紙上，先排進每一週程需要生產兩次或兩次以上的產品，接著將①中次序在先的產品分別按次序排列在一週程生產數次的產品旁邊。

如果上述的排程不可行，可將②中最後排進的產品移到前面生產，當然這樣的排程會增加一些庫存成本。

2.重複法：

這是多爾（Doll）及懷巴克（Why bark）提出的方法。

假設每個產品 i 的週程時間 T_i（即連續兩次生產產品 i 的間隔時間為 T_i）是某一基本週程時間（fundamental cycle time）之整數倍，即存在一個基本週程時間T使得

$$T_i = K_i T \quad , \quad K_i \text{ 為整數} \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n \tag{22}$$

此假設與循環週程有著極大差異，在循環週程時，基本週程時間實際上即週程時間，而每個產品 i 的週程時間 T_i 均相同。除了這個假設外，其他變數仍用本章第㈠節的符號，產品 i 的單位時間總變動成本為

$$TC_i = \sigma_i S_i / T_i + h_i d_i T_i (1 - \rho_i) / 2 \tag{23}$$

週程時間（T^*）為

$$T_i^* = \sqrt{2 \sigma_i S_i / d_i h_i (1 - \rho_i)} \tag{24}$$

則產品總成本的一個下限值可由(24)式代入(23)式，再對 i 加總而得。

同樣地，循環週程時（即$T_i = T$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$）的成本為此時（$T_i = K_i T$）成本的一個上限值。

有了成本的上、下限值，我們便可進行重複求解，使成本在此上、下限間逐漸縮小範圍至一個令人滿意的程度。其過程如下：

(1)用(24)式求出每個產品 i 的週程時間T_i^*，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$。

(2)選取最小的T_i^* 作為基本週程時間T之最初估計值，即

$$T = \min_{i=1,n} [T_i^*]。$$

(3)計算T_i^* / T的值，並找出兩整數K_i^-，K_i^+使得

$K_i^- \leqq T_i^* / T \leqq K_i^+$，且$K_i^-$表示不大於$T_i^* / T$的最大整數，

K_i^+表示不小於T_i^* / T的最小整數。

(4)用$T_i = K_i^- T$及$T_i = K_i^+ T$分別代入(23)式，來決定新的K_i值，其決策準則為：

$$\begin{cases} K_i = K_i^-, & \text{當}\ TC_i(K_i^-) \leqq TC_i(K_i^+) \\ K_i = K_i^+, & TC_i(K_i^-) \geqq TC_i(K_i^+) \end{cases} \tag{25}$$

其中，$TC_i(K) = \sigma_i S_i / KT + h_i d_i K T (1 - \rho_i) / 2$ (26)

(5)利用新的 K_i 值重新估計基本週程時間 T 之值，新的 T 值應能使各產品的成本總和為最小因此時總成本為 T 的函數，即

$$C(T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i S_i / K_i T + T \sum_{i=1}^{n} h_i d_i (1 - \rho_i) K_i / 2 \tag{27}$$

對(27)式微分，可求出 T 之最新估計值為

$$T = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i S_i / K_i \right) / \left[\sum_{i=1}^{n} h_i d_i K_i (1 - \rho_i) / \right] 2} \tag{28}$$

(6)用上個步驟所得 T 值回到第三個步驟去決定新的 K_i^- 及 K_i^+ 值。整個重複過程當第四步驟之 K_i 值與前次重複時便告停止。

註解：

註一：W.L.Maxwell, "The scheduling of economic lot sizes", Models and Analysis for Production Management (Taipei: Reprinted by Jwang Yuan, 1972), PP.512-513.

註二：同註一，PP.514-515.

註三：ibid

註四：B.E.Gillett, Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach (Taipei: Reprinted by Southeast, 1976), PP.201-205.

註五：同註四，PP.110-111.

註六：J.F.Magee, Production Planning and Inventory Control (Taipei: Reprinted by Suan Yeh, 1967), PP.55-61.

註七：J.G.Madigan, "Scheduling a multi-product single machine system for an infinite planning period", Management Science 14, No.11 (Jul., 1968): 713-719.

註八：C.L.Doll & D.C.Whybark, "An iterative procedure for the single-machine multi-product lot scheduling problem", Management Science 20, No.1 (Sep. 1973): 50-55.

註九：S.Eilon, Elements of Production Planning and Control (Tokyo: Maruzen, 1964), PP.243-245, 375-378.

