

## $\bar{X}$ 管制圖的經濟設計 Economic Design of $\bar{X}$ Control Chart

何照義 Tsau-Yi Ho

Institute of Management Science, N. C. T. U.

(Received November 4, 1979)

**Abstract** — The paper introduces the economic model developed by Duncan to design the economically optimal  $\bar{X}$  control charts, and the algorithm developed by Goel to solve the complex loss-cost equation. Assumed cost and risk factors were used to illustrate the effects of the variation of cost and risk factors on the optimal  $\bar{X}$  control chart parameters.

**摘要：**本文介紹如何建立一數學模式來代表一製程在  $\bar{X}$  管制圖管制下的製程收益。假設某些成本和風險係數為已知，則最佳  $\bar{X}$  管制圖可以由解數學模式使其損失成本為低時而求得。因為沒有解析法可以直接解析其數學模式而得最佳之  $\bar{X}$  管制圖，本文又介紹一種數值法以解最佳之管制圖，並應用假設之成本和風險係數對最佳  $\bar{X}$  管制圖做敏感度分析，以瞭解不同成本與風險係數對不同管制圖參數的影響。

### 一、緒 言

$\bar{X}$  管制圖已經非常廣泛地被應用在製程水準管制，但其應用通常是採用三標準差界限。本文介紹如何從經濟的觀點來設立最佳的  $\bar{X}$  管制圖。

任何工業的製程都會產生兩種基本的變異。一種是隨機的變異或者是干擾，另一種變異是由於製程的水準真正的變異。干擾的產生是由很多的隨機因素所聯合造成的，這些干擾是任何製程所具有的特性，是無法取消的，相反的，製程水準的變異是由非機遇性原因 (assignable Cause) 所引起的，這些原因必須要辨認出來並加以消除。製程管制的目標之一就是去辨別這二種變異，如果製程水準已經產生變異時，必須要儘快的偵察出來，並加以糾正。

通常用來對製程平均值管制的統計工具就是  $\bar{X}$  管制圖。 $\bar{X}$  管制圖是最早由蕭哈特 (Shewhart) [15] 所提倡的，它的功用主要是用來決定製程平均值是否穩定並維持製程在某一穩定的水準。

一般  $\bar{X}$  管制圖的運用是在一固定的間隔隨機選取某數目的樣品，然後計算樣品品質特性的平均值，如果樣品平均值落在上下界限外時就表示非機遇原因已使得製程的水準產生了變異。一般所用的上下界限都是採用 3 個標準差 ( $3\sigma_{\bar{x}}$ )，但是這種管制圖的設計並沒有考慮到成本和製程風險係數等因素。從管理者的觀點看，管制圖的設計應當考慮到這些因素才有實質上的意義。

### 二、區管制圖設計的準尺 (Criteria)

在設計  $\bar{X}$  管制圖時所要知道的參數有選取樣本數  $n$ ，抽樣間隔  $h$ ，和管制界限常數  $L$ 。通常所用的界限常數是取  $L = 3$ ，也就是 3 個標準差，樣本的大小和取樣本的間隔通常是由品管人員視成本或便利而主觀決定的，但是主觀決定的  $\bar{X}$  管制圖其統計特性或者是經濟的收益不一定是會



最佳的。如果假設品質特性值是呈常態分配，其變異數是常數不隨時間而變，在這樣的假設下有幾種方法可以客觀的設計在某種要求下的最佳  $\bar{X}$  管制圖。

### (1) 檢定力函數準尺 (Power function criterion)

一般用來決定  $\bar{X}$  管制圖樣本大小  $n$ ，管制界限常數  $L$  的方法都是應用檢定力函數準尺。這種準尺的應用就等於和檢定二種簡單假設一樣：

$$H_0 : \mu = \mu_a$$

$$H_a : \mu = \mu_a \pm \delta\sigma$$

$\delta\sigma$  是表示製程水準已變動的量，而此量的變動要有很高的機率能在管制圖上顯示出來。

所以，給以某一固定的型 I 誤差  $\alpha$  則樣本的大小  $n$  和管制界限常數  $L$  就可以決定以符合管理者需要管制圖有高的檢定力 (Power of test) 來偵察出品質變異的發生。假定對於品質水準的變異達到  $\delta\sigma$  時，該管制圖的檢定力是  $1 - \beta$  時，則樣本大小  $n$  和界限常數  $L$  可以由下列公式導演出來：

$$L = Z_{\alpha/2}, \quad n = (Z_{\alpha/2} - Z_{1-\beta})^2 / \delta^2$$

$Z_{\alpha/2}$  和  $Z_{1-\beta}$  是標準常態分配上的值。

例如要設計一  $\bar{X}$  管制圖以管制某一品質的平均值。如果從過去的資料顯示出該品質特性平均值是 10 單位，變異數是一單位。如果品質特性的平均值變異一單位時，該管制圖要有 90% 的機率在變異後的樣本中顯示出來。但是在另一方面，如果該品質的平均值保持不變時，由於抽樣的誤差，也有可能樣本平均值，會落於界限之外，但是這種可能率應少於 5%。假設該品質特性的分配是常態分配，則