四、隨機需求時的經濟批量排程方法

(一) (T , Q_i)法

由存貨模式中定期訂購模式 (periodic review models) (註一) 的概念，可發展出一個 ELSP 的決策方法，稱之為 (T , Q_i) 法。

因為產品更換時間與生產順序有關的情形，可用旅行的銷貨員問題之方法求其最佳生產順序，故本節的討論在不失一般性下，將假設更換時間與生產順序無關。

假定有生產 n 種產品的一部機器，產品 i 的需求率是隨機變數 D_i，其離散型的機率密度函數為 $f_i(D_i)$，而且需求可以積壓。其他已知條件可用下列符號表示：

S_i ：產品 i 的更換時間。

σ_i ：產品 i 的更換成本費率。

p_i ：產品 i 的生產率。

h_i ：產品 i 的存貨成本費率。

b_i ：產品 i 每缺貨（積壓需求）一個所發生的缺貨成本。

$E(D_i)$：產品 i 的期望需求率。

有了上述條件，便要求生產的週程時間 T 作為循環週程的時間長度，同時決定產品 i 的最高存貨水準 Q_i 使得該產品每個週程開始生產時的存貨數與該期的生產批量之和為 Q_i；換言之，生產決策是每隔 T 時間生產一次產品 i，生產批量為 Q_i 減去該產品開始生產時的存貨數，而最佳決策是使得單位時間內的總變動成本期望值最小的決策。

期望的單位時間總變動成本 $C(T, Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_n)$ 為：

$$C(T, Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \{\sigma_i S_i / T + h_i Q_i [p_i - E(D_i)] / 2p_i + b_i \sum_{D_i=Q_i/T}^{\infty} (TD_i - Q_i) f_i(D_i) / T\} \tag{29}$$

對(29)式偏微分，化簡後得到：

$$\partial C / \partial T = \sum_{i=1}^{n} \{-\sigma_i S_i / T^2 + b_i \sum_{D_i=Q_i/T}^{\infty} Q_i f_i(D_i) / T_i^2\} \tag{30}$$

$$\partial C / \partial Q_i = h_i [p_i - E(D_i)] / 2p_i - b_i \sum_{D_i=Q_i/T}^{\infty} f_i(D_i) / T \tag{31}$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

使得(30)及(31)式為零的 $T, Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_n$ 即為最適決策，故最適條件為下面的聯立方程組：

$$\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i p(D_i \geqq Q_i / T) = K \tag{32}$$

$$p(D_i \geqq Q_i / T) = TK_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{33}$$

其中 $K = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i S_i$，$K_i = h_i [p_i - E(D_i)] / 2p_i b_i$，均為常數，而 $p(D_i \geqq Q_i / T) = \sum_{D_i=Q_i/T}^{\infty} f_i(D_i)$。

上述的聯立方程組不易求得解析解，但可用反覆過程求得近似解：

(1)對 $g_i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \max(D_i)$，求出 $p(D_i \geqq g_i)$ 之值，其中 $\max(D_i)$ 為 D_i 的可能最大值。

(2)令 $T^* = \min_{i=1,n} [1 / K_i]$，其中〔 〕表示高斯整數。

(3)對 $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$，用(33)式找出滿足 $p(D_i \geqq g_i) \leqq T^* \cdot K_i$ 之最小整數 g_i。若 $T^* \cdot g_i$ 為整數，令 $Q_i^* = T^* \cdot g_i$，否則令 $Q_i^* = [T^* \cdot g_i] + 1$。

(4)求 $T' = K / \sum_{i=1}^{n} b_i K_i Q_i^*$，若 $T' = T^*$，則到下一步驟，否則令 $T^* = T'$ 再回到上個步驟。

（若重複很多次，比方說 100 次，仍不收斂，亦即 $T' \neq T$，也到下一步驟。）

(5)對 $T = T^* - 1, T^*, T^* + 1$，$Q_i = Q_i^* - 1, Q_i^*, Q_i^* + 1$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$，分別代入(29)式，求 $C(T, Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_n)$ 之值，選出最小之 C 值，其對應之參數 $T, Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_n$ 即為所求。

(二) (RPP , Q)法

(RPP , Q)法是由存貨模式中的定量訂購模式(fixed-reorder-point , fixed-reorder-quantity model)(註二)加以推演而成的。