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96 \quad Z_{1-\beta} = Z_{0.90} = -1.283$$

$$n = (1.96 + 1.283)^2 / 1 = 10.5 \quad \text{或者是 } n = 11$$

所以該管制圖的中心線應該設在 10 單位，上下界限是 9.4 和 10.6 單位。運用該管制圖時應該在每一固定間隔選取 11 個樣本，量取其品質特性，如果樣本的平均值落在界限之內，就表示製程是在穩定狀態下。如果落於界限之外，就表示該製程的品質水準可能已有變異。此時應該由品管工程師檢查製程是否有非機遇原因發生使得其製程平均水準產生變異。

### (2) 平均連串長度準尺 (Average Run Length Criterion)

平均連串長度 (簡稱 ARL) 是用來表示根據管制圖之運作規則，在得到所需的結論時，所需之平均取樣次數。ARL 是 Page [10] 在 1954 年所提出的，它又分成兩種情形，其一為製程未發生變異，但是根據機率分配的結果，仍有機會根據管制圖運作之規則而判定製程已脫離了管制狀態，當發生此種情形時，平均之取樣次數以  $L_a$  表示。其次為當製程受特殊原因之影響而脫離管制狀態，但根據管制圖之運作規則，往往無法立即偵察出來，而要經過數次取樣之後，才判定製程已脫離了管制狀態。此種當製程脫離管制狀態，直到被偵察出，其間之平均取樣次數以  $L_r$  表示之。Page 就用 ARL 的準尺去設計  $\bar{X}$  管制圖。其準尺就是選擇一固定的  $L_a$  值，然後計算樣本大小  $n$  和管制圖界限常數  $L$ ，使得此一管制圖在偵察製程平均值變異  $\delta\sigma$  時的  $L_r$  值為最小。此一準尺已被許多學者用來設計各種不同的平均值管制圖 [6, 7, 9, 10, 13, 14, ]。

### (3) 最小成本準尺 (Minimum Cost Criterion)

上述檢定力函數和 ARL 準尺都是統計上的準尺。根據這些統計上的準尺去設計平均值管制圖時並沒有考慮到樣本抽樣的間隔，成本和風險的因素以及其他和製程有關的參數。因此在最近幾

年來很多的研究都是偏重在如何根據經濟性的因素去設計管制圖 [ 2,3,4,5,8,9,11 ]。

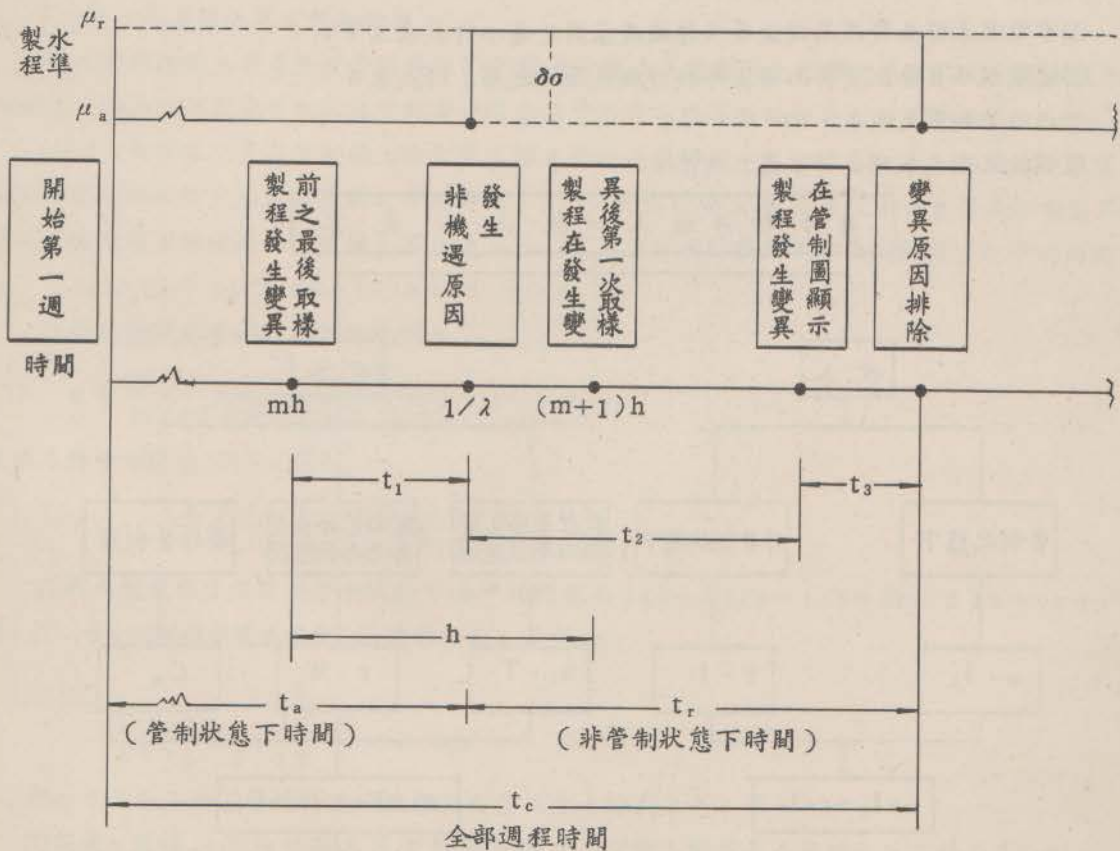
考慮到成本等的因素去設計管制圖的程序是先建立一個數學的模式，此一模式將代表一製程在應用平均值管制圖的管制下的收益，然後管制圖參數的求得就是使此製程的收益為最大，或者是成本為最小。

### 三、成本模式的建立

#### 1 製程行為

在設計  $\bar{X}$  管制圖時最常用的成本模式是 Duncan [ 1 ] 所導出來的模式。此模式是根據下述製程行為和收入的某些假設而成立的。

假設製程在開始時即  $t = 0$  時，是處於管制狀態下，其製程平均值為  $\mu_a$ ，變異數  $\sigma^2$  為已知且不隨時間變化。在某一時刻製程受單一非機遇原因發生的影響，製程平均值變動了  $\delta\sigma$ ，而到新的水準  $\mu_r = \mu_a \pm \delta\sigma$ ，假設此一非機遇原因發生之時間是呈負指數分配，其期望值為  $1/\lambda$ ，此後製程將維持在此水準，直到管制圖顯示出已脫離管制狀態並經採取調整措施，使製程回復到原先之水準  $\mu_a$ ，此一週程可以如下面圖一所示。



圖一 製程週程行為說明圖



以上對於製程行為的說明是基於以下幾點假設。

(1) 只有單一非機遇原因會在  $\tau$  小時內發生， $\tau$  的機率函數是呈負指數分配。

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad \tau > 0$$

$$E(\tau) = 1/\lambda$$

(2) 在取樣時刻不發生特殊變異。

(3) 當在製程被判定已脫離管制狀態，而尋找原因時，製程並不停止生產。

(4) 取樣、檢驗、計算到把樣本繪在管制圖上所需時間與樣本大小成正比。

(5) 製程之成本與風險係數假設為已知。

## 2 成本模式

製程每小時平均淨收入可以以下式表示之。

每小時平均淨收入 = 每小時平均收入 - 每小時平均成本。

每小時之平均收入可分成二部份：

(1) 當製程在管制狀態下之收入， $I_a$ 。

(2) 當製程在非管制狀態下之收入， $I_r$ 。

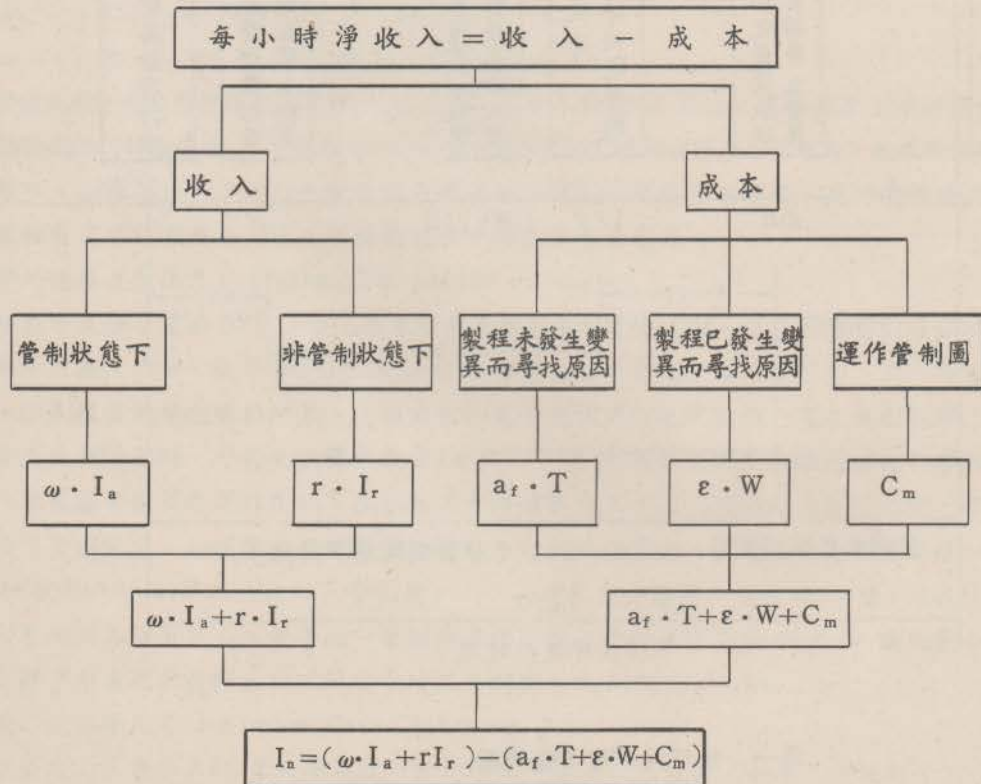
同樣的，每小時平均成本也可分成三部份。

(1) 當製程未發生變異而設法尋找非機遇原因之每小時成本為  $T$ 。

(2) 當製程確實發生變異而設法尋找非機遇原因之每小時成本為  $W$ 。

(3) 運作管制圖之成本， $C_m$ 。

製程收入與成本項目可如圖二所示。



圖二 製程收入與成本分解圖

為了要完全表示計算圖二所示的成本模式，有一些數值必須要用統計的方法求算出來。

(1)圖一的  $t_a$  是表示製程在管制狀態下的平均時間。因為非機遇原因發生的平均時間是  $1/\lambda$ ，所以  $t_a = 1/\lambda$ 。

(2)圖一的  $t_1$  表示若非機遇原因已發生在  $m$  和  $m+1$  樣本之間隔內之平均時間。因為取樣本之間隔是  $h$  小時，因此  $t_1$  可以由下式數學方式求之