考慮僅生產一種產品的一部機器，除了每年期望需求量為A及每年的單位產品存貨成本為H外，其他已知條件及符號均同前一節。如果機器產能足夠應付任何可能的生產要求(亦即生產率p相當大)，則可以利用微分法，求出使每年期望總變動成本最小的再生產點RPP及生產批量Q，而在產品存貨水準到達RPP時便開始生產Q單位的產品。

每年的期望總變動成本C (RPP , Q)為：

$$C(RPP, Q)=\sigma SA/Q+H[RPP+Q/2-SE(D)]+[\sum_{D=RPP/S}^{\infty}(SD-RPP)f(D)]bA/Q \tag{34}$$

對上式偏微分，得到

$$\partial C/\partial(RPP)=H-[\sum_{D=RPP/S}^{\infty}f(D)]bA/Q \tag{35}$$

$$\partial C/\partial Q=H/2-\sigma SA/Q-[\sum_{D=RPP/S}^{\infty}(SD-RPP)f(D)]bA/Q^2 \tag{36}$$

令(35)式及(36)式為0，得到最適條件：

$$P(D\geqq RPP/S)=HQ/bA \tag{37}$$

$$Q=\sqrt{2A\{\sigma S+b[\sum_{D=RPP/S}^{\infty}(SD-RPP)f(D)]\}/H} \tag{38}$$

上面聯立方程式之近似解，可按下列步驟求得：

(1)對RPP=1，2，……，S(maxD)，求 $ENS(RPP)=\sum_{D=RPP/S}^{\max D}(SD-RPP)f(D)$ 及 $P(D\geqq RPP/S)$ 之值。

(2)令 $RPP=S(\max D)$，此時 $ENS(RPP)=0$。

(3)計算 $Q=\sqrt{2A[\sigma\cdot S+b\cdot ENS(RPP)]/H}$ 之值，令 Q^* 為不大於Q之最大整數。

(4)求 $R=HQ^*/bA$ 之值，令 RPP^* 為滿足 $P(D\geqq Z/S)\leqq R$ 之最小整數Z。

(5)若 $RPP^*=RPP$，則繼續到下一個步驟，否則令 $RPP=RPP^*$ 再回到第三個步驟。(若重複100次仍不收斂，即 $RPP\neq RPP^*$，也到下一個步驟。)

(6)對 $RPP=RPP^*-1$，RPP^*，RPP^*+1，$Q=Q^*-1$，Q^*，Q^*+1，分別代入(34)式，求C (RPP , Q)之值，找出最小者，對應的RPP , Q即為所求。

以上是單一產品時的方法，但亦可將它應用到多種產品之情形。假定此部機器能夠生產n種產品，除了產品別之指標i以外，其他已知條件及符號均與單一產品時相同，則可先將各項產品分別單獨考慮，按上述方法求得其 $(RPP)_i$ 及 Q_i，再依照各項產品到達 $(RPP)_i$ 的先後來決定生產的順序。

註解：

註一：L.A.Johnson & Montgomery, Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control (Taipei: Reprinted by Mei Ya, 1975), PP.50-59.

註二：B.E.Gillett, Intorduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic

Approach (Taipei: Reprited by Southeast, 1976), PP.544-551.

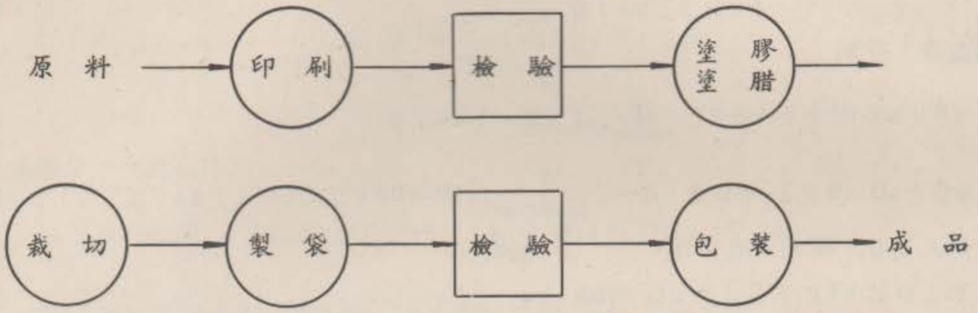
五、個案研究

(一) 問題的說明

D公司是台灣北部著名的一家彩藝印刷公司，主要產品為各式印刷精美的包裝袋。該公司係採訂貨生產方式，重要客戶都集中於台灣和香港兩地區。

公司的業務部門接到訂單後，設計部門便按照客戶要求的規格作出樣稿，然後交給工廠以為製版、生產之依據，工廠收到樣稿並經照相、鍍金及製版等程序後，即可準備投入生產。假如模版是現成的，以上過程均可省略。