$$\frac{\int_{mh}^{(m+1)h} e^{-\lambda t} \lambda (t-mh) dt}{\int_{mh}^{(m+1)h} e^{-\lambda t} \lambda dt} = \frac{1 - (1 + \lambda h) e^{-\lambda h}}{\lambda (1 - e^{-\lambda h})} = \frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12} \text{ 加 } \lambda^3 h^4 \text{ 和更高次數項目}$$

因為在實際的製程運作中  $\lambda$  值通常是很小的，同時  $h$  也不會太大，因此省略了高次數之  $\lambda^3 h^4$  等項可以用  $\frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12}$  來表示非機遇原因發生在  $h$  小時間隔的平均時間。

(3)假使非機遇原因已經發生，讓  $P$  表示管制圖偵察出此非機遇原因產生之機率。如果管制圖的界限是  $L\sigma_x$ ，則製程水準由  $\mu_a$  變異到  $\mu_a + \delta\sigma$  時每次取樣本  $n$  其樣本平均值落在管制圖限外之機率  $P$  等於：

$$P = \Phi(\delta\sqrt{n} - L) + \Phi(-\delta\sqrt{n} - L)$$

$\Phi(\cdot)$  表累積標準常態分配值。

因此在非機遇原因產生後平均要取  $1/P$  樣本才能在  $\bar{X}$  管制圖上偵察出來。假使  $h$  是每次取樣的間隔，那麼製程在非管制狀態下到有一樣本的平均值落在界限外的平均時間  $t_2 = \frac{h}{P} - (\frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12})$

(4)令  $e$  表取樣後至在管制圖上繪出樣本點之平均延遲時間，其與樣本大小  $n$  有關， $D$  表樣本點落在管制線外而設法尋找原因之平均時間，則  $t_3$  表製程發生變異其樣本值會落在管制圖界限外到發現原因並排除之平均時間，其值是  $t_3 = en + D$ 。所以製程在非管制狀態下之平均時間

$$t_r = (1/P - 1/2 + \lambda h/12)h + en + D。$$

(5)因此製程在管制狀態下的比例為，

$$\omega = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + (1/P - 1/2 + \lambda h/12)h + en + D}$$

製程在非管制狀態下的比例為，

$$r = \frac{(1/p - 1/2 + \lambda h/12)h + en + D}{1/\lambda + (1/p - 1/2 + \lambda h/12)h + en + D}$$