在製版過程中，印刷作業佔了大部份時間，其製程如下：



由於產品間著色的差異，需用不同的印刷機進行印刷作業，該公司目前有五色及六色印刷機各一部，其他作業的產能則相當充裕，可配合二部印刷機的同時作業，因此印刷作業之安排是擬訂生產計劃的重點。五色及六色印刷機的作業分別稱之為B、C作業。

雖然公司接受技術範圍內的一切訂單，但根據生管部門的經驗，需在生產計劃內考慮的主要產品僅有15種，其中B作業的5種，C作業的為10種，而其他臨時訂單則可經由特殊安排完成生產。

由統計結果顯示，六十八年度內各項主要產品的需求情形如下：(需求率、生產率、更換時間、更換成本費率、存貨成本費率、缺貨成本費率及其他相關資料列於表一、表二。

(1) C作業的十種主要產品有已知的需求率，且為不變值。

(2) B作業的五種主要產品之需求率已知，但有幾個不同的可能值。

表一：C作業之相關資料表（肯定不變需求）

項目 / 產品代號 / 名稱	C-1	C-2	C-3	C-4	C-5	C-6	C-7	C-8	C-9	C-10
需求率 d（單位產品/小時）	70	400	150	200	90	250	300	110	350	300
生產率 p（單位產品/小時）	7000	38000	10500	14000	4500	7000	31000	9250	10000	12000
更換時間 S（小時）	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.2	0.4	0.1
更換成本費率 σ（元/小時）	178	85	23	150	35	80	39	138	51	48
存貨成本費率（10^{-6} 元/小時）	5.2	4.54	4.34	4.72	7.7	7.87	3.21	7.23	5.41	3.73

表二：B作業之相關資料表（隨機需求）

項目名稱 \ 產品代號	B-1	B-2	B-3	B-4	B-5
需求率D（單位產品/小時）的機率密度函數	$f_1(500)=0.25$ $f_1(600)=0.5$ $f_1(700)=0.25$	$f_2(800)=0.5$ $f_2(850)=0.5$	$f_3(450)=0.33$ $f_3(500)=0.33$ $f_3(600)=0.34$	$f_4(800)=0.25$ $f_4(900)=0.5$ $f_4(950)=0.125$ $f_4(1000)=0.125$	$f_5(1100)=0.75$ $f_5(1200)=0.25$
生產率p（單位產品/小時）	7200	9528	63000	17760	23200
更換時間S（小時）	0.5	0.1	0.3	0.25	0.1
更換成本費率σ（元/小時）	140	48	125	43	85
存貨成本費率h（10^{-6}元/小時）	6.48	2.6	3.18	3.94	4.69
缺貨成本費率b（元/單位產品）	1.792	0.72	0.88	1.088	1.296
每年的單位存貨成本H（元/單位產品）	0.56	0.225	0.275	0.34	0.405
單位成本C（元/單位產品）	2.24	0.9	1.1	1.36	1.63
期望需求率E（D）（單位產品/小時）	600	825	517	894	1125
每年期望需求量A（10^4單位產品/年）	5184	7128	4466.88	7724.16	9720

㈡ 結果的分析

本研究之目的是為這家公司擬訂較佳的生產批量排程。由上述可知，C、B作業的生產決策分別是肯定不變需求及隨機需求時的ELSP。茲將推演結果分析如下：

1 肯定不變需求時，可得兩點結論：

(1)重複法所得決策之成本最低，但排程較複雜，而簡單解法（循環週程）所得決策恰好相反。

(2)馬建耿法所得解之成本（1.47元/小時）較重複法多僅0.01元/小時，並且若繼續修正生產批量使其更接近經濟批量 q_i^* 時，成本將降低更多，最後甚至會低於每小時1.46元（當然此時排程變得複雜些），可見此法與重複法均甚具可用性。

2 隨機需求時：

用（T，Q_i）法所作決策之期望成本為每小時2.125元，（RPP，Q）法之期望成本每小時至少1.808元（無同時到達再生產點之情形便是1.808元）。

根據上述，此處提出三點結論：

(1)就此個案而言，（RPP，Q）法所得決策似較（T，Q_i）法為佳，但如有同時到達再生產點之情形，便可能發生存貨成本或缺貨成本，因缺貨成本甚高，此時的期望成本將會超過（T，Q_i）法所得決策之期望成本。因此（RPP，Q）法及（T，Q_i）法之選用應視實際情況而定，就如同B類（物料的ABC分類）材料適用定量訂購方式而A類材料則適用定期訂購方式的道理，對需求較安定之產品宜採用（RPP，Q）法，而成本較高或比較特殊之產品則適用（T，Q_i）法，本個案的需求變動不大，故以（RPP，Q）法所得結果為佳。

(2)從決策方法之難易程度來看，兩者均差不多。但在實施時，以（T，Q_i）法較為簡便，其

生產計劃可不用改變而繼續很長一段時間；(RPP , Q)法就必須時常查看庫存量是否到達再生產點，並且當數種產品都到達再生產點時得妥善安排生產順序，故顯得較複雜。

六、結　論

ELSP的決策優劣既然直接影響產品成本，則決策者關心的是，如何選擇一個適當的決策方法以作出較佳的決策，針對此問題在此將就個案研究所得結果提供一些意見。

(1)肯定不變需求的情形：

如果更換時間與生產順序有關，則應採用循環週程時的推廣模式作為決策的方法，否則便得在循環週程時的簡單解法、非循環週程時的馬廸耿法及重複法之間選取。假如決策者偏好排程之簡易，則可選用循環週程時的簡單解法，唯根據個案研究結果，此法對應的成本較另外兩個方法之成本約高出15％；若決策者以成本作為選擇基準，則在一般情形下，重複法成本最低，故宜選用之，然而馬廸耿法之成本與重複法甚接近，並且其排程較重複法來得簡單，因此，對排程簡易性及成本之偏好程度差異不大時，則可選取馬廸耿法。

(2)隨機需求的情形：

若決策者以排程簡易為選擇之標的，則以選用(T , Q_i)法最優，(RPP , Q)法並不適用；若決策者偏好較低的成本，則在需求變動較為安定時宜採(RPP , Q)法，需求變動較大及成本較高，比較特殊的產品，則以(T , Q_i)法比較適用。

參考書目

一、中文部份：

1.陳文哲著，工業工程與管理，台北：中興管理顧問公司，民國六十六年二版。

二、外文部份：

1. Allen, R.L. "Inventory management and control", Industrial Engineering Handbook", New York, McGraw-Hill PP.8-85, 8-118, 1971.
2. Bomberger, E.E. "A dynamic programming approach to a lot size scheduling problem", Management Science, 12, No.11 PP.778-784, 1966.
3. Doll, C.L., and Whybark, D.C. "iterative procedure for the single-machine multi-product lot scheduling problem", Management Science, 20, No.1 PP.50-55, 1973.
4. Eilon, S. "Elements of Production Planning and Control", Tokyo, Maruzen, 1964.
5. Elemaghraby, S.E. "The economic lot scheduling problem (ELSP): review and extensions", Management Science 24, No.6 PP.587-598, 1978.
6. Gillett, B.E. "Introduction to Operations Research: A Computer - Oriented Algorithmic Approach". New York: McGraw-Hill Book Co., PP.193-241, 528-563, 1976.
7. Hadley, D, "Nonlinear and Dynamic Programming", Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.
8. Hillier, F.S., and Lieberman, G.J, "Introduction to Operations Research", San Francisco: Holden-Day, PP.472-533, 1974.
9. Johnson, L.A., and Montgomery, D.C, "Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control", New York: John-Wiley, PP.103-186, 1974.

10. Madigan, J.G, "Scheduling a multi - product single machine system for an infinite planning period", Management Science, 14, No.11, PP.713-719, 1968.

11. Magee, J.F. "Production Planning and Inventory Control", New York: McGraw-Hill Book Co., 1958.

12. Maxwell, W.L. "The Scheduling of Economic Lot Sizes", Models and Analysis for Production Management", Naval Research Logistics Quarterly, PP.89-124, Jun-Sep., 1964.

13. Wagner, H.M., and Whitin, T.M. "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model: Models and Analysis for Production Management", Management Science (Oct., 1958): PP.89-96.

14. Zangwill, W.I. "A deterministic multi - period production scheduling model with backlogging", Management Science, 13, No.1, PP.105-119, 1966.