(6)因為製程在管制及非管制狀態下的平均週程為  $1/\lambda + (1/p - 1/2 + \lambda h/12)h + en + D$  小時，所以每小時製程會變成非管制狀態的次數  $\epsilon$  是等於，

$$\epsilon = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12})h + en + D}$$

所以平均每小時花費在尋找非機遇原因當其發生的成本是  $\epsilon W$ 。

(7)假使  $\alpha$  為樣本平均值落在  $\bar{X}$  管制圖界限外而實際上製程是在管制狀態下的機率，則

$$\alpha = 2\Phi(-L)$$

那麼平均每小時製程未發生變異而被視為已發生變異之次數為  $a_r = (\alpha \cdot \omega)/h$ 。

(8)令  $c$  表檢驗之單位成本， $b$  為抽樣與製圖之固定成本，假設檢驗成本與樣大小成正比，因



此運作管制圖每小時之平均成本為  $C_m = \frac{b + cn}{h}$

根據上述的成本模式，可以求得在長期的運作下製程每小時的平均收入為，

$$I_n = (\omega \cdot I_a + r \cdot I_r) - (a_f \cdot T + \varepsilon \cdot W + C_m)$$

令  $M = I_a - I_r$  表製程在管制狀態下和非管制狀態下的收入差異，因為  $\omega + r = 1$ ，所以

$$I_n = I_a - (r \cdot M + a_f \cdot T + \varepsilon \cdot W + C_m)$$

次令  $C = r \cdot M + a_f \cdot T + \varepsilon \cdot W + C_m$

$$= \frac{(1/p - 1/2 + \lambda h/12) \lambda h M + (en + D) \lambda M + \alpha T/h + \lambda W}{(1/p - 1/2 + \lambda h/12) \lambda h + (en + D) \lambda + 1} + \frac{b + cn}{h} \quad (3.1)$$

則  $I_n = I_a - C$

$C$  稱為損失成本，因為  $I_a$  與  $\bar{X}$  管制圖設計參數無關，因此平均淨收入  $I_n$  在  $C$  為最小值時將為最大。所以最經濟性的  $\bar{X}$  管制圖的設計，就是求解損失成本程式內的管制圖參數  $n$ ， $h$  和  $L$  以使得其損失成本  $C$  為最小。

### 3. 成本模式數值解法

求解損失成本  $C$  程式中的管制圖參數  $n$ ， $h$  和  $L$  以使得  $C$  值最小的方法是由 Goel 等人 [4] 所提出的

$$\text{令 } X = (1/p - 1/2 + \lambda h/12) \lambda h + (en + D) \lambda \quad (3.2)$$

則損失成本  $C$  可以寫成為，

$$C = \frac{XM + \alpha \cdot T/h + \lambda W}{1 + X} + \frac{b + cn}{h} \quad (3.3)$$

為了求得  $\bar{X}$  管制圖的參數  $n$ ， $h$  和  $L$  以使得  $C$  為最小值，可以先求得在每一個定的  $n$  值時的  $h$  和  $L$  值使  $C$  為最小，然後最佳的  $n$  值就是由許多  $n$  值中取其損失成本  $C$  為最小，所以在固定  $n$  值，可以求  $C$  方程式對  $L$  和  $h$  取偏微分，並使其值為零。

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{(1+X) \left( M \frac{\partial X}{\partial L} + \frac{T \partial \alpha}{h \partial L} \right) - \left( XM + \frac{\alpha T}{h} + \lambda W \right) \left( \frac{\partial X}{\partial L} \right)}{(1+X)^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial h} = \frac{(1+X) \left( M \frac{\partial X}{\partial h} - \frac{\alpha T}{h^2} \right) - \left( XM + \frac{\alpha T}{h} + \lambda W \right) \frac{\partial X}{\partial h}}{(1+X)^2} - \frac{(b+cn)}{h^2} \quad (3.5)$$

讓上述二偏微分等於零，則得下列二式，

$$\left( \frac{\alpha T}{h} + \lambda W - M \right) \frac{\partial X}{\partial L} = \frac{(1+X) T}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial L} \quad (3.6)$$

和

$$\left( \frac{\alpha T}{h} + \lambda W - M \right) \frac{\partial X}{\partial h} = -\frac{(1+X) \alpha T}{h} + \frac{(b+cn)(1+X)^2}{h^2} \quad (3.7)$$

因為

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \lambda \left( \frac{-h}{p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial L} \right)$$

$$\text{而 } \frac{\partial p}{\partial L} = -\frac{\exp \left[ -\left( L - \delta \sqrt{n} \right)^2 / 2 \right]}{\sqrt{2\pi}} = -\Phi_1$$

所以

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\lambda h \Phi_1}{p^2} \quad (3.8)$$

又因為

$$\frac{\partial X}{\partial h} = \lambda \left\{ \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12} \right) + \frac{\lambda h}{12} \right\} \quad (3.9)$$

和

$$\frac{\partial \alpha}{\partial L} = -2 \left\{ \frac{e \times p (-L^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right\} = -2\Phi_2 \quad (3.10)$$

將 (3.8 ~ 3.10) 之  $\frac{\partial X}{\partial L}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial h}$  和  $\frac{\partial \alpha}{\partial L}$  之值代入 (3.6) 得,

$$\frac{-2(1+X)T\Phi_2}{h \left( \frac{\alpha T}{h} + \lambda W - M \right)} = \frac{\lambda h \Phi_1}{p^2}$$

簡化得

$$\frac{\lambda \Phi_1}{2TP^2\Phi_2} = \frac{(1+X)}{\{(M-\lambda W)h^2 - \alpha Th\}} \quad (3.11)$$

將 (3.8 ~ 3.10) 之  $\frac{\partial X}{\partial L}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial h}$  和  $\frac{\partial \alpha}{\partial L}$  之值代入 (3.7) 得,

$$\left\{ -\frac{(1+X)\alpha T}{h^2} + \frac{(b+cn)(1+X)^2}{h^2} \right\} \left\{ \frac{1}{\frac{\alpha T}{h} + \lambda W - M} \right\} = \lambda \left\{ \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12} \right) + \frac{\lambda h}{12} \right\}$$

簡化後得

$$\frac{\lambda^2 h}{6} + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \lambda = \frac{(1+X)}{\{(M-\lambda W)h^2 - \alpha Th\}} [\alpha T + (1+X)(b+cn)] \quad (3.12)$$

從 (3.11) 和 (3.12) 程式可以得到二個二項方程式。第一個二項方程式是把  $(1+X) / \{(M-\lambda W)h^2 - \alpha Th\}$  從 (3.11) 和  $X$  從 (3.2) 代入 (3.12) 式, 簡化後得到,

$$\beta_1 h^2 + \beta_2 h + \beta_3 = 0 \quad (3.13)$$

式中  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  和  $\beta_3$  之值如下,

$$\beta_1 = \lambda^2 (b+cn) / 12$$

$$\beta_2 = (1/p - 1/2)(b+cn)\lambda - (2T\lambda p^2/6)(\Phi_2/\Phi_1)$$

$$\beta_3 = (\lambda en + \lambda D + 1)(b+cn) - (1/p - 1/2)(2Tp^2)(\Phi_2/\Phi_1) + \alpha T$$

另外一個二項式方程式是把 (3.2) 式之  $X$  值代入 (3.11) 而得到,

$$r_1 h^2 + r_2 h + r_3 = 0 \quad (3.14)$$

式中  $r_1$ ,  $r_2$  和  $r_3$  之值如下,

$$r_1 = \frac{\lambda(M-\lambda W)\Phi_1}{p^2} - \lambda^2 T \Phi_2 / 6$$

$$r_2 = -\frac{\alpha \lambda T \Phi_1}{p^2} - 2T\lambda(1/p - 1/2)\Phi_2$$

$$r_3 = -2T(\lambda en + \lambda D + 1)\Phi_2$$



因為  $\beta$  和  $r$  只是管制圖參數  $n$  和  $L$  值的方程式，因此  $h$  之值可以從 (3.13) 和 (3.14) 方程式消除，而得到  $n$  和  $L$  的方程式。

$$f(n, L) = (r_1\beta_2 - r_2\beta_1)(r_2\beta_3 - r_3\beta_2) - (r_1\beta_3 - r_3\beta_1)^2 = 0 \quad (3.15)$$

同時從 (3.13) 和 (3.14) 可以得  $h$  之值如下，

$$h = \frac{(\beta_3 r_1 - \beta_1 r_3)}{(\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1)} \quad (3.16)$$

因此方程式 (3.15) 和 (3.16) 就成為求解最經濟管制圖參數的基本方程式。但是 (3.15) 是很複雜的方程式，不能用解析的方法求解，而需要用數值方法求解。其求解之步驟可如下述。

- (1) 假設開始之整數  $n_0$ ， $n_0 \geq 1$ 。
- (2) 在  $n = n_0$  時，用增值法求  $L$  值使能滿足 (3.15) 式致某一準確性，令其值為  $L_0$ 。
- (3) 應用公式 (3.16) 求  $h_0$  值。
- (4) 應用步驟 (3) 所求得之正數  $h_0$  值和  $L_0$  值代入公式 (3.3) 求得區域性最低之成本  $C_0$ 。
- (5) 增加  $n_0$  之值，即  $n_1 = n_0 + 1$ ，並重覆上述步驟，求得新  $L_1$ ， $h_1$ ， $C_1$  值，如此反覆使用一直到發現最低之  $C^*$  值時之  $n^*$  和  $h^*$  就是最低成本之管制圖。

#### 四、例子說明

假設要設計一最有效的，也就是說使得製程的收入為最大的  $\bar{X}$  管制圖，其成本和風險係數值假設如下。

$$\begin{array}{llllll} \delta = 2.00 & e = 0.05 & M = \$ 100 & W = \$ 25 & c = \$ 0.10 \\ \lambda = 0.01 & D = 2.00 & T = \$ 50 & b = \$ 0.50 & \end{array}$$

應用上述數值方法，假設先開始之  $n$  值為 1，然後尋找所有  $L$  值在 0.1 和 5.0 之間能滿足公式 (3.15) 至  $10^{-8}$  或更更好之值，然後應用公式 (3.16) 求  $h$  之值。其結果如下表一所示。

$n_j$	$L$	$f(n, L)$	$h$	$C_{n_j}^*$
1	2.5261	$1.05 \times 10^{-9}$	0.6720	\$576.6843
2	2.6911	$1.46 \times 10^{-10}$	0.9246	458.1015
3	2.8234	$5.06 \times 10^{-10}$	1.1359	417.7678
4	2.9524	$3.07 \times 10^{-10}$	1.2881	404.0681
5	3.0820	$1.23 \times 10^{-11}$	1.4077	401.3788
6	3.2112	$6.96 \times 10^{-11}$	1.5001	404.8958
7	3.3403	$8.94 \times 10^{-10}$	1.5649	411.2918
8	3.4653	$2.65 \times 10^{-10}$	1.6556	419.4623
9	3.5894	$1.18 \times 10^{-9}$	1.7228	428.4784
10	3.7113	$4.28 \times 10^{-10}$	1.7859	437.8983

\* 100 小時製程運作之損失成本

表一例子之數值方法結果



因為最低成本發生在  $n = 5$ ，所以最佳的管制圖應該在每隔 1.4077 小時時選取樣本數 5，其管制界限之常數  $L = 3.082$ 。

### 五、敏感度分析

要瞭解成本和風險係數的變異對於最佳管制圖參數的影響，可以假設不同成本和風險係數，然後求解其最佳之管制圖。表二列出十五組不同成本和風險係數及其最佳管制圖及其成本。

變異程度 $\delta$	假 設 成 本 和 風 險 係 數								最 佳 管 制 圖			
	$\lambda$	M	e	D	T	W	b	c	n	L	h 小時	c *
2	0.01	\$100	0.05	2	\$50	\$25	\$0.50	\$0.10	5	3.08	1.41	\$401.38
2	0.02	100	0.05	2	50	25	0.50	0.10	5	3.08	1.02	694.77
2	0.03	100	0.05	2	50	25	0.50	0.10	4	2.94	0.78	959.47
2	0.01	1,000	0.05	2	50	25	0.50	0.10	4	2.95	0.41	2697.63
2	0.01	100	0.50	2	50	25	0.50	0.10	2	2.69	0.94	541.16
2	0.01	100	0.05	20	50	25	0.50	0.10	5	3.05	1.62	1837.28
2	0.01	100	0.05	2	500	250	0.50	0.10	6	3.67	1.45	637.05
2	0.01	100	0.05	2	50	25	5.00	0.10	6	2.88	3.47	586.95
2	0.01	100	0.05	2	50	25	0.50	10.00	1	1.46	4.66	990.99
1	0.01	12.87	0.05	2	50	25	0.50	0.10	14	2.68	5.47	141.80
1	0.01	12.87	0.05	2	500	250	0.50	0.10	21	3.39	7.23	364.29
1	0.01	12.87	0.05	2	50	25	5.00	0.10	18	2.56	11.02	195.78
0.5	0.01	2.25	0.05	2	50	25	0.50	0.10	38	2.21	23.45	83.70
0.5	0.01	225	0.05	2	50	25	0.50	0.10	21	2.11	1.30	1357.15
0.5	0.01	2.25	0.05	2	50	25	0.50	1.00	12	1.13	54.32	132.65

\*表示每 100 小時製程運作的成本

表二最佳 $\bar{x}$ 管制圖

從上表的結果可以得到下列幾點結論。

(1)最佳 $\bar{x}$ 管制圖的樣本數  $n$  受  $\delta$  的影響最大。如果 $\bar{x}$ 管制圖是用來偵察平均數變異二個標準差 ( $\delta = 2$ ) 或更大的變異時，則樣本數在 2 到 6 很可能就是最佳的。如果管制圖是用來偵察很小的變異，如一個標準差 ( $\delta = 1$ ) 或更小時，則最佳的樣本數  $n$  通常要增加到 20 左右或更多。樣本每單位的檢驗成本  $c$  對樣本的大小也有很大的影響，當  $c$  值很大時，最佳樣本數  $n$  會減少。

(2)取樣本的間隔  $h$  受  $M$  值的影響很大。 $M$  值是表示製程由於非機遇原因的產生而生產不良產品所引起的收入的損失。當  $M$  值比較小時，抽樣的間隔就比較長，當  $M$  值很大時，則抽樣的間隔就要縮短。換言之，抽樣的次數就要增加。 $\delta$  值對  $h$  也有中度影響， $\delta$  值比較小時，隨著樣本數的增加，樣本抽樣的間隔  $h$  也隨著拉長。抽樣與繪圖之固定成本  $b$  也對  $h$  有所影響。當  $b$  值提高時，抽樣間隔也會隨著拉長。

(3)尋找非機遇原因當其確實存在的成本  $T$ ，和尋找非機遇原因當其不存在的成本  $W$  的變異主

要的影響是在管制圖的界限常數  $L$ 。當  $T$  和  $W$  的比比較小時， $L$  的值通常在 2.5 左右，但是當  $T$  和  $W$  值很大時，最佳管制圖的界限應該增到 3.5 到 4.0 標準差。

## 六、結 論

近來對管制圖的研究已偏重在經濟性方面的研究。本文所討論的僅是如何設立經濟性  $\bar{X}$  管制圖的數學模式及其數值法之解法。根據作者 [9, 14] 對不同平均值管制圖的比較，發現在一般的應用情況下， $\bar{X}$  管制圖仍然是一種最簡單有效的管制圖。但是對於精密的工業產品，很小的製程變動需要馬上就偵察出來時，則其他的平均值管制圖如 Cusum Chart，或者是幾何平均數管制圖是更為有效的。

## 參考文獻

1. Duncan, A.J., "The Economic design of  $\bar{X}$  charts used in maintain current current control of a process," J. of the American Statistical Asso., 51, No.274 PP.228-242 (1956)
2. Gibra, I.N., "Economically optimal determination of the parameters of  $\bar{X}$  control charts," Management Science, 17, No.9, 635-646 (1971)
3. Gibra, I.N., "Recent Development in control chart techniques," J. of Quality Technology, 7, No.4, 183-192 (1975).
4. Goel, A.L. et al., "An algorithm for the determination of the economic design of  $\bar{X}$  charts based on Duncan's model," J. of the American Statistical Ass., 63, No.321, 304-320 (1968).
5. Goel, A.L., and Wu, S.M., "Economically optimal design of cusum charts," Management Science, 19, No.11, 271-282 (1973).
6. Goel, A.L., and Wu, S.M., "Determination of ARL and a controur nomogram for cusum charts to control normal means," Technometrics, 13, No.1, 221-230 (1971)
7. Goldsmith, P.L., and Whitfield, H., "Average run lengths in cumulative chart quality control schemes," Technometrics, 3, No.1, 11-20 (1961)
8. Gordon, G.R., and Weindling, J.I., "A cost model for economic design of warning limit control chart schemes," AIIE Transaction, September 319-329 (1975).
9. Ho, T.Y., "Optimal design of geometric moving average control charts," Ph.D. Dissertation, New York University, 1977.
10. Kemp, K.W., "The Average run length of a cumulative sum chart when a V-mask is used," Jol. of Royal Statistical Soc. Series B, 23, 149-153 (1961).
11. Knappenberger, H.A., and Grandage, A.H., "Minimum cost quality contral tests, AIIE Trans, 1, No.1, 24-32 (1969).
12. Page, E.S., "Control charts for the mean of a normal population," J. of Royal Statistical Soc. Series B, 16, 131-135 (1954).
13. Page, E.S., "Control charts with warning lines," Biometrika, 42, 243-254 (1955).
14. Robinson, P.B., and Ho, T.Y., "Average run lengths of geometric moving average charts by Numerical Methods," Technometrics, 20, No.1, 85-93 (1978)
15. Shewhart, W.A., "Economic Control of Quality of Manufactured" Product Princeton, N.J., Nan Nostrand Reinhold 1931.